

Signaux, Images, CAT-Scanner, Quelques aspects du rôle des mathématiques dans d'autres sciences – Fête de la science, Bordeaux, Octobre 2000

Alain Yger

22 mars 2006

1 Signaux digitaux, vision rétinienne

Toute information physique, qu'elle dépende d'un paramètre (celui du temps, auquel cas on parle de signal) ou de plusieurs (auquel cas on parle d'image) doit être quantifiée de manière digitale aux fins d'être traitée numériquement. Le mécanisme de quantification numérique nécessitant une discrétisation de l'espace des temps ou du support bi-dimensionnel sur lequel se trouve tracée l'image, on a le plus souvent affaire à un mécanisme de "stockage" local d'information en vue d'une moyennisation locale.

Or il se trouve que l'une des phases du mécanisme de la vision rétinienne consiste précisément en cette phase de "stockage" d'informations : se forme au creux de la rétine une image correspondant à une moyennisation locale de l'information.

Mais le mécanisme de la vision se double d'une seconde opération, celle qui consiste en la redistribution (effectuée cette fois au niveau du support cérébral) des moyennes ainsi stockées. Il s'agit là d'une opération tout à fait analogue à celle qui s'effectue au terme de la transmission d'une image prise par un satellite, "compressée" au niveau du satellite de manière à ce que la quantité de données à transmettre soit minimale, puis recomposée sur terre à partir d'une redistribution de ces données. Cet algorithme (car il s'agit bien d'un algorithme) est appelé algorithme pyramidal. Les deux diagrammes ci-dessous illustrent ce mécanisme :

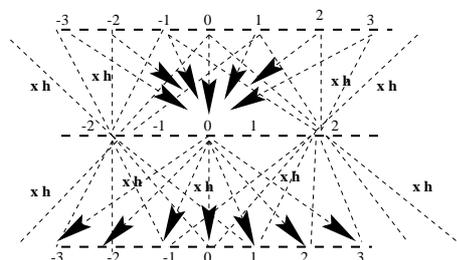


FIG. 1 – Le mécanisme de la vision

À chaque cran de l'algorithme pyramidal, la version récomposée à partir de la redistribution de la version stockée apparaît comme une version "brouillée" de l'information. La différence entre cette version brouillée $\mathbf{VB}(\mathbf{s})$ et la version originelle

s représente les détails que l'oeil perçoit à ce niveau de l'algorithme. Bien sûr, la version moyennisée (celle où la quantité d'information se trouve divisée par deux) peut être traitée à nouveau et l'on obtient ainsi un nouveau signal correspondant à des détails, mais à un niveau de lecture correspondant à la moitié du niveau de détail obtenu précédemment.

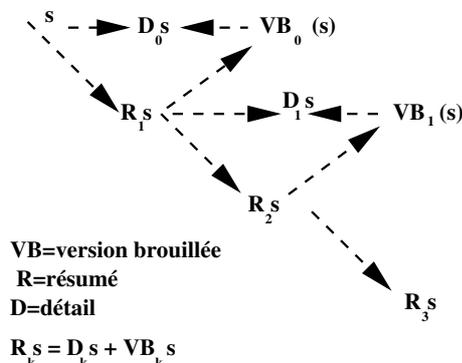


FIG. 2 – Algorithme pyramidal

Il est intéressant de relever comment l'algorithme pyramidal réagit à une impulsion; pour cela, nous en présenterons un modèle plus mathématique : la notion mathématique idéale qui rend compte de la non-corrélation de deux phénomènes physiques est celle d'orthogonalité. Rendons compte de l'algorithme pyramidal dans un contexte où l'on cherche à préserver l'“orthogonalité” entre les différentes composantes de la décomposition. Si le signal est de longueur disons $1025 = 2^{10} + 1$, on peut le projeter orthogonalement sur le sous-espace (de dimension $513 = 2^9 + 1$) engendré par les fonctions affines toutes les 2 unités. Voilà ce qui sera naturellement la “version brouillée” de notre information. La différence entre le signal digital et sa version brouillée constituera le signal contenant les détails au niveau d'échelle le plus fin. Ce processus s'itère (on décide d'un changement d'échelle, le pas d'échantillonnage de l'information étant multiplié par 2) pour traiter la version brouillée et construire un nouveau signal rendant compte des détails du signal original à cette nouvelle échelle. Si nous traitons une impulsion via cette version “idéale” (car orthogonale) de l'algorithme pyramidal, voici la gamme de détails que l'on voit apparaître; on y observe que l'impulsion génère une suite de détails se présentant comme des “vaguelettes”, ou ondelettes.

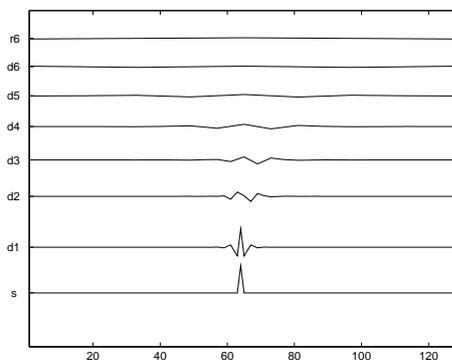


FIG. 3 – Décomposition d'une impulsion

On retrouve de tels motifs lorsque l'on envisage la suite des dérivées successives de l'atome de Gauss

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{t^2}{2\epsilon^2}},$$

avec $\epsilon \ll 1$ (cet atome est un modèle judicieux, on verra plus loin pourquoi, de la particule élémentaire de masse 1 localisée à l'origine). Les graphes des dérivées successives de cet atome de Gauss réalisent, ce n'est pas une surprise, des graphes d'ondelettes du même type que celles que nous venons de construire avec la gamme des détails aux niveaux d'échelle successifs d'une impulsion ponctuelle.

C'est dans le scindage de l'algorithme pyramidal (en préalable à la seconde opération intervenant dans cet algorithme et consistant en la phase de redistribution des moyennes stockées) qu'intervient la modélisation mathématique. Deux phases de perception visuelle sont envisageables dès le départ :

–la perception des structures cohérentes de l'information est l'opération qui à la suite digitale $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ associe la suite

$$(r(2k))_{k \in \mathbb{Z}} := \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)s(2k-l) \right)_{k \geq 0},$$

où $(h(l))_{l \in \mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes de somme 1 (ou tout au moins non nulle) ;

–la perception des détails (ou accidents) du signal ou de l'image digitale serait une suite du type

$$(d(2k))_{k \in \mathbb{Z}} := \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} k(l)s(2k-l) \right)_{k \geq 0},$$

où $(k(l))_{l \in \mathbb{Z}}$ est une suite de nombres de somme nulle, jouant le rôle de dérivée discrète de la suite $(h(l))_{l \in \mathbb{Z}}$.

Supposons que l'oeil se soit construit un modèle continu pour la fonction "créneau", φ ; si cet oeil est aussi un oeil mathématicien, ayant le souci de la lisibilité des informations ou des images (et en particulier de la non-redondance), il aura pris le soin de choisir son motif φ de manière à ce que les signaux translatés $(\varphi(t-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ forment un système orthonormé. La version brouillée du signal créneau φ est

$$\theta_r(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h(l)\varphi(t-l).$$

La redistribution de la suite $(r(2k))_{k \in \mathbb{Z}}$ produit le signal

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} r(2k)\theta_r(t-2k)$$

tandis que celle de la suite $(d(2k))_{k \in \mathbb{Z}}$ produit, elle, le signal

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} d(2k)\theta_d(t-2k),$$

où

$$\theta_d(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} k(l)\varphi(t-l)$$

correspond à la version brouillée de la dérivée de la fonction créneau ; cette fonction θ_d n'est plus une ondelette, mais un paquet d'ondelettes, et l'on entrevoit dans ce mécanisme de perception visuelle affiné par l'oeil du mathématicien la lecture de l'information dans le temps (ou l'espace), dans la gamme des échelles, mais aussi avec le souci de tenir compte de la vision de Fourier, suivant laquelle tout phénomène physique se décompose en "trains d'ondes" (ou phénomènes oscillants) élémentaires, du type

$$t \mapsto a \cos(\omega t + \varphi) + b \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega \in \mathbf{R}.$$

Notons que les deux versions brouillées

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} r(2k) \theta_r(t - 2k)$$

et

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} d(2k) \theta_d(t - 2k)$$

sont à re-exprimer dans le système des translatés de la fonction créneau φ , système de référence pour l'analyse à l'échelle 0. Les conditions additionnelles

$$g(l) = (-1)^l \overline{h(1-l)},$$

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} h(l) = \sqrt{2},$$

et enfin

$$|\sum h(l) e^{-il\omega}|^2 + |\sum h(l) e^{-il(\omega+\pi)}|^2 \equiv 1 \quad \forall \omega \in \mathbf{R},$$

assurent l'orthogonalité du scindage de l'information digitale $(s(k))_{k \in \mathbf{Z}}$ (pensée comme l'information continue $\sum_l s(l) \varphi(t-l)$) en ses deux versions brouillées que sont

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} r(2k) \theta_r(t - 2k)$$

d'une part et

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} d(2k) \theta_d(t - 2k)$$

d'autre part.

2 Un exemple : les signaux sismiques

Les signaux obtenus après enregistrement d'une secousse sismique sont de bons modèles de signaux où précisément interviennent les trois paramètres que sont le temps, l'échelle, et le nombre d'onde. Ce nombre d'onde joue un rôle dans les processus de réflexion ou de transmission des ondes sismiques en milieu non homogène et il est important, si l'on désire avoir des informations sur le milieu de propagation à partir de l'enregistrement de la secousse, de tenter de décomposer le phénomène en tenant compte de ces trois paramètres (c'est le principe du SONAR ou, en optique médicale, de l'échographie).

Voici dans un premier temps un signal correspondant à l'enregistrement d'une secousse sismique, de fait à trois enregistrements, dans les trois directions est-ouest, nord-sud, et suivant l'axe vertical.

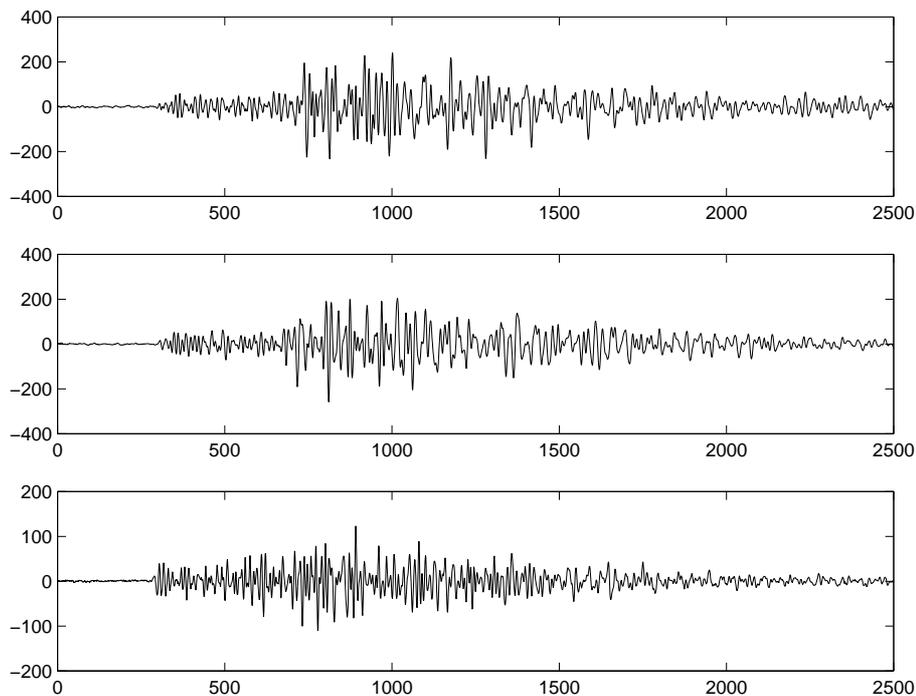


FIG. 4 – Un signal de secousse sismique (est-ouest, nord-sud, vertical)

Ce signal a été décomposé en composants orthogonaux suivant un algorithme consistant (dans le sens descendant) à privilégier la minoration de l'entropie. Étant donnée une suite numérique $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tendant vers 0 à l'infini assez vite (ou, du point de vue numérique, finie), l'entropie (de Shannon) de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est par définition la quantité

$$-\sum_l |a_l|^2 \log |a_l|^2;$$

plus cette quantité est petite, plus la distribution des valeurs de la fonction $k \mapsto |a_k|^2$ s'avère être une distribution diffuse. On décide ou non du scindage d'une suite donnée (c'est à dire de la décomposition du signal correspondant) suivant que la somme des entropies des deux suites discrètes générées par le scindage de cette suite est inférieure ou non à son entropie. Nous avons indiqué la décomposition des signaux correspondant aux enregistrements est-ouest, nord-sud et vertical.

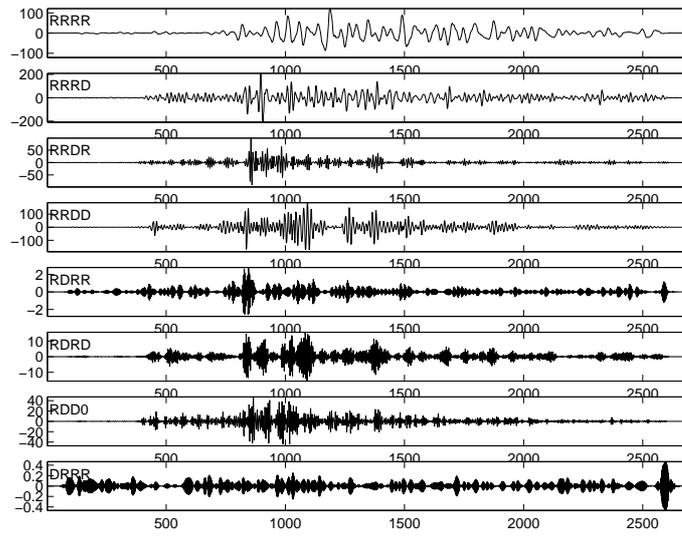


FIG. 5 – Analyse est-ouest

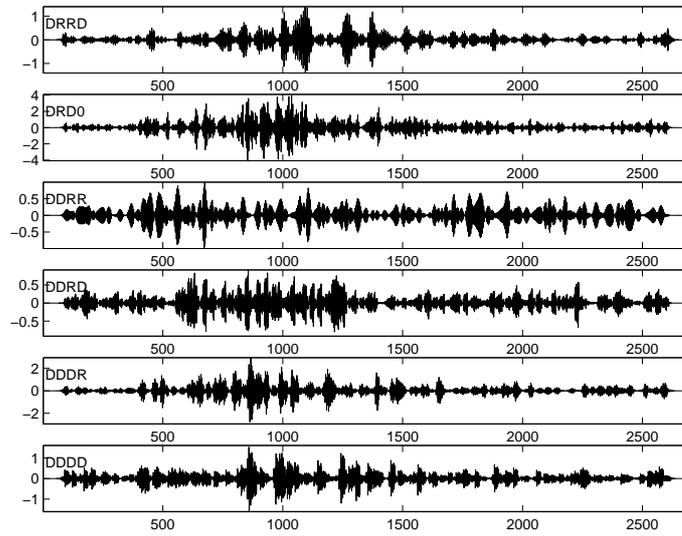


FIG. 6 – Analyse est-ouest (suite)

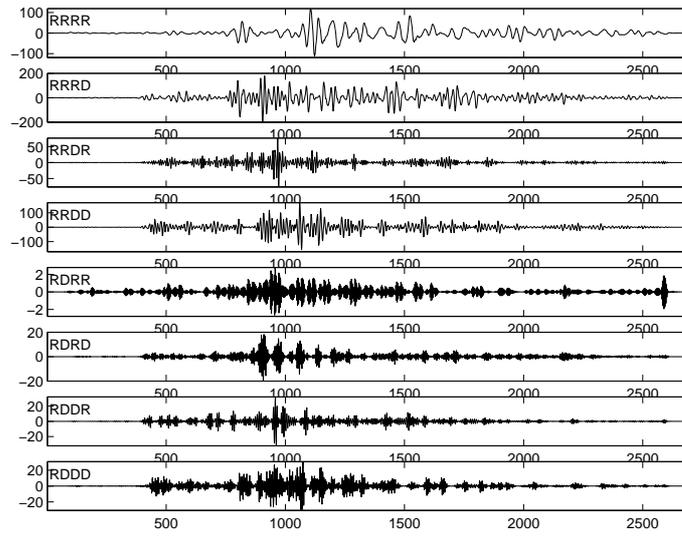


FIG. 7 – Analyse nord-sud

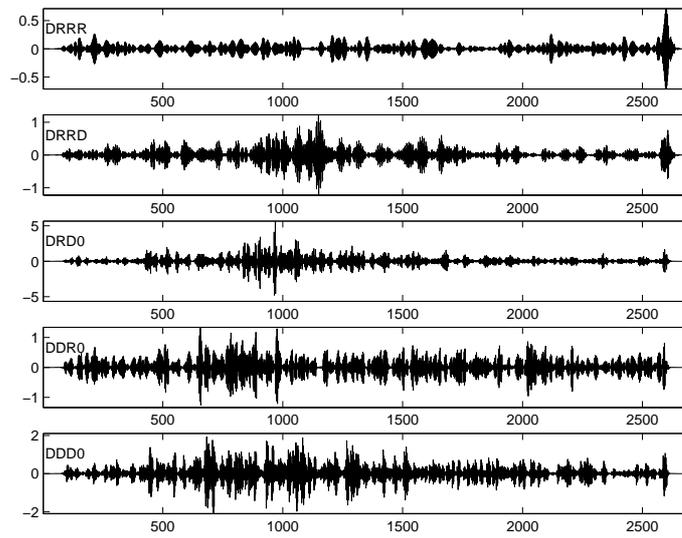


FIG. 8 – Analyse nord-sud (suite)

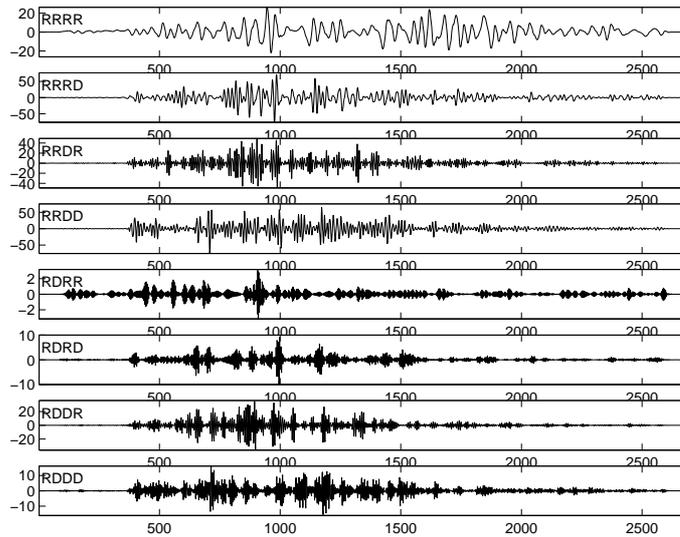


FIG. 9 – Analyse enregistrement vertical

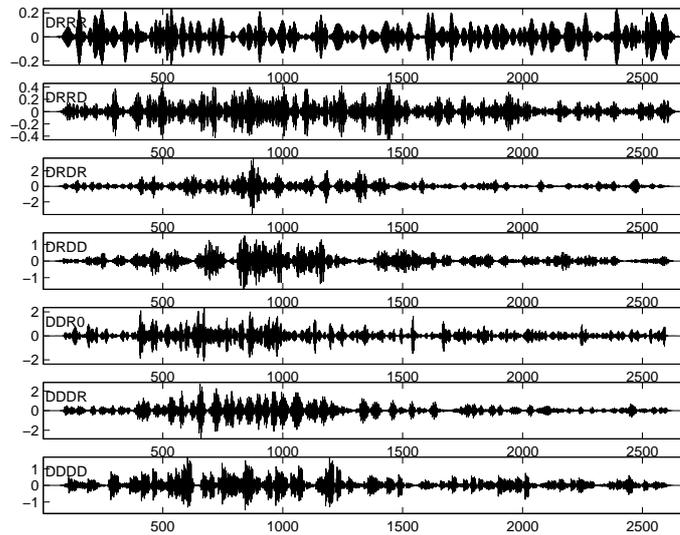


FIG. 10 – Analyse enregistrement vertical (suite)

Pour donner un exemple de la manière dont on peut exploiter ces diverses analyses, il est intéressant de savoir discerner dans une onde sismique les instants d'arrivée des ondes à propagation horizontale (ondes P), ceux d'arrivée des ondes à propagation verticale (ondes S), ainsi qu'éventuellement les arrivées successives retardées par les effets de diffusion ou de réflexion dans le milieu inhomogène où s'effectue le transit. Pour cela, on peut par exemple construire la fonction de polarisation de l'onde, consistant à calculer, pour chaque niveau de décomposition (disons j) commun aux décompositions des trois composantes envisagées (les signaux de la décomposition correspondants étant ew_j, ns_j, z_j) la matrice de corrélation glissante C_j des variables (ew_j, ns_j, z_j) , puis, pour chaque position temporelle t , la quantité

$$1 - \frac{\lambda_{j2}(t)}{\lambda_{j1}(t)},$$

où $\lambda_{j_1}(t) \geq \lambda_{j_2}(t)$ sont les deux plus grandes valeurs propres de cette matrice de corrélation $C_j(t)$; la fonction de polarisation

$$F(t) := \prod_j \left(1 - \frac{\lambda_{j_2}(t)}{\lambda_{j_1}(t)}\right)$$

rend compte de la localisation des instants d'arrivée des P -ondes. Voici le résultat concernant par exemple le cas de notre signal. Sur la figure suivante, nous avons indiqué le graphe de cette fonction de polarisation (en haut) et reproduit le graphe de l'enregistrement est-ouest de la secousse.

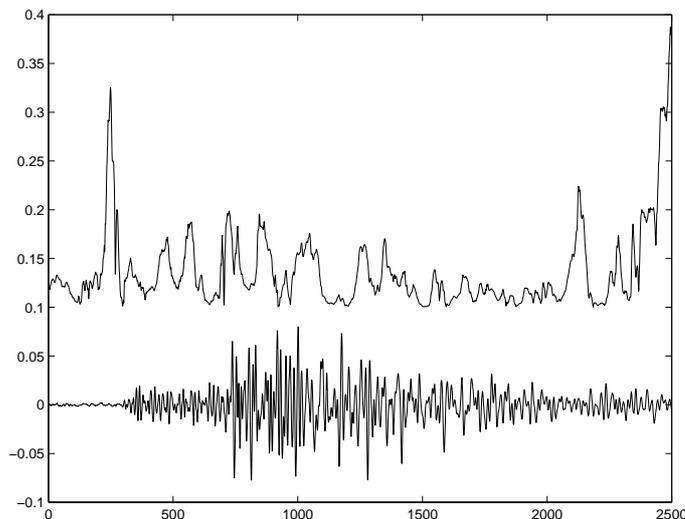


FIG. 11 – Polarisation

Une fois l'azimut déterminé (via le calcul du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre aux instants supposés d'arrivée de la P -onde), on choisit le bon repère pour analyser à nouveau le problème afin de détecter les instants d'arrivée des ondes de type S . On voit en tout cas sur cet exemple combien ce procédé simple construit sur le modèle de l'analyse de la vision peut s'avérer utile pour envisager l'analyse de signaux où se superposent des informations relatives au temps, à l'échelle où l'on se place, ou au nombre d'onde (ou encore fréquence). C'est volontairement que nous avons choisi ici d'illustrer notre présentation de l'algorithme de Marr revisité grâce à des signaux empruntés à la sismique.

3 De Fourier à Radon

C'est le mécanisme de diffraction optique qui réalise physiquement l'une des transformations mathématiques les plus importantes, la transformation de Fourier. La diffraction de Fraunhofer agit en effet comme suit : supposons qu'une onde sphérique monochromatique (λ),

$$(t, x, y, z) \mapsto a \exp \left(-j\omega t - jk \frac{x^2 + y^2}{2d} \right)$$

(avec $k = 2\pi/\lambda$), convergeant à la distance d du plan diffractant $\pi = xOy = \{z = 0\}$ (voir la figure ci-dessous), éclaire un objet qui se trouve dans le plan diffractant π et

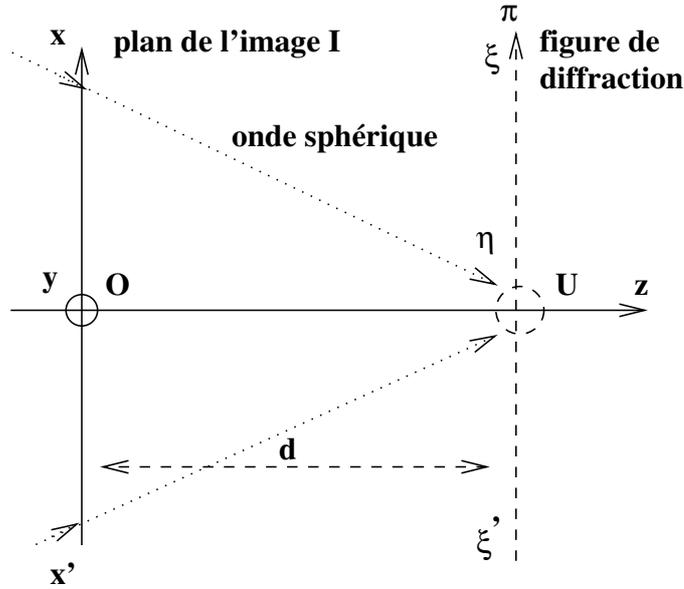


FIG. 12 – Réalisation de la FFT optique

dont la transmittance en amplitude réalise une distribution d'image $(x, y) \mapsto I(x, y)$; alors (sous réserve que l'on puisse se placer dans le contexte où est valide la règle d'approximation dite "des petits angles"), l'amplitude diffractée dans le plan de convergence $\xi U \eta$ vaut

$$a_{\text{diffract}}(\xi, \eta) = \frac{ka}{2\pi jd} \exp(jkd - j\omega t + jk \frac{\xi^2 + \eta^2}{2d}) \hat{I}(\xi k/d, \eta k/d),$$

où

$$\hat{I}(\omega_1, \omega_2) := \int \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) e^{-\omega_1 x - \omega_2 y} dx dy.$$

La transformation de Fourier transforme, on le vérifie optiquement, un réseau de \mathbb{R}^d en son réseau dual (d'où son rôle en cristallographie ou en chimie moléculaire). C'est aussi un outil mathématique prodigieux car, considérée cette fois comme une transformation mathématique, elle transforme l'opération de convolution, décrite formellement par

$$(s_1, s_2) \mapsto \int s_1(t) s_2((\cdot) - t) dt,$$

en l'opération de multiplication; ceci s'avère d'autant plus important que l'action de tout système agissant linéairement et sans que les paramètres du système évoluent avec le temps (ou l'espace si l'on est en deux dimensions) correspond à une opération de convolution avec un objet h attaché au système (h représentant la réponse du système à une impulsion).

Son défaut inhérent à sa réalisation optique elle-même est qu'elle ne localise pas; plus on tente de concentrer une particule, plus on diffuse son spectre; le meilleur compromis est celui des signaux gaussiens $t \mapsto e^{-\|t-b\|/a)^2/2}$, car la gaussienne de base $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est un vecteur propre de la transformation de Fourier, de valeur propre $\sqrt{2\pi}$.

L'idée soutenant le rôle fondamental de la transformation de Fourier dans non plus le traitement mais l'analyse de l'information est le fait qu'il existe une formule

d'inversion : si s est un signal absolument intégrable sur \mathbb{R} , de spectre \hat{s} également absolument intégrable sur \mathbb{R} , alors

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(la formule est analogue en dimension supérieure). Du point de vue numérique, la transcription de cette formule dans le cadre discret est juste le fait que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'inverse de la matrice

$$\left[e^{-2ikl\pi/N} \right]_{0 \leq k, l \leq N-1}$$

est la matrice

$$\frac{1}{N} \left[e^{2ikl\pi/N} \right]_{0 \leq k, l \leq N-1}.$$

Sans le prodigieux bond de l'analyse numérique et la découverte par Cooley-Tuckey en 1966 d'un algorithme (en cellules "papillons") permettant de réduire le nombre de multiplications nécessaires au calcul de spectre de N^2 à $N \log_2 N$, la transformation de Fourier ne se serait pas révélée l'outil de calcul qu'elle est devenue. Sans ce bond également, les idées (alors sans réel support expérimental concret) de mathématiciens tels Radon dans les années 1900-1920 seraient restées lettre morte. C'est avec le prix Nobel de Médecine de 1979, attribué à Cormack et Hounsfield, que les idées de Radon, rendues réalisables grâce à la révolution numérique, ont trouvé leur première grande récompense. Depuis, les mathématiques sur lesquelles repose le principe de la tomographie automatisée (Computer-Aid-Tomography, CAT-scanner), et avec elles, bien d'autres méthodes issues de ce que l'on appelle en mathématiques la géométrie intégrale, ont fait leur chemin et continuent à être au centre de questions mathématiques passionnantes.

Le dispositif (ici présenté de la manière la plus simple possible) est facile à expliquer ; on éclaire (via un rayonnement X) dans une direction $\vec{\theta}$ de la sphère unité \mathbf{S}^2 de \mathbb{R}^3 et la caméra enregistre l'image obtenue sur un écran récepteur perpendiculaire au rayonnement.

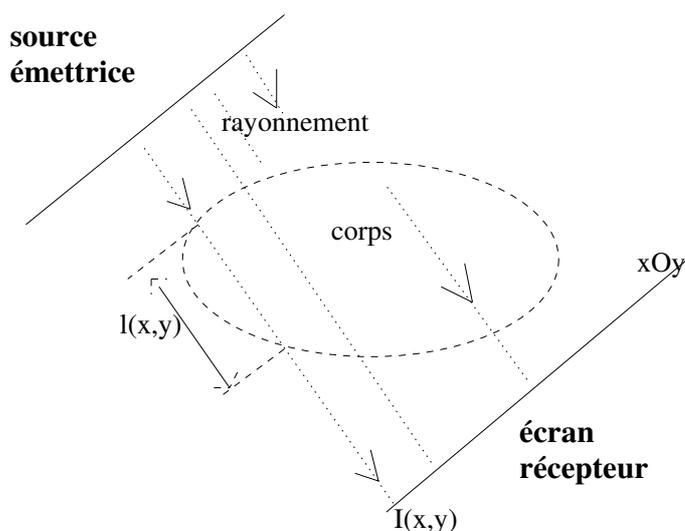


FIG. 13 – Principe du CAT-scanner

Si le corps est matérialisé par une densité f , la transformation est, du point de vue mathématique, l'application

$$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C} : (\vec{\theta}, p) \mapsto \int \mathcal{R}[f](p, \vec{\theta}) = \int_{\langle \vec{\theta}, x \rangle = p} f(x) dx.$$

Radon avait remarqué que, pour toute direction fixée $\vec{\theta}$, le spectre de

$$p \in \mathbf{R} \mapsto \mathcal{R}[f](p, \vec{\theta})$$

est le signal défini dans l'espace des fréquences par

$$\omega \mapsto \hat{f}(\omega \vec{\theta}).$$

C'est alors au tour de la formule d'inversion de Fourier de jouer et l'on peut ainsi récupérer l'information f via la formule

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^2} \mathcal{F}[\mathcal{R}[f](\cdot, \vec{\theta})](r) e^{-i\langle x, (r \cos \theta, r \sin \theta) \rangle} r^2 dr d\sigma(\vec{\theta}).$$

Dans le cas de la dimension 2, un peu plus simple à décrire, on récupère f en deux temps :

– Pour chaque valeur de $\theta \in [0, \pi]$, on cherche le signal réel Q_θ dont le spectre est donné par

$$\hat{Q}_\theta(\omega) = (\text{spectre de } \mathcal{R}[f](\cdot, \theta))(\omega) \times |\omega|;$$

on calcule ensuite

$$f(x) = \int_0^\pi Q_\theta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta.$$

La première de ces opérations correspond à une transformation de convolution, donc à un filtrage ; on fait agir un filtre dérivateur (les cellules électriques en fournissent des modèles), puis un filtre dont l'effet est de multiplier le spectre par la fonction signe. L'algorithme numérique de transformation de Fourier rapide (introduit par Cooley-Tuckey) soutend les calculs ici nécessaires.

Même si le problème de l'inversion de la transformation de Radon se trouve ainsi théoriquement résolu, plusieurs problèmes demeurent, qui continuent à motiver les recherches mathématiques :

– Le mécanisme d'inversion (on le voit en dimension 2) comporte l'action d'un filtre dérivateur, filtre à caractère instable. Les composantes hautes fréquence de la transformée de Radon, et parmi elles évidemment les bruits dûs aux erreurs expérimentales (liées à la caméra) se trouvent amplifiées sous l'action d'un tel filtre ; il est donc nécessaire de tronquer ces hautes fréquences en fenêtrant préalablement les spectres des $\mathcal{R}[f](\cdot, \vec{\theta})$, $\theta \in \mathbf{S}^2$ ou $\theta \in [0, \pi]$ (dans le cas 2 dimensionnel).

– Comme Fourier ne localise pas, il est difficile via cette méthode de ne penser récupérer l'information sur f que sur une zone d'intérêt en n'exploitant que les données $\mathcal{R}[f](p, \vec{\theta})$ pour un champ limité des valeurs de θ et de p .

On peut songer à ne plus récupérer f directement, mais à récupérer les produits scalaires

$$\langle f, \psi \rangle$$

où ψ décrit un dictionnaire d'atomes aussi bien localisés que possible tant en temps qu'en fréquences et tel que le module des produits saires

$$\langle\langle \mathcal{R}[\psi_1](p, \vec{\theta}), \mathcal{R}[\psi_2](p, \vec{\theta}) \rangle\rangle$$

décroisse le plus rapidement possible en fonction de la distance entre le support essentiel de ψ_1 (la zone où se trouve concentrée l'essentiel de la masse de ψ_1) et celui de ψ_2 (cette distance peut par exemple être visualisée comme la distance entre les centres de gravités des distributions de densité respective $|\psi_1|^2$ et $|\psi_2|^2$). L'idée (par exemple en dimension 2) consistant à utiliser un dictionnaire constitués d'atomes du type

$$\frac{1}{a}\psi((x - x_0)/a), \quad x_0 \in \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3), \quad a > 0,$$

où ψ est une fonction de \mathbb{R}^2 telle que

$$0 < \int_{\theta \in [0, 2\pi]} \int_0^{+\infty} r^{-1} |\psi(re^{i\theta})|^2 dr < \int_{\theta \in [0, 2\pi]} \int_0^{+\infty} r^{-1} |\psi(re^{i\theta})|^2 dr < +\infty$$

(et même que ce ψ admette un grand nombre de moments nuls à l'origine) conduit à la construction, dans le cas de la transformation de Radon, d'un dictionnaire adapté au problème au sens où nous l'avons mentionné.

Bien des questions relatives à la restitution d'une image tri-dimensionnelle (ou même bi-dimensionnelle) à partir de données incomplètes concernant la transformation de Radon soulèvent des questions mathématiques passionnantes.

Voici une manière de traiter cette question, cette fois plus algorithmique, utilisant un concept mathématique plus géométrique, inspiré des concepts euclidiens. Si $\vec{\theta}_1, \dots, \vec{\theta}_N$ constituent un nombre suffisamment large de directions et si f est le signal inconnu, on peut introduire la suite des projections orthogonales Q_j sur les sous-espaces affines

$$f + \text{Ker } A_{\vec{\theta}_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

où $A_{\vec{\theta}_j}$ désigne le sous-espace vectoriel des signaux que la caméra ne voit pas lorsque le rayonnement est orienté dans la direction $\vec{\theta}_j$. Il est clair que la connaissance de la transformée de Radon de f nous permet de calculer $Q_1[0]$. Ensuite, on peut utiliser un algorithme que l'on retrouve très fréquemment dans la plupart des problèmes liés au type de problèmes d'inversion instable que nous envisageons, celui des projections itérées : la suite des projections

$$(Q_N \circ \dots \circ Q_1)^n[0], \quad n \rightarrow +\infty,$$

converge vers la projection orthogonale de 0 sur le sous-espace affine $f + \bigcap_{j=1}^N \text{Ker } A_{\vec{\theta}_j}$ et l'on atteint ainsi f , modulo une erreur appartenant à l'intersection des noyaux des opérateurs linéaires $A_{\vec{\theta}_j}$.

Il y a bien sûr les cas extrêmes, ceux où seul l'argument mathématique fournit une solution théorique, mais où aucune implémentation sérieuse ne résiste à l'évidente instabilité. Le problème de Hammer reste l'un de mes exemples préférés : il s'agit d'un problème en dimension 2, résolu en 1979 par Gardner et McMullen : supposons que K_1 et K_2 soient deux convexes compacts du plan ayant même centre de gravité

et que l'on ait, pour quatre directions $\theta_1, \dots, \theta_4$ telles que le birapport des pentes soit transcendant

$$\mathcal{R}[\chi_1](p, \theta_j) = \mathcal{R}[\chi_2](p, \theta_j) \quad \forall p \in \mathbb{R};$$

alors $K_1 = K_2$. Le théorème repose à la fois sur une idée d'approximation et sur le fait que, si P est un polygone convexe, et si l'on introduit la suite de polygones définie par

$$P_{k+1} = \frac{1}{\sin(\pi/n)} \times (\text{polygone joignant les milieux de } P_k),$$

alors cette suite converge vers un n -polygone régulier. La convexité joue bien sûr dans le problème de Hammer un rôle crucial et il est illusoire d'extraire de l'argument un procédé de reconstruction d'un convexe compact K du plan à partir de seulement 4 vues.

L'analyse complexe, lorsque des procédés souvent de type Hilbertien permettent de pallier à l'inexploitable principe du prolongement analytique, permet aussi d'envisager l'inversion de la transformée de Radon avec données incomplètes.

4 Des moines de l'an 1000 à Fourier

On l'a vu, l'analyse de Fourier ne localise pas ; détecter les fréquences ponctuelles d'un signal, tels les accords d'une partition, reste une opération irréalisable si on envisage la prise de spectre de manière globale. Tout au mieux obtiendra t'on ainsi des résultats de nature statistique sur le contenu fréquentiel du signal. L'analyse d'une information dans l'espace temps-fréquences a précédé (et de loin) l'analyse de Fourier. Le codage musical, inventé par les copistes du moyen-âge, puis parfait à Arezzo sous la renaissance, en est la preuve. Du point de vue mathématique, la possibilité de réaliser ce codage repose sur une propriété somme toute très élémentaire : si $N \in \mathbb{N}^*$ et si α_k est une racine $N^{\text{ème}}$ de l'unité, alors la matrice

$$B_{N,k} := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_k & \alpha_k^2 & \dots & \alpha_k^{N-1} \\ \alpha_k^{N-1} & 1 & \alpha_k & \dots & \alpha_k^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_k^2 & \alpha_k^3 & \dots & 1 & \alpha_k \\ \alpha_k & \alpha_k^2 & \dots & \alpha_k^{N-1} & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice cyclique de rang 1, dont la seule valeur propre non nulle est égale à N , le vecteur propre correspondant étant le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{N}}(1, \overline{\alpha_k}, \dots, \overline{\alpha_k}^{N-1}).$$

C'est cette remarque qui conduit à la réalisation de l'algorithme dit MUSIC transformant une information digitale en partition musicale (sans les indications de niveau sonore, type "piano", "forte", "mezzo forte"), puisqu'il s'agit juste d'un indicateur fréquentiel. Voici par exemple un signal (correspondant à une mesure de vitesse dans un écoulement turbulent simulé) traité avec l'algorithme MUSIC ; on y voit donc la "partition" correspondant à ce signal.

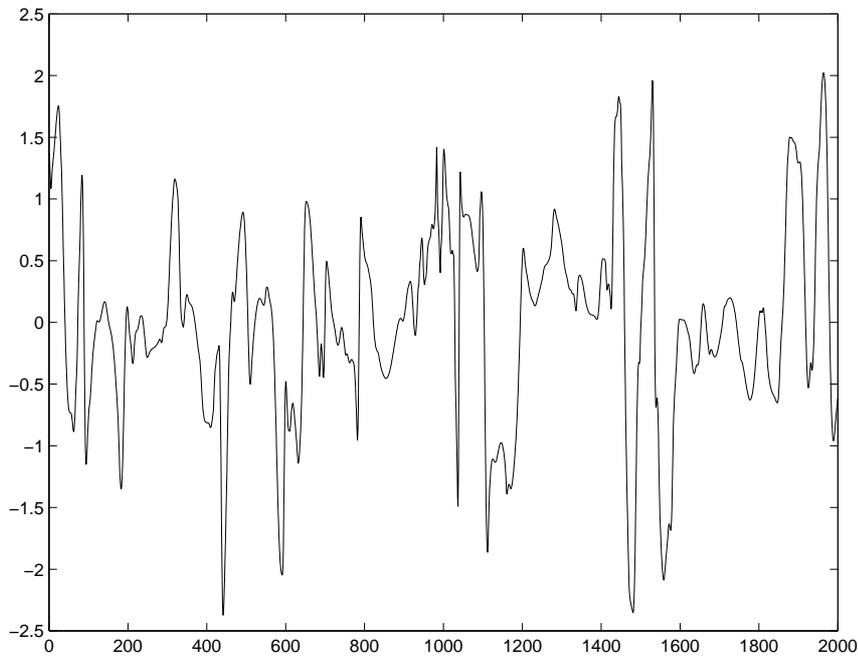


FIG. 14 – *Un signal de vélocité dans un écoulement turbulent*

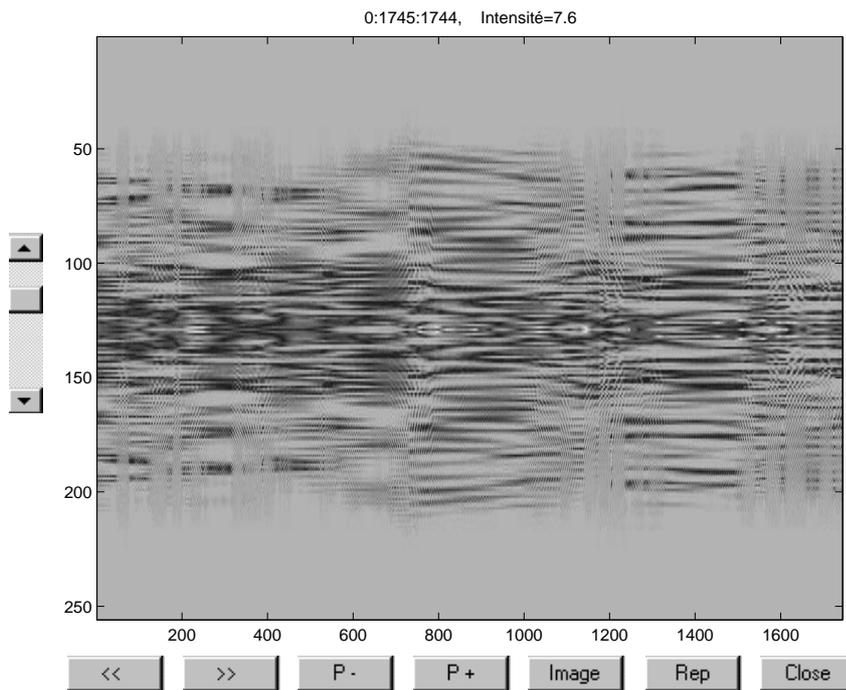


FIG. 15 – *La "partition" MUSIC du signal précédent*

L'analyse des signaux en temps et en fréquences se justifie pour tous les phénomènes non stationnaires, c'est à dire tous ceux dont l'ensemble des fréquences est susceptible de varier au cours du temps. Nous prendrons ici un autre exemple extrême (car l'étude de tels signaux s'annonce plus conjecturale qu'affirmative), celui des signaux correspondant à l'enregistrement des variations du rythme cardiaque. Étant

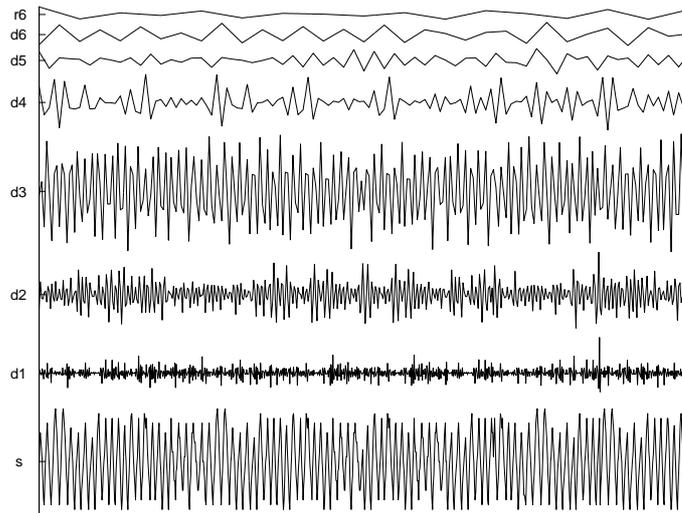


FIG. 16 – Tachogramme 1 décomposé

donné un électrocardiogramme (sur une longue séquence temporelle), on forme le signal digital obtenu en notant $s(i)$, $i \in \mathbb{N}$, la distance du pic i de l'électrocardiogramme au pic $i + 1$; un tel signal digital est un tachogramme; nous en donnons deux exemples, correspondant à des enregistrements d'une séquence de 1025 battements, concernant deux patients différents, les enregistrements étant effectués sous des conditions identiques. Les deux signaux figurent sur le graphique inférieur des tableaux; les détails de la décomposition "visuelle" suivant un algorithme pyramidal dyadique (tel que nous l'avons introduit dans la section 1 de cet exposé) figurent sur les graphiques supérieurs (de bas en haut dans l'ordre de leur apparition, de la lecture à la plus petite échelle à la lecture aux plus grandes échelles). On remarque que c'est au niveau des niveaux 3 et 4 de détails que se lit une nette différence de structure au niveau de ces deux signaux. Un rythme assez régulier apparaît dans le détail 3 du tachogramme 1, n'apparaît plus au même niveau de détail dans le tachogramme 2, tandis que le niveau 4 se trouve renforcé par des trains d'ondes plus cohérents. Or il se trouve qu'une étude statistique basée sur le principe d'un algorithme dit autoregressif qui n'est ni plus ni moins qu'un algorithme de prédiction –comment calculer, toujours via des méthodes de moindres carrés, les coefficients d'une équation aux différences que l'on suppose à priori régir une suite récurrente– conforte l'idée selon laquelle figurent dans l'analyse des variations du rythme cardiaque (ou de la pression artérielle), deux composantes, l'une haute fréquence, l'autre basse fréquences, ces fréquences étant de fait assez mouvantes, mais grosso modo dans un rapport de 1 à 2 (d'où un certain intérêt, même s'il ne s'agit que d'une analyse temps-échelles et non temps-fréquences) pour privilégier, avant de tenter une analyse fréquentielle, même statistique, la décomposition pyramidale que nous avons proposé. Ces deux composantes pourraient être en relation avec la fonction de régulation neurale de la circulation, marquée en particulier par ce que l'on appelle la balance sympathico-vagale; une hypothèse serait que la composante haute fréquence figurant dans le signal serait un marqueur de la modulation vagale, la composante basse-fréquence un marqueur de la modulation conduite par le nerf sympathique. Une analyse temps-fréquence, au contraire d'une analyse statistique, permet d'analyser les réactions ponctuelles (au niveau des variations du rythme cardiaque) à

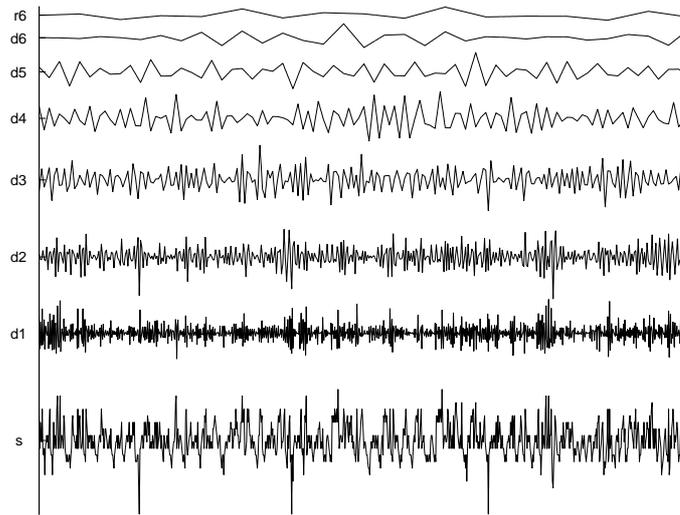


FIG. 17 – Tachogramme 2 décomposé

l'injection de tel ou tel médicament, et par là même d'infirmier certaines hypothèses. Même si les mathématiques ici sont à la limite de leur capacité, elles restent un outil intéressant à long terme, au vu précisément qu'elles permettent d'étayer certaines hypothèses (statistiquement bien sûr).

Dernier modèle enfin où l'analyse de Fourier, cette fois rendue inter-active, prend tout son sens, celui des signaux de parole. Il est clair que le signal de parole est un signal non stationnaire, le système le produisant (orgue acoustique constitué de la glotte, des cordes vocales, du conduit vocal) se déformant au cours du temps. Une décomposition (via la minimisation d'un critère d'entropie comme dans l'algorithme visuel) utilisant cette fois des systèmes orthonormés constitués de signaux oscillants élémentaires de différentes fréquences, permet le scindage d'un signal de parole en sections sur lesquelles on préserve la stationnarité. Voici par exemple le sectionnement auquel cet algorithme nous conduit concernant le signal "PIERRE" prononcé par un locuteur :

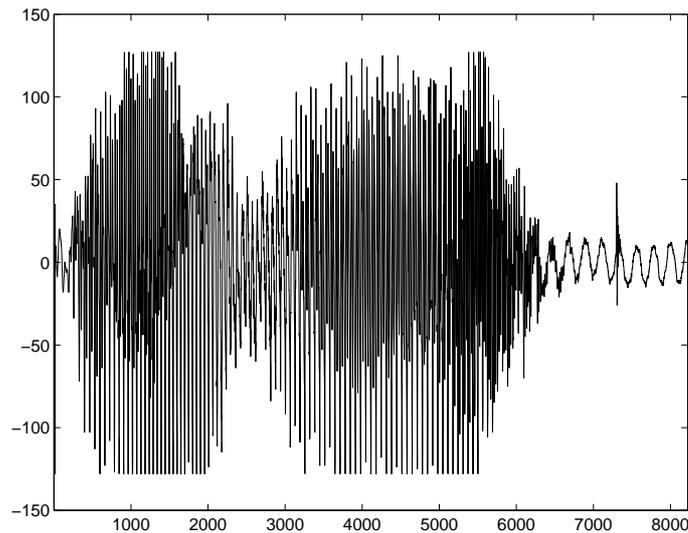


FIG. 18 – “PIERRE”

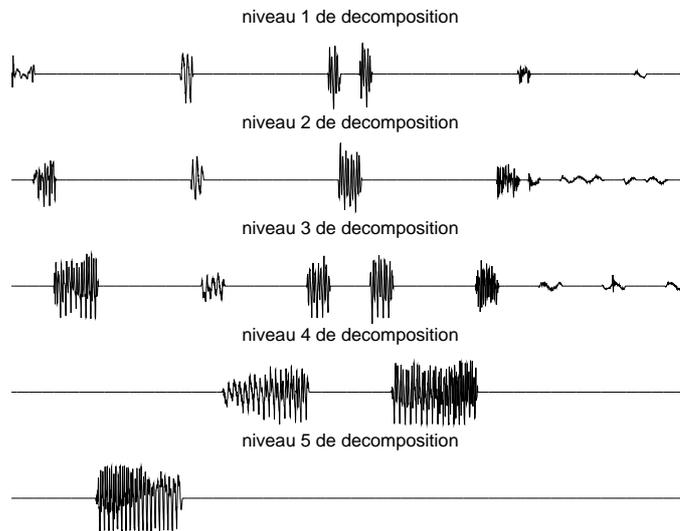


FIG. 19 – Décomposition de “PIERRE”

Pour conclure cet exposé, nous montrerons encore sur un exemple combien de choses restent à faire pour jeter un pont entre les mathématiques “théoriques” et la possibilité. Un principe mathématique, celui du prolongement analytique, nous assure qu’étant donné un signal de spectre borné, le fait de le connaître sur un intervalle temporel aussi petit soit-il suffit à le déterminer partout. C’est un challenge passionnant que de tenter de réaliser ce qui apparaîtrait comme un procédé d’extrapolation de l’information. L’analyse complexe, ou l’analyse hilbertienne, fournissent des outils pour tenter une telle approche. Restons en, puisque nous l’avons fait en grande partie tout au long de cet exposé, aux idées issues d’un mode de pensée géométrique. Si F_1 désigne le sous-espace des signaux à spectre dans $[-\Omega, \Omega]$ et F_2 celui des signaux de support dans $[-T, T]$ (le produit scalaire étant $\int s_1 \overline{s_2} dt$), on peut se représenter la situation schématiquement comme suit

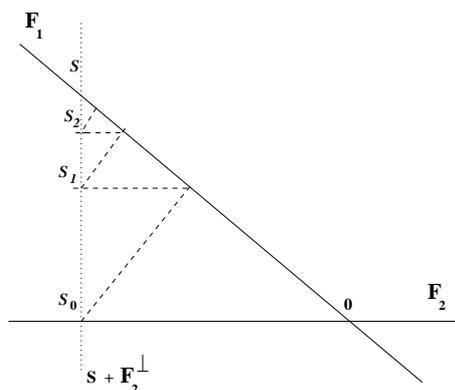


FIG. 20 – Projections alternées

et tenter de mettre cette idée en pratique. C'est par cette invitation que nous concluons cet exposé.

Références

- [1] K. Anant, F. Dowla, Wavelet transform methods for phase identification in three-component seismograms, University of California, Davis and Lawrence Livermore National Laboratory, *preprint* disponible a <http://www.llnl.gov/das/wavelet/revision.html>.
- [2] R. J. Gardner, P. McMullen, On Hammer's X-Ray Problem, *J. London Math. Soc.* (2), 21 (1980), 171–175.
- [3] A. Malliani, M. Pagani, F. Lombardi, S. Cerutti, Cardiovascular Neural Regulation Explored in the Frequency Domain, *Circulation*, 84 (2), 1991, pp. 482–492.
- [4] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, Wiley & Sons, 1986.
- [5] F. Rashid-Farrokhi, K. J. R. Liu, C. A. Berenstein, D. Walnut, Wavelet-based Multiresolution Local Tomography, *preprint* disponible sur <http://it.gmu.edu/dwalnut/pre/index.html>.
- [6] R. Vico, Metodi di analisi tempo-scala-frquenza applicati a segnale sismici, tesi di Laurea, Universita degli Studi della Calabria, 1997/1998.
- [7] A. Yger, *Analyse et Traitement du Signal, Cours et initiation pratique via MATLAB et SCILAB*, Collection Universités, Ellipses, 1999.