

Espaces de Hilbert et Analyse de Fourier
Licence de Mathématiques (Parcours Math. Fond)
2007-2011 : UE MHT613
2011-2014 : UE MA6012¹

Alain Yger

5 décembre 2013

1. Ces notes de cours correspondent à un enseignement dispensé à l'origine au Printemps 2008 dans le cadre de l'UE MHT613, dont l'UE MA6012 a pris la relève dans la nouvelle habilitation 2011-2015. Une liste d'exercices corrigés (en relation avec le chapitre 2 de ce polycopié) accompagnent le texte ; il s'agit d'exercices initialement proposés sur la plateforme **Ulysse** (transférée depuis septembre 2013 sur **Moodle**). Les guides d'activité illustrant ce cours seront dans le courant du semestre remis à disposition des étudiants sous **Moodle** au titre d'annales. Le contenu de l'UE MA6012 de l'habilitation 2011-2015 reprend pour l'essentiel le programme de l'ex-UE MHT613, comme celui de l'UE MA5012 reprenait celui de l'ex-UE MHT512 de l'habilitation 2007-2011. Les annales de 2012-2013 accompagnent ce polycopié.

Table des matières

1	Espaces de Hilbert	1
1.1	Rappel : l'espace euclidien \mathbb{R}^n et l'espace hilbertien \mathbb{C}^n	1
1.2	Le saut de la dimension finie à la dimension infinie	7
1.3	Les notions d'espace de Hilbert (réel ou complexe)	9
1.3.1	Le cadre Hilbert	9
1.3.2	Un formulaire géométrique	9
1.4	Les exemples majeurs	12
1.4.1	Les exemples \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n	12
1.4.2	Les espaces $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ et $l_{\mathbb{C}}^2(I)$	13
1.4.3	Les espaces $L_{\mathbb{K}}^2(U, dx)$, U partie mesurable de \mathbb{R}^n , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}	15
1.4.4	Les espaces $L_{\mathbb{K}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$	18
1.5	Le théorème de projection orthogonale sur un convexe fermé	20
1.6	Systèmes orthonormés, « <i>frames</i> » ; exemples	24
1.7	Espaces de Hilbert séparables ; notion de base hilbertienne	31
1.8	Le cas des espaces de Hilbert non séparables	33
1.9	Exemples de bases hilbertiennes dans le cas séparable	35
1.9.1	Densité des classes de fonctions polynômiales dans $L_{\mathbb{K}}^2(U, dx)$ pour U mesurable borné	35
1.9.2	Densité des classes de polynômes trigonométriques dans $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T}^n)$	36
1.9.3	A propos des polynômes de Hermite	39
1.10	Le théorème de dualité	39
1.10.1	Quelques préliminaires à propos des formes linéaires continues sur un Hilbert	40
1.10.2	L'énoncé du théorème de dualité	41
1.11	Opérateurs de H dans H ; notion d'adjoint	42
1.11.1	Préliminaires sur les opérateurs linéaires continus de H dans H	42
1.11.2	La notion d'opérateur adjoint	45
1.11.3	L'intérêt de la prise d'adjoint ; deux exemples pratiques	47
1.12	Un procédé algorithmique : le <i>matching</i>	54
2	L'analyse de Fourier et ses applications	57
2.1	Introduction	57
2.2	Transformation de Fourier dans le cadre discret	58
2.2.1	La transformation de Fourier discrète	58
2.2.2	La transformée de Fourier sur $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$	64
2.2.3	La transformée de Fourier sur $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$	67
2.3	Transformation de Fourier sur les espaces de fonctions 2π -périodiques	70
2.3.1	La transformation de Fourier sur $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T})$	71
2.3.2	La transformation de Fourier sur $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{T})$	73

2.3.3	Les théorèmes de Dirichlet et de Fejér	79
2.4	La transformation de Fourier des classes de fonctions intégrables sur \mathbb{R}^n	86
2.4.1	Définition, exemples, et premières propriétés	87
2.4.2	La relation avec l'optique	93
2.4.3	Fourier et la convolution dans $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, dx)$	94
2.4.4	La formule d'inversion dans le cadre L^1	95
2.4.5	L'inversion locale et la formule sommatoire de Poisson	99
2.5	La transformation de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$	103
2.5.1	Une isométrie de \mathcal{G} dans lui-même (pour la norme L^2)	103
2.5.2	Extension à $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ et formule de Plancherel	104
2.5.3	Fourier <i>versus</i> la dérivation; le principe d'incertitude d'Heisenberg	106
2.5.4	Fonctions L^2 à spectre borné; le théorème de Shannon	110
2.6	L'outil Fourier couplé avec l'analyse hilbertienne; deux exemples	112
2.6.1	Un premier exemple; l'inversion de transformations intégrales et le CAT-Scanner	112
2.6.2	Un second exemple : l'extrapolation des signaux de spectre borné	115

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

1.1 Rappel : l'espace euclidien \mathbb{R}^n et l'espace hilbertien \mathbb{C}^n

Le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie \mathbb{R}^n est le prototype d'un *espace euclidien* dans lequel on peut envisager la géométrie fondée sur le théorème de Pythagore. L'espace \mathbb{R}^n peut être en effet équipé de la forme quadratique définie positive¹

$$x \mapsto \|x\|^2 := \sum_{j=1}^n x_j^2$$

dérivant du produit scalaire canonique

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

où (x_1, \dots, x_n) (*resp.* (y_1, \dots, y_n)) désignent les coordonnées de x (*resp.* y) dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

Le \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie \mathbb{C}^n est, lui, le prototype d'un *espace hilbertien*² dans lequel on peut envisager également la géométrie fondée sur le théorème de Pythagore. L'espace \mathbb{C}^n peut être en effet lui aussi équipé de la forme hermitienne

$$z \mapsto \|z\|^2 := \sum_{j=1}^n |z_j|^2$$

définie positive³ dérivant de la forme sesquilénaire canonique présentant la symétrie hermitienne $\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}$, à savoir le produit scalaire canonique

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j,$$

1. On rappelle (voir le cours d'Algèbre 2 au Semestre 3) que dire qu'une forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est *positive* signifie que $Q(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que dire qu'elle est *définie* signifie $Q(x) = 0 \iff x = 0$.

2. En référence au géomètre allemand David Hilbert, 1862-1943 ; on parle aussi, pour qualifier un tel espace, d'espace *hermitien*, en référence aux travaux du théoricien des nombres français Charles Hermite, 1822-1901, qui mania aussi l'outil « produit scalaire » dans le cadre complexe.

3. On rappelle (voir encore le cours d'Algèbre 2 en S3) que dire qu'une forme hermitienne $H : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est *positive* signifie que $H(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ et que dire qu'elle est *définie* signifie $H(z) = 0 \iff z = 0$.

où (z_1, \dots, z_n) (resp. (w_1, \dots, w_n)) désignent les coordonnées de z (resp. w) dans la base canonique de \mathbb{C}^n . Ce produit scalaire est linéaire en le premier bloc de variables (z) , antilinéaire en le second (w) , ce qui est précisément la définition de la propriété de *sesquilinearité*.

Ces deux espaces (\mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n) peuvent être équipés de la topologie associée à la métrique euclidienne (resp. hermitienne) définie dans le cas de \mathbb{R}^n par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

(resp. dans le cas de \mathbb{C}^n par $d(z, w) = \|z - w\|$). Munis respectivement de cette topologie d'espace métrique, ces deux espaces \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n sont des espaces métriques complets : toute suite de Cauchy (relativement à la métrique) est convergente⁴.

Les deux résultats majeurs inhérents au cadre de l'espace euclidien \mathbb{R}^n sont :

- le théorème de Pythagore : si x et y sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n ,

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\langle x, y \rangle$$

(en particulier $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si $x \perp y$, l'orthogonalité \perp étant ici entendue au sens du produit scalaire canonique) ;

- l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si x et y sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n ,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si x et y sont \mathbb{R} -colinéaires.

Ces deux résultats majeurs se transposent ainsi dans le cadre de l'espace hilbertien \mathbb{C}^n :

- le théorème de Pythagore devient : si z et w sont deux vecteurs de \mathbb{C}^n ,

$$\|z \pm w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2 \pm 2\operatorname{Re}\langle z, w \rangle$$

(en particulier $\|z \pm w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$ si et seulement si $z \perp w$, l'orthogonalité étant encore ici entendue au sens du produit scalaire canonique) ;

- l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient : si z et w sont deux vecteurs de \mathbb{C}^n ,

$$|\langle z, w \rangle| \leq \|z\| \times \|w\|,$$

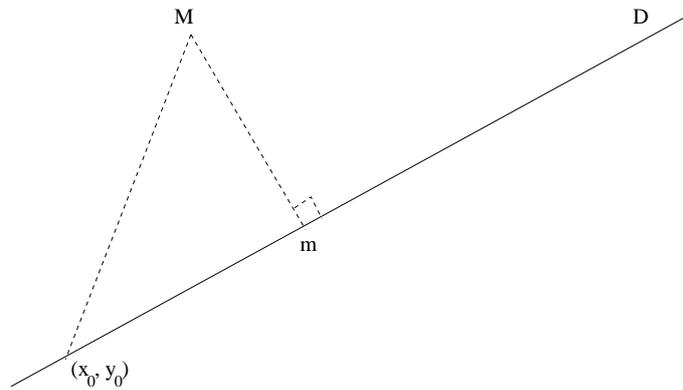
l'égalité ayant lieu si et seulement si z et w sont \mathbb{C} -colinéaires.

Nous reviendrons dans la section suivante (dans un cadre élargi) sur ces deux propriétés (et d'autres) qui ne font intervenir que les notions algébriques liées à la définition d'une norme dérivant d'un produit scalaire.

On connaît⁵ l'intérêt (dans le cadre tant de \mathbb{R}^n que de \mathbb{C}^n) des outils que représentent le « produit scalaire », le théorème de Pythagore et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ces outils permettent, par exemple dans le contexte euclidien de \mathbb{R}^n , de réaliser l'opération suivante : étant donné un \mathbb{R} -sous-espace affine D de \mathbb{R}^n (de sous-espace vectoriel sous-jacent F), on peut définir un *opérateur de projection orthogonale sur D* , schéma que le petit diagramme bien commode ci-dessous (figure 1.1) soutend (ici lorsque D est une droite du plan \mathbb{R}^2) :

4. D'ailleurs, le choix de la métrique, pourvu que celle-ci dérive d'une norme, est irrelevant puisqu'en dimension finie on sait que deux normes sont toujours équivalentes.

5. Voir le cours d'algèbre de L2 (UE Algèbre 2).

FIGURE 1.1 – La projection orthogonale sur une droite D de \mathbb{R}^2 passant par (x_0, y_0)

On a utilisé ici le modèle de \mathbb{R}^2 pour faire un dessin, mais l'on aurait pu tout aussi bien reproduire ce schéma dans le cadre abstrait. Si

$$D = M_0 + F,$$

où F (sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n sous-jacent à D) est un sous-espace vectoriel de dimension k engendré par v_1, \dots, v_k et que (v_1, \dots, v_n) est une base orthonormée de \mathbb{R}^n pour le produit scalaire canonique, la projection orthogonale sur le sous-espace affine D

$$M \mapsto \text{Proj}_D(M)$$

est l'application qui à M associe le point

$$M_0 + \xi_1 v_1 + \dots + \xi_k v_k,$$

où $(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_0 M}$ dans la base orthonormée (v_1, \dots, v_n) . Cette opération de prise de « projection orthogonale » sur un sous-espace affine D est à la base d'une démarche capitale en mathématiques appliquées, la *méthode des moindres carrés* : étant donnée une liste de contraintes dans \mathbb{R}^n matérialisée par un jeu d'équations affines

$$\begin{aligned} a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}y_1 + \dots + a_{m,n}y_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où les $a_{j,k}$ et les b_j , $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$ sont des scalaires réels, on peut calculer, étant donné un état $x = (x_1, \dots, x_n)$ donné dans \mathbb{R}^n , l'unique point

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$$

le plus proche de x dans \mathbb{R}^n (pour la distance euclidienne) qui satisfasse au jeu de contraintes (1.1). Ce point répond donc à la double exigence :

- d'une part \tilde{x} satisfait les contraintes (1.1) ;
- d'autre part $\|x - \tilde{x}\|$ est le minimum des nombres $\|x - y\|$, pris pour tous les y satisfaisant les contraintes (1.1).

Ce point \tilde{x} est exactement la projection orthogonale $\text{Proj}_D(x)$ de x sur le \mathbb{R} -sous-espace affine D (de dimension au moins $n - m$ car il y a m contraintes, certaines pouvant éventuellement être redondantes) défini par les équations affines (1.1). Le même raisonnement vaut dans le cadre complexe et cette méthode des moindres carrés dont nous serons souvent appelés à parler dans ce cours est l'illustration même de la force du théorème de Pythagore.

Les mêmes idées se transposent au cadre de l'espace hermitien \mathbb{C}^n .

L'un des algorithmes majeurs soutenant l'algorithme hilbertienne reste l'algorithme de Gram-Schmidt permettant de « redresser » un système libre (de rang fini k) en un système orthonormé (de même rang), en particulier (lorsque l'espace est de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) une base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ en une base orthonormée (*i.e.* telle que $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_j^k$ pour $1 \leq j, k \leq n$).

Rappelons ici la syntaxe de cet algorithme (dont nous reparlerons plus tard). Partons d'un système libre $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ de vecteurs du \mathbb{K} -espace vectoriel équipé d'un produit scalaire (que nous noterons H).

1. On transforme le vecteur \vec{v}_1 en le normalisant : $\vec{v}_1 / \|\vec{v}_1\| \leftarrow \vec{v}_1$; c'est ce « nouveau \vec{v}_1 » que l'on décide d'appeler \vec{e}_1 .
2. On projette orthogonalement le second vecteur \vec{v}_2 du système libre sur la droite vectorielle engendré par \vec{v}_1 (qui est aussi d'ailleurs, notons le, la droite vectorielle engendré par \vec{e}_1) ; cette projection orthogonale est donnée par :

$$\text{Proj}_{\mathbb{K}\vec{v}_1}(\vec{v}_2) = \langle v_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1$$

et se calcule donc aisément dès que \vec{e}_1 a été calculé ; on remplace ensuite \vec{v}_2 ainsi :

$$\vec{v}_2 \leftarrow \frac{\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1}{\|\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1\|} ;$$

c'est ce « nouveau \vec{v}_2 » que l'on décide d'appeler \vec{e}_2 .

3. On projette orthogonalement le troisième vecteur \vec{v}_3 du système libre sur le plan vectoriel engendré par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 (qui est aussi d'ailleurs, notons le, le plan vectoriel engendré par \vec{e}_1 et \vec{e}_2) ; cette projection orthogonale est donnée par :

$$\text{Proj}_{\mathbb{K}\vec{v}_1 \oplus \mathbb{K}\vec{v}_2}(\vec{v}_3) = \langle v_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{v}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2$$

et se calcule donc aisément dès que \vec{e}_1 et \vec{e}_2 ont été calculés ; on remplace ensuite \vec{v}_3 ainsi :

$$\vec{v}_3 \leftarrow \frac{\vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2}{\|\vec{v}_3 - \langle v_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2\|} ;$$

c'est ce « nouveau \vec{v}_3 » que l'on décide d'appeler \vec{e}_3 .

4. On poursuit la construction sur ce principe jusqu'à substitution complète des k vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ du système libre donné par les k vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ qui, eux, forment un système orthonormé, avec de plus, pour chaque $l = 1, \dots, k$:

$$\text{Vec}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l) = \text{Vec}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_l).$$

Si $D = M_0 + F$, M_0 étant un point de \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) de coordonnées $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$ et que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension k dont on connaît une base (non nécessairement orthonormée), notée $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$, chercher la projection orthogonale sur $D = M_0 + F$ d'un point $M \in \mathbb{K}^n$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) revient à chercher l'unique vecteur $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de \mathbb{K}^k tel que

$$\left(x - x_0 - \sum_{l=1}^k \lambda_l \vec{v}_l\right) \perp \vec{v}_j \quad j = 1, \dots, k.$$

Si l'on introduit la matrice réelle symétrique dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (*resp.* hermitienne dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$$G = \text{Gram}[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k] := A \cdot {}^t \bar{A} = [\langle \vec{v}_j, \vec{v}_l \rangle]_{1 \leq j, l \leq k},$$

où A est la matrice à k lignes et n colonnes dont les lignes sont les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ représentés en ligne (on appelle cette matrice G la *matrice de Gram* des k vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$), on constate que G est inversible (du fait que les \vec{v}_k forment un système libre dans \mathbb{K}^n) et que le vecteur $\vec{\lambda}$ cherché s'obtient par

$$\lambda = \left(\text{Gram}[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k]\right)^{-1} \cdot (x - x_0)$$

(les vecteurs étant ici figurés en colonne). On a donc

$$\text{Proj}_D[M] = M_0 + \left(\text{Gram}[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k]\right)^{-1} \cdot (x - x_0)$$

si x et x_0 figurent (en colonne) respectivement la liste des coordonnées de M et de M_0 dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

La matrice de Gram joue donc, tant dans l'algorithme de Gram-Schmidt que dans la recherche directe de la projection orthogonale d'un point sur un sous-espace affine pour lequel on dispose d'un point M_0 et d'une base du sous-espace vectoriel associé, un rôle majeur. Il faut aussi noter, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que, si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont k vecteurs de \mathbb{R}^n linéairement indépendants, le volume k -dimensionnel du paralléloétope que $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ définissent dans le sous-espace de \mathbb{R}^n que ces vecteurs engendrent est donné par :

$$\text{vol}_k \left(\left\{ \sum_{l=1}^k t_l \vec{v}_l ; 0 \leq t_1, \dots, t_k \leq 1 \right\} \right) = \sqrt{\det [\text{Gram}[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k]]}.$$

On constate ainsi, si les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont indépendants, mais proches d'être colinéaires, la matrice de Gram $\text{Gram}[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k]$ se trouve avoir un déterminant très petit, ce qui implique un mauvais conditionnement et une grande instabilité dans les calculs numériques qui président à l'orthonormalisation de Gram-Schmidt ou à la recherche d'une projection orthogonale sur un sous-espace affine du type $M_0 + F$.

Ce sont ces idées qui soutendent par exemple des démarches algorithmiques telles par exemple celle qu'illustrent les deux exemples suivants :

Exemple 1.1. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n (ou de \mathbb{C}^n) tels que $F_1 \cap F_2^\perp = \{0\}$ et s un élément inconnu du sous-espace F_1 ; si l'on connaît la projection orthogonale s_0 de s sur F_2 , la démarche algorithmique « en zig-zag », basée sur l'utilisation d'un jeu de projections

orthogonales itérées (alternativement sur F_1 et sur le sous-espace affine $s_0 + F_2^\perp$) conduit à une approximation de l'élément inconnu s (voir la figure 1.2 ci-dessous)⁶.

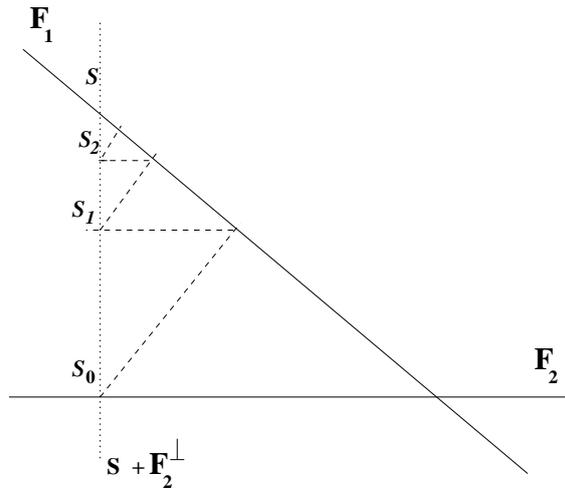


FIGURE 1.2 – Itération de projections (exemple 1.1)

Exemple 1.2. Soient D_1, \dots, D_N N sous-espaces affines de \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) s'intersectant en un unique point A . Le mécanisme qui consiste à partir d'un point M quelconque de l'espace et (comme sur la figure 1.3 ci-dessous) à projeter ce point orthogonalement sur F_1 , puis à projeter le point obtenu orthogonalement sur F_2 , etc., jusqu'à épuisement de toute la liste de sous-espaces, puis à recommencer, conduit (*via* une démarche « en escargot ») à une approximation du point A ⁷.

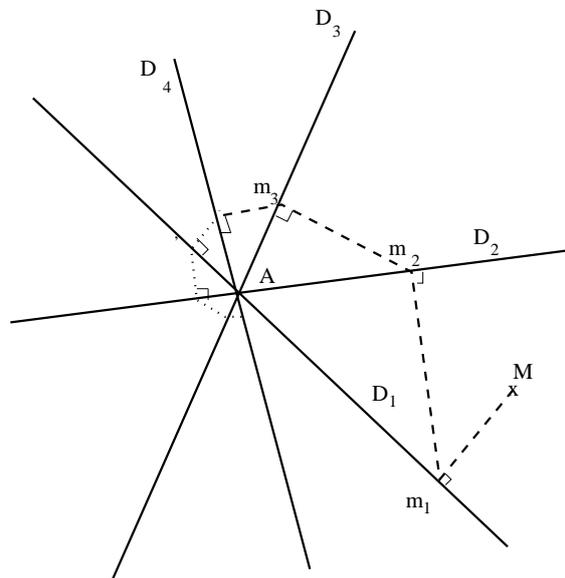


FIGURE 1.3 – Itération de projections (exemple 1.2)

6. Nous reviendrons sur la preuve de ce résultat dans un contexte beaucoup plus général plus tard dans le cours.

7. Ceci sera établi dans un contexte beaucoup plus général plus loin dans le cours.

1.2 Le saut de la dimension finie à la dimension infinie

Autant le théorème de Pythagore et l'inégalité de Cauchy-Schwarz ne relevaient que des propriétés algébriques (seul le fait que la forme soit définie positive s'avère important pour assurer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la clause d'égalité dans cette inégalité), autant la démarche de recherche de projection orthogonale sur un sous-espace utilise (mais de manière détournée) le fait que (\mathbb{R}^n, d) et (\mathbb{C}^n, d) sont des espaces complets. Le cadre de la dimension finie est un peu trompeur car on se rend pas compte de ce phénomène !

Pour se convaincre de cela, plaçons nous dans le cadre plus troublant d'un espace de fonctions (de dimension cette fois infinie). Le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, peut lui aussi être équipé d'un produit scalaire, à savoir

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t) dt. \quad (1.2)$$

On retrouvera beaucoup ce produit scalaire par la suite ; il a une interprétation physique car on peut le relier à la notion d'énergie (l'énergie est toujours, pensez par exemple à l'énergie cinétique $E = mv^2/2$, une expression dépendant de manière non linéaire mais quadratique des phénomènes physiques qui la soutendent, ici en l'occurrence la vitesse v). Dans ce \mathbb{R} -espace vectoriel E , on peut considérer le sous-espace affine

$$D := \left\{ f \in E, \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt = 1 \right\}.$$

Si E est équipé de la topologie (d'espace métrique) associée à la distance

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

correspondant à la topologie de la convergence uniforme sur $[0, 1]$, on constate immédiatement que D est bien un sous-ensemble fermé de E . Equipé de cette distance d_∞ , E est d'ailleurs un espace métrique complet. Il faut noter cependant que d_∞ n'est pas une distance associée à une norme dérivant d'un produit scalaire. La distance d_∞ ne nous intéresse donc pas autant que la distance euclidienne

$$d(f, g) = \|f - g\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt},$$

métrique dérivant associée au produit scalaire (1.2) pour laquelle on dispose certes du théorème de Pythagore, mais pour laquelle, malheureusement, E n'est plus un \mathbb{R} -espace vectoriel complet (ni d'ailleurs D un sous-espace affine fermé).

On peut naturellement se demander malgré tout s'il est concevable de définir un opérateur de projection orthogonale sur D . Il n'en est rien. En effet, on montre en exercice (voir le paragraphe ci-dessous) qu'il ne saurait exister aucun élément $f_0 \in D$ en lequel la fonction

$$f \in D \mapsto \|f\|_2^2 := \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

atteigne son minimum sur D ; comme l'existence d'une telle fonction f_0 équivaut au fait que 0 admette une « projection orthogonale » sur D (il existe un point de D réalisant la distance euclidienne d entre 0 et D), la non existence dans D d'un tel f_0 rend donc bien compte du fait qu'il s'avère impossible de « projeter orthogonalement » l'origine 0 sur D .

Exercice 1.1. Montrons que f_0 (élément de D tel que $\|f_0\|_2$ soit minimal) ne peut exister. Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2[\\ 0 & \text{si } t = 1/2 \\ -1 & \text{si } t \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

Même si

$$\int_0^{1/2} h(t) dt - \int_{1/2}^1 h(t) dt = 1,$$

la fonction h n'est pas dans D (ce n'est en effet pas une fonction continue!); néanmoins, on peut l'approcher (au sens de la distance d) par la suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 3}$, où

$$h_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{n-1} & \text{si } t \in [0, 1/2 - 1/n[\\ \frac{n}{n-1} \times (n(1/2 - t)) & \text{si } t \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n] \\ -\frac{n}{n-1} & \text{si } t \in]1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

qui, elle, on le vérifie aisément, est une suite d'éléments de D . Si f_0 existait, on aurait donc certainement

$$\|f_0\|_2^2 \leq \|h_n\|_2^2 \quad \forall n \geq 3,$$

et, par conséquent, en prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (et en utilisant par exemple le théorème de convergence dominée)

$$\|f_0\|_2^2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n\|_2^2 = \|h\|_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

On remarque que le trinôme

$$\lambda \longmapsto \int_0^1 (f_0(t) + \lambda h(t))^2 dt = \lambda^2 \|h\|^2 + 2\lambda \int_0^1 f_0(t)h(t) dt + \|f_0\|_2^2 = \lambda^2 + 2\lambda + \|f_0\|_2^2$$

a pour discriminant réduit $1 - \|f_0\|_2^2 \geq 0$, donc admet au moins une racine réelle λ_0 ; ceci montre que

$$\int_0^1 (f_0(t) + \lambda_0 h(t))^2 dt = 0,$$

d'où l'on déduirait $f_0 \equiv -\lambda_0 h$ dt -presque partout sur $[0, 1]$, ce qui est impossible car f_0 est continue tandis que $-\lambda_0 h$ ne l'est pas! On conclut donc (par l'absurde) à l'impossibilité de l'existence de f_0 , élément de D réalisant la distance (au sens de la métrique euclidienne d) de l'origine à D .

Ce qui manque ici au \mathbb{R} -espace vectoriel E pour que l'on puisse pleinement profiter (comme dans le cas de \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n) des atouts de l'algorithmique pythagoricienne est simplement le fait que E équipé de la métrique d n'est pas un espace métrique complet!

La leçon que nous retenons de l'exemple proposé dans ce paragraphe (exemple sortant du cadre de la dimension finie) est qu'il faut prendre garde (lorsque l'on sort du cadre des \mathbb{R} ou \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie tels \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n) à coupler le modèle algébrique avec des contraintes relevant de l'analyse (en l'occurrence la complétude pour la distance euclidienne du \mathbb{R} ou \mathbb{C} -espace vectoriel sur lequel on travaille) si l'on espère profiter pleinement des outils que met à notre disposition l'introduction sur un \mathbb{R} ou \mathbb{C} -espace vectoriel, d'un produit scalaire (Pythagore, Cauchy-Schwarz, possibilité de projeter orthogonalement sur un sous-espace fermé, etc.).

1.3 Les notions d'espace de Hilbert (réel ou complexe)

1.3.1 Le cadre Hilbert

La section 1.1 nous guide vers les deux définitions suivantes, situant le cadre de travail dans lequel on entend mettre en pratique les idées inspirées du maniement de l'orthogonalité dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n :

Définition 1.1 *Un espace de Hilbert réel est un \mathbb{R} -espace vectoriel, couplé avec la donnée d'un produit scalaire*

$$(h_1, h_2) \in H \times H \longmapsto \langle h_1, h_2 \rangle \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire une application bilinéaire à valeurs réelles

- *symétrique, c'est-à-dire telle que $\langle h_1, h_2 \rangle = \langle h_2, h_1 \rangle$ pour tous h_1, h_2 dans H ;*
- *telle que $\langle h, h \rangle \geq 0$ pour tout $h \in H$ (clause de positivité) ;*
- *telle que $\langle h, h \rangle = 0$ si et seulement si $h = 0$ (clause de « définition »).*

De plus, on exige que l'espace vectoriel normé $(H, \|\cdot\|)$, où

$$\|h\| := \sqrt{\langle h, h \rangle}$$

soit un espace normé complet (c'est-à-dire un espace de Banach⁸).

Définition 1.2 *Un espace de Hilbert complexe est un \mathbb{C} -espace vectoriel, couplé avec la donnée d'un produit scalaire*

$$(h_1, h_2) \in H \times H \longmapsto \langle h_1, h_2 \rangle \in \mathbb{C},$$

c'est-à-dire une application sesquilinéaire⁹ à valeurs complexes

- *présentant la symétrie hermitienne, c'est-à-dire : $\langle h_1, h_2 \rangle = \overline{\langle h_2, h_1 \rangle}$ pour tout h_1, h_2 dans H ;*
- *telle que $\langle h, h \rangle \geq 0$ pour tout $h \in H$ (clause de positivité) ;*
- *telle que $\langle h, h \rangle = 0$ si et seulement si $h = 0$ (clause de « définition »).*

De plus, on exige que l'espace vectoriel normé $(H, \|\cdot\|)$, où

$$\|h\| := \sqrt{\langle h, h \rangle}$$

soit un espace normé complet (c'est-à-dire un espace de Banach).

1.3.2 Un formulaire géométrique

En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire dans le cas réel, la sesquilinearité et la symétrie hermitienne du produit scalaire dans le cas complexe, on voit que l'on a l'identité importante

$$\|h_1 + h_2\|^2 + \|h_1 - h_2\|^2 = 2(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2) \quad \forall h_1, h_2 \in H \quad (1.3)$$

8. En référence au mathématicien polonais Stefan Banach (1892-1945) qui explora toutes les facettes et tout l'intérêt de ce concept, un *espace de Banach* est par définition un \mathbb{R} ou \mathbb{C} -espace vectoriel normé où toute suite de Cauchy (au sens de la norme) est convergente.

9. Ceci signifie \mathbb{C} -linéaire en h_1 , \mathbb{C} -antilinéaire en h_2 .

(dite *loi du parallélogramme*¹⁰) et, suivant que l'on est dans le cas réel ou dans le cas complexe, soit

$$\|h_1 + h_2\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + 2\langle h_1, h_2 \rangle \quad \forall h_1, h_2 \in H, \quad (1.4)$$

soit

$$\|h_1 + h_2\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle h_1, h_2 \rangle \quad \forall h_1, h_2 \in H; \quad (1.5)$$

les identités (1.4) et (1.5) sont dites *identités de Pythagore*. La loi du parallélogramme induit la *formule de la médiane* :

$$\left\| h_0 - \frac{h_1 + h_2}{2} \right\|^2 + \frac{\|h_1 - h_2\|^2}{4} = \frac{(\|h_0 - h_1\|^2 + \|h_0 - h_2\|^2)}{2} \quad \forall h_0, h_1, h_2 \in H; \quad (1.6)$$

il suffit pour le voir d'appliquer (1.3) en remplaçant h_j par $(h_0 - h_j)/2$, $j = 1, 2$. La positivité du produit scalaire implique dans le cas réel, si h_1 et h_2 sont deux éléments de H , que la fonction trinôme

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \langle h_1 + \lambda h_2, h_1 + \lambda h_2 \rangle = \lambda^2 \|h_2\|^2 + 2\lambda \langle h_1, h_2 \rangle + \|h_1\|^2 \quad (1.7)$$

est positive ou nulle sur \mathbb{R} , dans le cas complexe que la fonction trinôme complexe

$$\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \langle h_1 + \lambda h_2, h_1 + \lambda h_2 \rangle = |\lambda|^2 \|h_2\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle h_1, h_2 \rangle) + \|h_1\|^2 \quad (1.8)$$

prend ses valeurs dans $[0, \infty[$. Ceci implique dans le cas réel que le discriminant du trinôme (1.7) est négatif, d'où l'inégalité

$$|\langle h_1, h_2 \rangle| \leq \|h_1\| \times \|h_2\| \quad \forall h_1, h_2 \in H, \quad (1.9)$$

dite de Cauchy-Schwarz¹¹. En spécifiant $\lambda = te^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dans (1.8) et en faisant varier α , on constate, dans le cas complexe, que l'on a la même inégalité de Cauchy-Schwarz (1.9). Il est important de noter que cette inégalité (1.9) est stricte dès que h_1 et h_2 ne sont pas colinéaires. Si h_1 et h_2 sont colinéaires, l'inégalité (1.9) devient une égalité.

Dans un espace de Hilbert, on peut définir, non pas l'angle de deux vecteurs non nuls, mais au moins leur cosinus, ce de la manière suivante :

$$\cos(\text{angle}(h_1, h_2)) := \frac{\operatorname{Re} \langle h_1, h_2 \rangle}{\|h_1\| \|h_2\|}.$$

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de H , on peut définir le cosinus de l'angle entre F_1 et F_2 en posant

$$\cos(\text{angle}(F_1, F_2)) := \sup_{h_1 \in F_1 \setminus \{0\}, h_2 \in F_2 \setminus \{0\}} \frac{|\langle h_1, h_2 \rangle|}{\|h_1\| \|h_2\|} \in [0, 1]$$

(à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Rappelons, pour mémoire, les trois manières équivalentes de caractériser la complétude d'un \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) espace vectoriel normé $(H, \|\cdot\|)$:

10. Ainsi dénotée car elle s'appuie sur la figure du parallélogramme construit à partir des deux vecteurs h_1 et h_2 (on fera un petit dessin pour s'en convaincre).

11. Les noms de l'analyste français Augustin Cauchy (1789-1857) et du géomètre allemand Hermann Schwarz (1843-1921) sont attachés à cette inégalité, que dans l'ex culture soviétique, on connaît sous la terminologie d'inégalité de Cauchy-Bunyakovsky.

- toute suite de Cauchy (pour la métrique $d(x, y) : \|x - y\|$) est convergente ;
- si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de sous ensembles fermés de H dont le diamètre (au sens de la distance d) tend vers 0, l'intersection de tous les A_k est non vide et réduite à un singleton ;
- toute série $(\sum_n h_n)$, $h_n \in H$, telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|h_n\| < \infty$, converge dans H .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la donnée d'un \mathbb{K} -espace vectoriel H équipé d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ constitue ce que l'on appelle la donnée d'un \mathbb{K} -espace *préhilbertien*. Dans un tel cadre, théorème de Pythagore ((1.4), (1.5)), inégalité de Cauchy-Schwarz (cas d'égalité inclus) (1.9), formules du parallélogramme (1.3) et de la médiane (1.6), restent valables. Ne manque au tableau (pour que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ soit un \mathbb{K} -espace de Hilbert) que le fait que $(H, \| \cdot \|)$ (la norme ici étant celle dérivant du produit scalaire) soit un \mathbb{K} -espace vectoriel complet.

Le fait qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel H équipé d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ne soit qu'un \mathbb{K} -espace préhilbertien (au lieu d'être un \mathbb{K} -espace de Hilbert) ne constitue pas un si sérieux handicap que cela. En effet, il est possible d'exhiber un \mathbb{K} -espace de Hilbert \tilde{H} , équipé d'un produit scalaire $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ (on note $||| \cdot |||$ la norme associée), et une application

$$\text{inj} : H \rightarrow \tilde{H}$$

telle que :

- d'une part l'application inj est semi-linéaire, c'est-à-dire vérifie

$$\forall h_1, h_2 \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{inj}(h_1 + \lambda h_2) = \text{inj}(h_1) + \bar{\lambda} \text{inj}(h_2) ;$$

- d'autre part $\text{inj}(H)$ est un \mathbb{K} -sous-espace vectoriel dense dans le \mathbb{K} -espace de Hilbert \tilde{H} équipé de son produit scalaire $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$;
- d'autre part enfin

$$\forall h \in H, |||\text{inj}(h)||| = \|h\|,$$

ce qui implique d'après la semi-linéarité de inj et le théorème de Pythagore que inj préserve aussi le produit scalaire de cette manière, *i.e.* :

$$\forall h_1, h_2 \in H, \langle \langle \text{inj}(h_1), \text{inj}(h_2) \rangle \rangle = \langle h_2, h_1 \rangle.$$

Pour construire inj et le \mathbb{K} -espace de Hilbert \tilde{H} (avec son produit scalaire), voici comment l'on procède : on considère l'application inj de H dans le \mathbb{K} -espace des \mathbb{K} -formes linéaires continues sur H (que l'on appelle aussi le *dual topologique* de H et que l'on note pour l'instant $H_{||}^*$ pour le différentiel du dual algébrique, H étant équipé de la norme $\| \cdot \|$),

$$\text{inj} : h \longmapsto \left(v \in H \mapsto \langle v, h \rangle \right) \in H_{||}^*.$$

Cette application est bien semi-linéaire et injective. Le \mathbb{K} -espace vectoriel $H_{||}^*$ peut être équipé de la norme

$$|||L||| = \sup_{\|v\|=1} |L(v)|.$$

Équipé de cette norme, $(H_{||}^*, ||| \cdot |||)$ est un \mathbb{K} -espace complet (à vérifier en exercice). On prend alors pour \tilde{H} l'adhérence de $\text{inj}(H)$ dans $H_{||}^*$. Du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on observe que

$$\forall h \in H, \|h\| = |||\text{inj}(h)|||.$$

Il ne reste plus qu'à observer que le produit scalaire défini sur $\text{inj}(H)$ par

$$\langle \langle \text{inj}(h_1), \text{inj}(h_2) \rangle \rangle := \langle h_2, h_1 \rangle$$

se prolonge en un produit scalaire à \tilde{H} par :

$$\langle \langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \rangle \rangle := \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle h_{2,n}, h_{1,n} \rangle$$

lorsque $\tilde{h}_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{inj}(h_{1,n}))$ et $\tilde{h}_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{inj}(h_{2,n}))$, le résultat ne dépendant pas des suites d'approche.

Un tel \mathbb{K} -espace de Hilbert $(\tilde{H}, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ est dit *complété* de H . Si s'on dispose de deux complétés $(\tilde{H}_1, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_1)$ et $(\tilde{H}_2, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_2)$ d'un même \mathbb{K} -espace préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on montre facilement (suivant les mêmes idées que ci-dessus) qu'il existe une isométrie \mathbb{K} -linéaire entre eux. C'est en ce sens que le complété d'un \mathbb{K} -espace préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ peut être qualifié d'unique et que l'on peut parler du complété d'un \mathbb{K} -espace préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donné.

Remarque 1.0. La réalisation (abstraite et générale) du complété d'un préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ décrite ci-dessus n'est bien souvent pas celle que l'on utilise dans la pratique. Bien souvent en effet, on dispose d'autres outils pour exhiber un complété explicite de manière plus directe. Par exemple, si $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} et que H est le préhilbertien $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{C} équipé du produit scalaire (dont la norme associée est la racine carrée de l'énergie en physique) :

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{[a,b]} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

on sait bien depuis le cours d'intégration¹² qu'une réalisation du complété de H est le \mathbb{C} -espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}([a, b], dt)$.

1.4 Les exemples majeurs

1.4.1 Les exemples \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n

Le premier exemple d'espace de Hilbert réel est bien sûr \mathbb{R}^n , équipé de son produit scalaire canonique (voir la section 1.1). Le premier exemple d'espace de Hilbert complexe est \mathbb{C}^n , équipé de son produit scalaire canonique (voir aussi la section 1.1).

On peut penser ces deux espaces comme des espaces de fonctions, puisque l'on peut identifier le vecteur x avec la fonction X de $\{1, \dots, n\}$ dans \mathbb{R} (*resp.* \mathbb{C}) qui à l'entier k associe le scalaire $X(k) = x_k$ (k -ème coordonnée de x dans la base canonique). Une telle fonction est un *signal digital réel* (*resp.* complexe).

Si n_1 et n_2 sont deux entiers strictement positifs, l'espace des matrices réelles (*resp.* complexes) I de type $n_1 \times n_2$, équipé du produit scalaire

$$\langle I_1, I_2 \rangle := \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} I_1(k_1, k_2) I_2(k_1, k_2)$$

dans le cas réel ou

$$\sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} I_1(k_1, k_2) \overline{I_2(k_1, k_2)}$$

12. Voir la section 4.7 dans <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf>

dans le cas complexe est un espace de Hilbert (ce n'est qu'une autre présentation de $\mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ou $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ comme un espace de matrices); un élément de cet espace est une *image digitale* (réelle ou complexe suivant le contexte), de type (n_1, n_2) . Chaque point marqué $I(k_1, k_2)$ d'un tableau $[I(k_1, k_2)]_{1 \leq k_j \leq n_j}$ représente l'intensité ou encore la *brillance* (mesurée avec une unité convenue) à ce que l'on conviendra d'appeler le *pixel* (k_1, k_2) .

On peut aussi imaginer des espaces de tableaux de tableaux : une image couleur par exemple se code dans le système RGB¹³ comme un tableau $n_1 \times n_2$ de vecteurs (r, g, b) d'entiers entre 0 et 255 (il s'agit du point de vue informatique d'un codage sur 8 bits pour chaque entrée, d'où la raison pour $256 = 2^8$). Si l'on oublie les contraintes informatiques de codage et que l'on interprète (r, g, b) comme des réels, on constate que la configuration est bien toujours du type \mathbb{R}^n , avec $n = 3n_1n_2$, mais que la présentation est cette fois différente.

Le produit scalaire entre deux vecteurs de \mathbb{R}^n (ou de \mathbb{C}^n), vecteurs que l'on peut considérer comme des informations digitales de longueur n , est aussi appelé *corrélation* de ces deux informations; si x et y ont même norme, plus $\langle x, y \rangle$ est grand, plus les informations sont dites *corrélées* entre elles. Le carré de la norme euclidienne d'un tel vecteur x de \mathbb{R}^n ou z de \mathbb{C}^n est dit *énergie* du signal digital x (ou z).

1.4.2 Les espaces $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ et $l_{\mathbb{C}}^2(I)$

Si I est un ensemble d'indices (abstrait), on peut considérer dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^I = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions de I dans \mathbb{R} le sous-espace $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ constitué des éléments $(x_\iota)_{\iota \in I}$ tels que

$$\sup_{\{J \subset I; \#J < \infty\}} \left(\sum_{\iota \in J} |x_\iota|^2 \right) := \|(x_\iota)_{\iota \in I}\|^2 < \infty.$$

On constate alors (en utilisant la définition de la borne supérieure et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}) que si $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et $(y_\iota)_{\iota \in I}$ sont deux éléments de $l_{\mathbb{R}}^2(I)$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie finie $J(\epsilon) \subset I$ telle que pour toute partie finie K de I d'intersection vide avec $J(\epsilon)$, on ait

$$\left| \sum_{\iota \in K} x_\iota y_\iota \right| \leq \sqrt{\sum_{\iota \in K} |x_\iota|^2} \sqrt{\sum_{\iota \in K} |y_\iota|^2} < \epsilon. \quad (1.10)$$

Soient donc $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et $(y_\iota)_{\iota \in I}$ deux éléments du \mathbb{R} -espace vectoriel $l_{\mathbb{R}}^2(I)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons C_n l'adhérence dans \mathbb{R} de l'ensemble des nombres

$$\sum_{\iota \in J} x_\iota y_\iota,$$

où J est une partie finie de I contenant $J(1) \cup J(1/2) \cup \dots \cup J(1/n)$. A cause de (1.10) avec $\epsilon = 1/n$ (pour toute partie finie K de I ne rencontrant pas $\bigcup_{k=1}^n J(1/k)$), on constate que le diamètre de C_n (pour la distance associée à la valeur absolue sur \mathbb{R}) tend vers 0. Comme \mathbb{R} est complet, l'intersection des fermés C_n est non vide et réduite à un singleton; on définit ainsi le nombre réel (comme étant précisément ce singleton)

$$\sum_{\iota \in I} x_\iota y_\iota$$

13. « Red-Green-Blue ».

et on montre que le nombre réel ainsi défini est l'unique nombre réel S caractérisé par la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie finie $\tilde{J}(\epsilon)$ telle pour toute partie finie J de I contenant $\tilde{J}(\epsilon)$,

$$\left| S - \sum_{\iota \in J} x_\iota y_\iota \right| < \epsilon.$$

Ceci nous amène naturellement à la notion de *famille sommable* de nombres réels ou complexes.

Définition 1.3 Une famille (u_ι) de nombres réels ou complexes indexée par un ensemble d'indices I est dite *sommable* et de somme S si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie finie $\tilde{J}(\epsilon)$ telle que pour toute partie finie J de I contenant $\tilde{J}(\epsilon)$,

$$\left| S - \sum_{\iota \in J} u_\iota \right| < \epsilon.$$

Ici la famille $(x_\iota y_\iota)_{\iota \in I}$ est sommable dès que $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et $(y_\iota)_{\iota \in I}$ sont deux éléments de $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ et l'on définit un produit scalaire sur $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ en posant précisément :

$$\left\langle (x_\iota)_{\iota \in I}, (y_\iota)_{\iota \in I} \right\rangle := \sum_{\iota} x_\iota y_\iota.$$

Proposition 1.1 Le \mathbb{R} -espace vectoriel $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ équipé du produit scalaire

$$\left\langle (x_\iota)_{\iota \in I}, (y_\iota)_{\iota \in I} \right\rangle := \sum_{\iota} x_\iota y_\iota.$$

est un espace de Hilbert.

Preuve. Si $\left((x_\iota^{(n)})_{\iota \in I} \right)_n$ est une suite de Cauchy dans $l_{\mathbb{R}}^2(I)$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon), \forall p, q \geq N(\epsilon), \sup_{\{J \subset I; \#J < \infty\}} \left(\sum_{\iota \in J} |x_\iota^{(p)} - x_\iota^{(q)}|^2 \right) < \epsilon. \quad (1.11)$$

Pour chaque ι dans I , la suite de scalaires $(x_\iota^{(n)})_n$ est donc de Cauchy, donc convergente dans \mathbb{R} puisque \mathbb{R} est complet vers une limite $x_\iota^{(\infty)}$. En « gelant » $p \geq N(\epsilon)$ et en faisant courir q vers l'infini dans (1.11), on constate que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon), \forall p \geq N(\epsilon), \sup_{\{J \subset I; \#J < \infty\}} \left(\sum_{\iota \in J} |x_\iota^{(p)} - x_\iota^{(\infty)}|^2 \right) < \epsilon.$$

Il résulte de cela que $(x_\iota^{(\infty)})_{\iota \in I}$ est bien un élément de $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ et que cet élément est la limite dans $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ (lorsque n tend vers $+\infty$ et pour la norme $\| \cdot \|$) de la suite $\left((x_\iota^{(n)})_{\iota \in I} \right)_n$. La complétude de $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ pour la norme $\| \cdot \|$ est donc assurée. \diamond

Toujours à partir du même ensemble d'indices I , on peut considérer dans le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}^I = \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ des fonctions de I dans \mathbb{C} le sous-espace $l_{\mathbb{C}}^2(I)$ constitué des éléments $(z_\iota)_{\iota \in I}$ tels que

$$\sup_{\{J \subset I; \#J < \infty\}} \left(\sum_{\iota \in J} |z_\iota|^2 \right) := \|(z_\iota)_{\iota \in I}\|^2 < \infty.$$

Exactement comme dans le cadre réel (toujours en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on constate que si $(z_\iota)_{\iota \in I}$ et $(w_\iota)_{\iota \in I}$ sont deux éléments de $l_{\mathbb{C}}^2(I)$, la famille $(z_\iota \bar{w}_\iota)_{\iota \in I}$ est sommable dans \mathbb{C} . On définit donc un produit scalaire dans $l_{\mathbb{C}}^2(I)$ en posant

$$\langle (z_\iota)_{\iota \in I}, (w_\iota)_{\iota \in I} \rangle := \sum_{\iota} z_\iota \bar{w}_\iota.$$

La proposition suivante se prouve exactement comme la proposition 1.1 (mais en utilisant la complétude de \mathbb{C} cette fois).

Proposition 1.2 *Le \mathbb{C} -espace vectoriel $l_{\mathbb{C}}^2(I)$ équipé du produit scalaire*

$$\langle (z_\iota)_{\iota \in I}, (w_\iota)_{\iota \in I} \rangle := \sum_{\iota} z_\iota \bar{w}_\iota.$$

est un espace de Hilbert.

Les deux espaces de Hilbert $l_{\mathbb{R}}^2(I)$ (dans le cadre réel) et $l_{\mathbb{C}}^2(I)$ (dans le cadre complexe) seront, on le verra plus tard, des modèles pour tout espace de Hilbert réel (dans ce cas le modèle est $l_{\mathbb{R}}^2(I)$) ou complexe (auquel cas le modèle est $l_{\mathbb{C}}^2(I)$). Seront plus intéressants pour nous les modèles correspondant au cas où I est dénombrable¹⁴. Les cas $I = \mathbb{Z}$ ou $I = \mathbb{N}$ seront des cas d'exemples de Hilbert très importants au niveau des applications.

De fait, toute cette présentation des espaces de Hilbert $l_{\mathbb{K}}^2(I)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) pouvait rentrer dans le cadre plus général des \mathbb{K} -espaces $L_{\mathbb{K}}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ qui sera évoqué plus loin : on prend ici $\Omega = I$, pour \mathcal{T} la tribu de toutes les parties, et pour μ la mesure de décompte ($\mu(A) = \text{card}(A)$ si A est finie, $\mu(A) = +\infty$ sinon). La définition du produit scalaire comme somme d'une famille sommable (Définition 1.3) et la complétude de l'espace préhilbertien ainsi obtenu (Propositions 1.1 et 1.2) se déduisent aussi de la théorie de l'intégration telle qu'elle a été développée dans le cours de l'UE MA5012 (*cf.* le photocopié en ligne). On utilise en particulier pour ce qui est de la complétude le théorème de Riesz-Fischer¹⁵.

1.4.3 Les espaces $L_{\mathbb{K}}^2(U, dx)$, U partie mesurable de \mathbb{R}^n , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Soit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la tribu de Lebesgue sur \mathbb{R}^n (plus petite tribu contenant la tribu borélienne et tous les ensembles de mesure de Lebesgue nulle)¹⁶.

Si U est un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^n (par exemple un sous-ensemble ouvert, un sous-ensemble fermé, \mathbb{R}^n tout entier,...), l'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)|_U, dx)$ des fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables (relativement à la tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ restreinte à U) telles que

$$\int_U |f(x)|^2 dx < \infty$$

14. Remarquons toutefois que si $(x_\iota)_\iota \in l_{\mathbb{R}}^2(I)$, l'ensemble $\{\iota \in I; |x_\iota| \geq 1/p\}$ (pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé) est fini, de cardinal au plus $p^2 \|(x_\iota)_{\iota \in I}\|^2$; ceci montre que l'ensemble des indices ι tels que $x_\iota \neq 0$ est forcément au plus fini ou dénombrable. Ceci vaut aussi pour un élément donné $(z_\iota)_{\iota \in I}$ de $l_{\mathbb{C}}^2(I)$: l'ensemble des indices ι tels que $z_\iota \neq 0$ est au plus fini ou dénombrable.

15. Théorème 4.1 dans <http://math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf>

16. On pourrait d'ailleurs tout aussi bien se contenter de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ à la place de la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$; l'avantage que présente la tribu de Lebesgue sur la tribu borélienne est la propriété de complétude (section 1.6 du cours de l'UE MA5012 de Théorie de l'Intégration (Semestre 5)).

(dx est ici la mesure de Lebesgue) peut être équipé d'une forme bilinéaire symétrique positive

$$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle := \int_U f(x)g(x) dx .$$

En effet, on sait (inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions mesurables) que

$$\int_U |f(x)g(x)| dx \leq \sqrt{\int_U f^2(x) dx} \sqrt{\int_U g^2(x) dx} < +\infty .$$

Cette forme bilinéaire symétrique positive sur le \mathbb{R} -espace vectoriel

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)|_U, dx)$$

est dite *forme bilinéaire d'énergie*; cette terminologie tient au fait que la quantité positive

$$\|f\|_2^2 := \int_U |f(x)|^2 dx$$

est (interprétée du point de vue physique) l'indicateur d'une énergie (l'énergie en physique repose, on l'a rappelé, sur une expression non pas linéaire, mais quadratique). Le \mathbb{R} -espace vectoriel quotient

$$L_{\mathbb{R}}^2(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)|_U, dx) := \frac{\mathcal{L}^2(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)|_U, dx)}{\mathcal{R}}$$

où \mathcal{R} est la relation d'équivalence

$$f \mathcal{R} g \iff f - g = 0 \text{ dx - presque partout sur } U , \quad (1.12)$$

est un \mathbb{R} -espace normé avec une norme quotient

$$\|\dot{f}\|_2 := \inf_{f \in \dot{f}} \|f\|_2$$

qui dérive d'un produit scalaire¹⁷, à savoir la forme bilinéaire symétrique

$$(\dot{f}, \dot{g}) \longmapsto \langle \dot{f}, \dot{g} \rangle := \int_U f(x)g(x) dx .$$

qui est en effet non seulement symétrique et positive, mais aussi définie (du fait du passage au quotient modulo la relation \mathcal{R} introduite en (1.12)). On a la proposition très importante, avatar de la théorie de l'intégration de Lebesgue :

Proposition 1.3 *Si U est un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^n , le \mathbb{R} -espace vectoriel*

$$L_{\mathbb{R}}^2(U, dx) ,$$

équipé du produit scalaire

$$(\dot{f}, \dot{g}) \longmapsto \langle \dot{f}, \dot{g} \rangle := \int_U f(x)g(x) dx ,$$

est un espace de Hilbert réel.

17. En fait, il s'agit là le l'espace de Minkowski $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ défini dans le cours de l'UE MA5012 de Théorie de l'Intégration (section 4.3) avec dans ce cas particulier ici $\Omega := U$, $\mathcal{T} := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)|_U$, $\mu := dx$ étant la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n restreinte à U .

Preuve. Voir le cours de théorie de l'intégration (UE MA5012) ; il s'agit là d'un cas particulier du théorème de Riesz-Fischer (théorème 4.1 du cours de MA5012)¹⁸. \diamond

L'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(U, dx) := \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)|_U, dx)$ des fonctions mesurables sur U , à valeurs complexes, telles que

$$\|f\|_2^2 := \int_U |f(x)|^2 dx < \infty$$

se traite de manière identique ; en quotientant par la relation d'équivalence \mathcal{R} , on obtient encore un espace $L_{\mathbb{C}}^2(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)|_U, dx)$ équipé d'un produit scalaire, qui n'est rien d'autre que le \mathbb{C} -espace normé $L_{\mathbb{C}}^2(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), dx)$ de Minkowski ($p = 2$) rencontré, lui aussi, dans la section 4.3 du cours d'intégration (MA5012).

Proposition 1.4 *Si U est un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^n , le \mathbb{C} -espace vectoriel*

$$L_{\mathbb{C}}^2(U, dx),$$

équipé du produit scalaire

$$(\dot{f}, \dot{g}) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_U f(x) \overline{g(x)} dx,$$

est un espace de Hilbert complexe.

Preuve. Voir le cours de théorie de l'intégration (UE MA5012, théorème 4.1 de Riesz-Fischer dans le cas $p = 2$). \diamond

Seront particulièrement intéressants pour nous les exemples correspondant au cas $U = \mathbb{R}^n$, espaces que nous noterons $L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{R}^n)$ (espace de Hilbert réel) et $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n)$ (espace de Hilbert complexe).

Le cas périodique

Seront intéressants aussi pour nous plus tard les espaces

$$L_{\mathbb{R}}^2\left(\frac{\mathbb{R}^n}{(2\pi\mathbb{Z})^n}\right) = L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{T}^n) \quad (\text{resp.} \quad L_{\mathbb{C}}^2\left(\frac{\mathbb{R}^n}{(2\pi\mathbb{Z})^n}\right) = L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}^n))$$

des classes de fonctions mesurables sur \mathbb{R}^n , à valeurs réelles (*resp.* complexes), qui sont périodiques de période 2π en chacune des variables réelles $\theta_1, \dots, \theta_n$, et telles que

$$\int_{[0, 2\pi]^n} |f(\theta)|^2 d\theta < \infty.$$

Le produit scalaire sur ces espaces est

$$(\dot{f}, \dot{g}) \mapsto \langle \dot{f}, \dot{g} \rangle_{\text{per}} := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} f(\theta) g(\theta) d\theta$$

18. C'est d'ailleurs dans ce cas particulier ($p = 2$) que ce théorème fut formulé en 1907 (et exploité dans le cadre de la théorie des séries de Fourier que nous retrouverons au chapitre 2) par le mathématicien hongrois Frigyes Riesz (1880-1956) et le mathématicien autrichien Ernst Fischer (1875-1954).

(dans le cas de $L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{T}^n)$) ou

$$(\dot{f}, \dot{g}) \longmapsto \langle \dot{f}, \dot{g} \rangle_{\text{per}} := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$$

(dans le cas de $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}^n)$); le premier est un espace de Hilbert réel, le second un espace de Hilbert complexe.

On verra plus loin dans le cours (chapitre 2) que c'est la transformation de Fourier :

$$\dot{f} \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}) \longmapsto \left(\frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

qui réalise précisément une isométrie (\mathbb{C} -linéaire) entre le \mathbb{C} -espace de Hilbert (dont la définition relève de l'intégration « intégration continue ») qu'est $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ et le \mathbb{C} -espace de Hilbert (dont la définition relève, elle, de l'intégration discrète) $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$; c'est la formule de Plancherel, incarnation ici du principe de conservation de l'énergie, qui assure ici que la transformation de Fourier en question soit une isométrie.

Le cas des espaces L^2 « à poids »

Si U est un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^n et ω une classe de fonctions mesurables sur U (modulo la relation \mathcal{R} introduite en (1.12)), admettant un représentant strictement positif (i.e $\omega > 0$ presque partout sur U au sens de Lebesgue) et que l'on appelle un « poids », on peut définir les espaces

$$L_{\mathbb{R}}^2(U, \omega dx) := \left\{ \dot{f}; f \text{ mesurable } U \rightarrow \mathbb{R}, \int_U |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty \right\}$$

et

$$L_{\mathbb{C}}^2(U, \omega dx) := \left\{ \dot{f}; f \text{ mesurable } U \rightarrow \mathbb{C}, \int_U |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty \right\}$$

(suivant que les classes de fonctions envisagées sont des classes de fonctions à valeurs réelles ou complexes). Ce sont des espaces de Hilbert, le produit scalaire étant défini par

$$\langle \dot{f}, \dot{g} \rangle := \int_U f(x) g(x) \omega(x) dx$$

(dans le cas réel) ou par

$$\langle \dot{f}, \dot{g} \rangle := \int_U f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx$$

(dans le cas complexe)¹⁹.

1.4.4 Les espaces $L_{\mathbb{K}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé (Ω est un ensemble d'« événements », \mathcal{T} une tribu sur Ω , P une distribution de probabilité sur \mathcal{T} ²⁰).

19. Il s'agit là encore des espaces de Minkowski $L_{\mathbb{K}}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ de la section 4.3 du cours de MA5012 (ici avec $p = 2$), où $\Omega := U$, $\mathcal{T} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\mu = \omega dx$ est la mesure à densité ω par rapport à la mesure de Lebesgue restreinte à U .

20. C'est-à-dire une mesure positive $P : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ telle que $P(\Omega) = 1$.

On peut considérer le \mathbb{R} espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ des variables aléatoires réelles sur l'espace probalilisé (Ω, \mathcal{T}, P) ²¹ ayant de plus un moment d'ordre 2 fini, c'est-à-dire telles que

$$\int_{\Omega} X(\omega)^2 dP = \text{Espérance}[X^2] < \infty ;$$

l'espace $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est obtenu en quotient l'espace $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ par la relation d'équivalence

$$X \sim Y \iff P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0. \quad (1.13)$$

Cet espace $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ peut être équipé du produit scalaire

$$(\dot{X}, \dot{Y}) \longmapsto E[XY] := \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega) dP ;$$

ce produit scalaire est intimement lié à la notion de *covariance* puisque par définition la *covariance* des deux variables aléatoires X et Y est définie par :

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &:= E[(X - EX)(Y - EY)] = E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

(la covariance entre X et X étant par définition la *variance* de X). On rappelle dans ce nouveau le résultat suivant, avatar du théorème de Riesz-Fischer (théorème 4.1 du cours de MA5012) :

Proposition 1.5 *Le \mathbb{R} -espace vectoriel $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, équipé du produit scalaire*

$$(\dot{X}, \dot{Y}) \longmapsto E[XY] := \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega) dP ,$$

est un espace de Hilbert réel.

Preuve. Voir le cours de théorie de l'intégration MA5012 (théorème 4.1). \diamond

On peut aussi envisager le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ des variables aléatoires X à valeurs complexes définies sur l'espace probalilisé (Ω, \mathcal{T}, P) et telles que

$$E[|X|^2] < \infty .$$

En quotientant cet espace par la relation d'équivalence \sim introduite en (1.13), on trouve un \mathbb{C} -espace $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ que l'on peut naturellement équiper du produit scalaire

$$(\dot{X}, \dot{Y}) \longmapsto E[X\bar{Y}] := \int_{\Omega} X(\omega)\bar{Y}(\omega) dP ;$$

on définit de même la covariance de X avec Y par

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(\overline{Y - E[Y]})] = E[X\bar{Y}] - E[X] \times \overline{E[Y]}$$

et la *variance* de X par

$$V(X) := \text{cov}(X, X) = E[|X - E[X]|^2] = E[|X|^2] - |E[X]|^2 .$$

21. Rappelons que ce sont les applications X de Ω dans \mathbb{R} telle que $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{T}$.

Proposition 1.6 *Le \mathbb{C} -espace vectoriel $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, équipé du produit scalaire*

$$(\dot{X}, \dot{Y}) \longmapsto E[X\bar{Y}] := \int_{\Omega} X(\omega)\overline{Y(\omega)} dP,$$

est un espace de Hilbert complexe.

Preuve. Voir le cours de théorie de l'intégration MA5012 (théorème 4.1 de Riesz-Fischer). \diamond

Signalons que si X est une variable aléatoire réelle représentant d'un élément de $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, la tribu \mathcal{T}_X engendrée par les ensembles $X^{-1}(B)$, où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, est une sous-tribu de la tribu \mathcal{T} ; c'est la tribu des évènements « dépendant de X ». On peut travailler cette fois sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}_X, P|_{\mathcal{T}_X})$ et introduire le \mathbb{R} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}_X, P|_{\mathcal{T}_X})$. Il existe une injection naturelle i_X (isométrie au niveau des normes) de $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}_X, P|_{\mathcal{T}_X})$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ qui consiste juste à associer à la classe de Y (Y étant considérée comme variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}_X, P|_{\mathcal{T}_X})$) la classe de Y (cette fois considérée comme variable aléatoire sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P)). Le \mathbb{R} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}_X, P|_{\mathcal{T}_X})$ est ainsi un exemple de sous-espace vectoriel fermé du \mathbb{R} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

La même remarque vaut pour le cas complexe. Si X est un représentant d'un élément \dot{X} de $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, le \mathbb{C} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}_X, P|_{\mathcal{T}_X})$ est ainsi un exemple particulier de sous-espace vectoriel fermé du \mathbb{C} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On profitera de cette configuration ultérieurement pour y faire entrer le mécanisme de projection orthogonale; ce sera la base de la définition du « conditionnement par la variable aléatoire X »²².

1.5 Le théorème de projection orthogonale sur un convexe fermé

Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe).

Définition 1.4 *Un sous ensemble C de H est dit convexe si et seulement si*

$$\forall h_1 \in C, \forall h_2 \in C, \forall t \in [0, 1], (1-t)h_1 + th_2 \in C.$$

L'ensemble C est dit strictement convexe si et seulement si

$$\forall h_1 \in C, \forall h_2 \in C, \forall t \in]0, 1[, (1-t)h_1 + th_2 \in \text{intérieur}(C).$$

Voici le premier théorème majeur concernant la géométrie « à la Pythagore » dans un espace de Hilbert; c'est ce résultat fondamental qui soutend toutes les figures inspirées du concept d'orthogonalité et qui plus tard nous servira de guide et d'auxiliaire constant dans les preuves ou les constructions algorithmiques que nous serons amenés à faire dans un espace de Hilbert (réel ou complexe), telles celles proposées dans les exemples 1.1 et 1.2 évoqués dans la section 1.1.

²². Voir aussi l'UE M1MA6M11 (Probabilités).

Théorème 1.1 Soit C un sous ensemble fermé, convexe et non vide d'un espace de Hilbert H réel ou complexe (la norme étant notée $\| \cdot \|$). Soit h un élément de H . Il existe un et un seul élément $a = \text{Proj}_C(h)$ (dit projection orthogonale de h sur C), tel que

$$\|h - a\| = \min_{x \in C} \|h - x\|. \quad (1.14)$$

Cet élément $a = \text{Proj}_C(h)$ est caractérisé par le jeu d'inégalités

$$\forall x \in C, \langle h - a, x - a \rangle \leq 0 \quad (1.15)$$

dans le cas réel et par le jeu d'inégalités

$$\forall x \in C, \text{Re} \langle h - a, x - a \rangle \leq 0 \quad (1.16)$$

dans le cas complexe.

Remarque 1.1. Les jeux d'inégalités (1.15) ou (1.16) s'interprètent géométriquement et de manière intuitive en disant que pour tout x de C , les vecteurs $x - a$ et $h - a$ font un angle « obtus ». On se souvient en effet d'avoir (dans la sous-section 1.3.2) défini le cosinus de l'angle de deux vecteurs h_1 et h_2

$$\cos(\text{angle}(h_1, h_2)) := \frac{\text{Re} \langle h_1, h_2 \rangle}{\|h_1\| \|h_2\|}.$$

Les conditions (1.15) et (1.16) se lisent donc

$$\forall x \in C, \cos(\text{angle}(h - a, x - a)) \leq 0.$$

Preuve. Soit d la distance de h à C ; $d = \inf_{x \in C} \|x - h\| > 0$ puisque C est fermé. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de C telle que $d^2 \leq \|h - x_n\|^2 \leq d^2 + 1/n$ (une telle suite existe du fait de la définition de la borne inférieure). En utilisant la formule de la médiane (1.6), il vient

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{N}^*, \|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|h - x_n\|^2 + \|h - x_m\|^2) - 4 \left\| h - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \\ &\leq 4d^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{m^2} - 4 \left\| h - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \\ &\leq \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \end{aligned}$$

du fait que $(x_n + x_m)/2$ est dans C (C est convexe) et que par conséquent

$$d = d(h, C) \leq d\left(h, \frac{x_n + x_m}{2}\right).$$

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite de Cauchy qui converge dans H (puisque H est complet), ce vers un point de C puisque C est fermé. L'élément $a = \lim_n x_n$ vérifie (1.14). Un tel a s'avère unique puisque la formule de la médiane (1.6) implique aussi, si l'on dispose de deux candidats a_1 et a_2 pour (1.14)

$$\|a_1 - a_2\|^2 + 4 \left\| h - \frac{a_1 + a_2}{2} \right\|^2 = 4d^2 \geq 4d^2 + \|a_1 - a_2\|^2$$

puisque $\|h - a_1\|^2 = \|h - a_2\|^2 = d^2$ et que $(a_1 + a_2)/2 \in C$. Le premier volet de la proposition est acquis. Voyons maintenant ce qui concerne (1.15) (ou (1.16)). Pour

simplifier, nous nous placerons dans le cas complexe (c'est le plus général). Si a réalise la distance de h à C , on a

$$\forall t \in [0, 1], \forall x \in C, \|h - a(1 - t) - tx\|^2 = \|h - a - t(x - a)\|^2 \geq \|h - a\|^2 \quad (1.17)$$

(puisque C est convexe et que $ta + (1 - t)x$ est dans C quand x est dans C). Ceci donne en développant

$$\forall t \in [0, 1], t^2\|x - a\|^2 - 2t\operatorname{Re} \langle h - a, x - a \rangle \geq 0, \quad (1.18)$$

et donc, après division par t ,

$$\forall t \in]0, 1], t\|x - a\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle h - a, x - a \rangle \geq 0$$

ce qui prouve (en faisant tendre t vers 0) que (1.16) est remplie si a vérifie (1.14). La réciproque est immédiate : si (1.16) est remplie, alors on a (1.18) et par conséquent (1.17) pour tout $x \in C$. En prenant $t = 1$, on a $\|h - x\|^2 \geq \|h - a\|^2$ pour tout x dans C , ce qui montre que a réalise bien la distance de z à C . La preuve du théorème est achevée. \diamond

Remarque 1.2. Quand $C = F$ est un sous espace fermé de H , on peut écrire les conditions (1.15) ou (1.16) (suivant le cas, réel ou complexe) sous la forme

$$\langle h - a, x \rangle = 0 \quad \forall x \in F, \quad (1.19)$$

ce que l'on traduit en disant que $h - a$ est orthogonal à F (en abrégé $h - a \in F^\perp$).

La remarque 1.2 ci-dessus nous amène naturellement à la définition suivante :

Définition 1.5 *Etant donné un sous espace F d'un espace de Hilbert H , on appelle orthogonal de F et on note F^\perp le sous espace vectoriel (nécessairement fermé cette fois) défini comme*

$$F^\perp := \{h \in H; \forall x \in F, \langle x, h \rangle = 0\}.$$

Si F est un sous-espace fermé, la projection orthogonale $\operatorname{Proj}_F(h)$ de h sur F est par définition l'unique point a de F tel que $h - a \in F^\perp$.

Il est aussi très important d'étudier dans un Hilbert le comportement de la suite des projections d'un point sur des convexes fermés C_1, \dots, C_n, \dots de H . Voici un résultat lorsque les suites de convexes fermés $(C_n)_n$ sont des suites de fermés emboîtés.

Proposition 1.7 *Soit $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ une suite de sous ensembles non vides, convexes et fermés dans un espace de Hilbert H . On note P_1, \dots, P_n, \dots , les projections orthogonales sur les convexes respectifs $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$*

1. Si $C_{k+1} \subset C_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et si

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = C_\infty \neq \emptyset,$$

alors C_∞ est aussi un sous ensemble convexe fermé de H et, pour tout $h \in H$, la suite $(a_k)_k$, où

$$a_k := P_k(h), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

converge vers $P_\infty(z) = \operatorname{Proj}_{C_\infty}(h)$.

2. Si $C_k \subset C_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$C_{[\infty]} := \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k},$$

alors $C_{[\infty]}$ est aussi un sous ensemble convexe fermé de H et, pour tout $h \in H$, la suite $(a_k)_{k \geq 1}$, où

$$a_k = P_k(h), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

converge vers $P_{[\infty]}(z) = \text{Proj}_{C_{[\infty]}}(h)$.

Preuve.

Preuve du point 1. Que C_{∞} soit aussi un sous ensemble convexe fermé est immédiat (faire l'exercice, une intersection de convexes est convexe). On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|h - a_k\|^2 \leq \|h - a_{k+1}\|^2 \leq \|h - P_{\infty}(h)\|^2$$

puisque $C_{\infty} \subset C_{k+1} \subset C_k$. La suite $(\|h - a_k\|^2)_{k \geq 1}$ est donc une suite croissante majorée convergent vers un nombre $d > 0$. La formule de la médiane (1.6) nous assure, comme dans la preuve du théorème 1.1, que la suite a_k est de Cauchy dans H pour la distance associée à la norme hilbertienne ; elle converge donc vers un point a_{∞} de H (nécessairement dans C_{∞}). Mais on peut vérifier que pour tout $u \in C_{\infty}$,

$$\text{Re} \langle h - a_{\infty}, u - a_{\infty} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Re} \langle h - a_k, u - a_k \rangle \leq 0$$

car $u \in C_k$ pour tout k ; mais, d'après le théorème 1.1, la clause ci-dessus est remplie si et seulement si $a_{\infty} = P_{\infty}(h)$.

Preuve du point 2. Que $C_{[\infty]}$ est un sous ensemble convexe fermé est immédiat (faire l'exercice, une union croissante de convexes est convexe). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a cette fois

$$\|h - a_k\|^2 \geq \|h - a_{k+1}\|^2$$

puisque $C_k \subset C_{k+1}$. La suite $(\|h - a_k\|^2)_{k \geq 1}$ (suite décroissante minorée par 0) converge vers un nombre $d \geq 0$. La formule de la médiane (1.6) nous assure encore, comme dans la preuve du théorème 1.1, que la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est de Cauchy ; elle converge donc vers un élément $a_{[\infty]}$ (appartenant nécessairement à $C_{[\infty]}$). Mais on peut vérifier à nouveau que, si $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $u \in C_k$,

$$\text{Re} \langle h - a_{\infty}, u - a_{\infty} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Re} \langle h - a_k, u - a_k \rangle \leq 0 ;$$

Cette propriété est satisfaite pour tout u dans

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} C_k,$$

donc pour tout u dans

$$\overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} C_k} = C_{[\infty]}.$$

Comme $C_{[\infty]}$ est convexe et fermé, $a_{[\infty]} = P_{[\infty]}(h)$ par définition de $P_{[\infty]}(h)$ (théorème 1.1). \diamond

1.6 Systèmes orthonormés, « frames » ; exemples

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (réel ou complexe). Il sera important (pour permettre la représentation des éléments de H de manière non redondante) de disposer de systèmes dits *orthonormés*.

Définition 1.6 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (réel ou complexe). Un système de vecteurs $(e_\iota)_{\iota \in I}$ indexé par un ensemble d'indices I est dit *orthonormé* si et seulement si, pour tout ι, ι' dans I ,

$$\langle e_\iota, e_{\iota'} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \iota = \iota' \\ 0 & \text{si } \iota \neq \iota' \end{cases}$$

Le système est dit *orthogonal* si les vecteurs e_ι sont tous non nuls et si $\langle e_\iota, e_{\iota'} \rangle = 0$ pour tout couple d'éléments distincts ι et ι' de l'ensemble d'indices I .

On remarque immédiatement qu'un système orthogonal est toujours libre (au sens algébrique), ce qui signifie que pour toute partie finie $J \subset I$, la famille $(e_\iota)_{\iota \in J}$ est libre.

Exemple 1.3. Un exemple qui sera pour nous fondamental sera celui emprunté au cadre des espaces de Hilbert $l^2_{\mathbb{R}}(I)$ ou $l^2_{\mathbb{C}}(I)$ (par exemple pour $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$ qui seront pour nous les deux cas importants ultérieurement). Dans ce cas, le système de vecteurs $(e_\iota)_{\iota \in I}$ définis par $e_\iota = (e_{\iota, \iota'})_{\iota' \in I}$, où

$$e_{\iota, \iota'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \iota' = \iota \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un système orthonormé, le produit scalaire étant, rappelons le, défini par

$$\langle (x_\iota)_{\iota \in I}, (y_\iota)_{\iota \in I} \rangle := \sum_{\iota \in I} x_\iota \bar{y}_\iota$$

(ici dans le cas complexe ; dans le cas réel, on ôte la conjugaison complexe).

La notion de système orthonormé étant une notion *idéale*, souvent difficile à réaliser dans la pratique (et on le verra, particulièrement instable, l'orthogonalité étant une propriété très fragile), on introduira aussi une notion plus « molle », mais souvent bien utile dans la pratique, celle de *frame*²³. C'est cette dernière notion qui nous permettra une représentation certes redondante (au contraire de la représentation dans un système orthonormé), mais stable (ce qui est important) des éléments de l'espace de Hilbert dans lequel on est amené à travailler.

Définition 1.7 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (réel ou complexe). Un système de vecteurs $(e_\iota)_{\iota \in I}$ indexé par un ensemble d'indices I est un « *frame* » si et seulement si il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que, pour toute partie finie J de I , pour toute collection de scalaires $(\lambda_\iota)_{\iota \in J}$,

$$C_1 \left(\sum_{\iota \in J} |\lambda_\iota|^2 \right) \leq \left\| \sum_{\iota \in J} \lambda_\iota e_\iota \right\|^2 \leq C_2 \left(\sum_{\iota \in J} |\lambda_\iota|^2 \right).$$

23. Difficile ici de donner une traduction française de cette terminologie anglo-saxonne ; le concept le plus proche est sans doute celui de « trame » ou de « bâti » (dans une structure).

Un système orthonormé est bien sûr un « frame ».

L'exemple de \mathbb{K}^N ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Le \mathbb{K} -espace \mathbb{K}^N , vu ici comme le \mathbb{K} -espace vectoriel des fonctions s de $\{1, \dots, N\}$ dans \mathbb{K} , équipé du produit scalaire usuel

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \sum_{j=1}^N s_1(j) \overline{s_2(j)}$$

(c'est donc l'exemple 1.3, avec $I = \{1, \dots, N\}$) admet un système orthonormé « canonique », correspondant à la base canonique de \mathbb{K}^N , à savoir le système $(e_k)_{1 \leq k \leq N}$ constitué des fonctions « pic » :

$$e_k : l \in \{1, \dots, N\} \mapsto e_k(l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais on peut préférer d'autres systèmes orthonormés, plus en relation avec la classe de signaux digitaux que l'on prétend décomposer pour les traiter. Tel est le cas de la base orthonormée constituée des signaux « oscillants » :

$$l \in \{1, \dots, N\} \mapsto \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{-(k-1)(l-1)/N}, \quad k = 1, \dots, N,$$

où $W_N := \exp(-2i\pi/N)$. Cette base orthonormée jouera un rôle capital en analyse de Fourier (voir la sous-section 2.2.1 au second chapitre).

Exemple 1.4. Soit $H = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ le \mathbb{C} -espace de Hilbert des classes de fonctions mesurables de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodiques, d'énergie finie sur $[0, 2\pi]$, équipé du produit scalaire (dit produit scalaire associé à l'énergie)

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta.$$

Les « harmoniques fondamentales de période 2π », c'est-à-dire les classes $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des fonctions

$$e_n : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \exp(in\theta) = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

forment un système orthonormé dans H . Ce système jouera plus tard un rôle essentiel dans l'analyse de Fourier des signaux périodiques de période 2π ²⁴.

Exemple 1.5. Soit $H = L^2_{\mathbb{C}}([-1, 1], dt)$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions mesurables de $[-1, 1]$ dans \mathbb{C} , équipé du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

On vérifie immédiatement que, pour tout entier positif n , la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{2^n n!} \sqrt{n + \frac{1}{2}} \times \frac{d^n}{dt^n} [(1 - t^2)^n] \tag{1.20}$$

est une fonction polynômiale L_n de degré exactement n et que le système $(\dot{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthonormé de l'espace de Hilbert H ²⁵. Le polynôme L_n est appelé n -ème polynôme de Legendre²⁶

24. Notons que 2π ne joue aucun rôle particulier ici et que bien sûr, on peut remplacer 2π par $T > 0$, le produit scalaire (sur le \mathbb{C} -espace des classes de fonctions mesurables T -périodiques de carré intégrable sur $[0, T]$) devenant

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$$

et les fonctions e_n les fonctions $e_{T,n}$:

$$e_{T,n} : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \exp(2i\pi n\theta/T) = \cos(2\pi n\theta/T) + i \sin(2\pi n\theta/T)$$

(ce sont les harmoniques fondamentales de période T).

25. Vérifier ce dernier point constitue un exercice classique de L2 souvent utilisé pour illustrer l'utilisation de la formule d'intégration par parties.

26. Adrien-Marie Legendre (1752-1833) introduit ces polynômes en 1782 dans son traité *Figure des planètes*.

et il est intéressant de constater que plus n augmente, plus le graphe de L_n sur $[-1, 1]$ présente des oscillations de plus en plus accentuées (au niveau de l'amplitude) lorsque l'on s'approche des bornes de l'intervalle $[-1, 1]$. Voici par exemple, sur la figure 1.4 ci-dessous, le graphe de L_{30} :

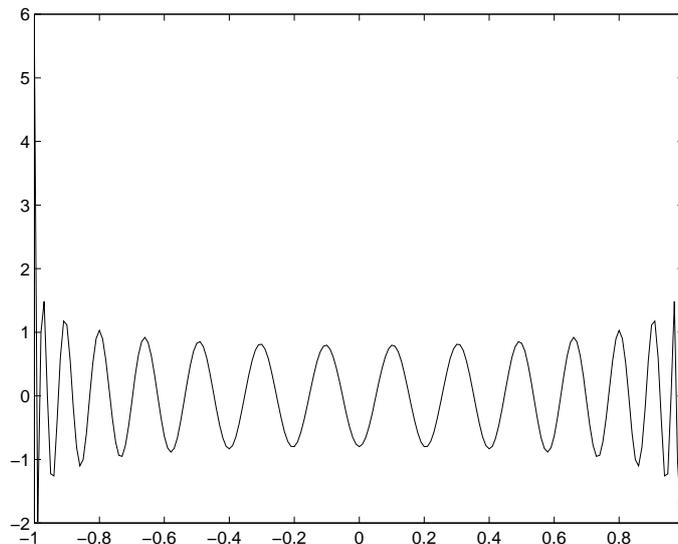


FIGURE 1.4 – Le graphe de la fonction polynômiale de Legendre L_{30} sur $[-1, 1]$

Ce constat sera important lorsque l'on sera amené à utiliser le système $(\dot{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à des fins pratiques (en relation en particulier avec les méthodes numériques d'intégration par quadrature proposées par Gauss). On retrouve (avec le souci causé par l'amplification des amplitudes des oscillations lorsque l'on s'approche du bord) un problème aussi présent dans l'interpolation de Lagrange faite sur un intervalle $[a, b]$ avec un pas de discrétisation régulier²⁷. Voir aussi l'exercice 8 du guide 1 dans le contrat sous Ulysse accompagnant le déroulement de cette UE.

Exemple 1.6. Considérons l'espace $L^2_{\mathbb{C}}([-1, 1], \omega(t) dt)$, où

$$\omega(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \forall t \in]-1, 1[.$$

Il s'agit, rappelons le, de l'espace de Hilbert des classes de fonctions \dot{f} mesurables (pour la mesure de Lebesgue) sur $[-1, 1]$, telles que

$$\int_{-1}^1 \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{1-t^2}} dt < +\infty,$$

équipé du produit scalaire

$$\langle \dot{f}, \dot{g} \rangle := \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

C'est un exercice immédiat que de constater que les classes des fonctions polynômiales $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{aligned} \Theta_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ \Theta_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos(t)), \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{1.21}$$

forment un système orthonormé de H (faire l'exercice en faisant le changement de variables $t = \cos u$ dans les intégrales). Cette fois, l'amplitude des oscillations des fonctions Θ_n n'augmente

²⁷. Pour ces questions relevant plus de l'analyse numérique, voir le polycopié du cours de l'UE N1MA3003, <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/CSSL.pdf>, chapitre 3.

plus (lorsque n croît) lorsque l'on s'approche des bords de $[-1, 1]$, mais par contre la fréquence de ces oscillations augmente très fortement au fur et à mesure que l'on s'approche du bord, ce qui, on s'en doute, posera des problèmes aigûs au niveau numérique si l'on entend utiliser ces fonctions polynômiales (dites fonctions polynômiales de Tchebychev²⁸) pour coder une classe de fonction mesurable sur $[-1, 1]$. Cependant, le fait que les oscillations se resserrent lorsque l'on se rapproche du bord, mais sans que les amplitudes cette fois ne s'amplifient, feront, en accord avec le Théorème d'approximation de Tchebychev en analyse numérique²⁹ de ce système orthonormé un système intéressant du point de vue de l'approximation de Lagrange, et, par exemple, des techniques d'intégration approchée par quadrature qui en résultent (section 5.2.2 dans le même cours d'Algorithmique numérique). Voici par exemple (sur la figure 1.5 ci-dessous) le graphe de Θ_{100} sur $[-1, 1]$:

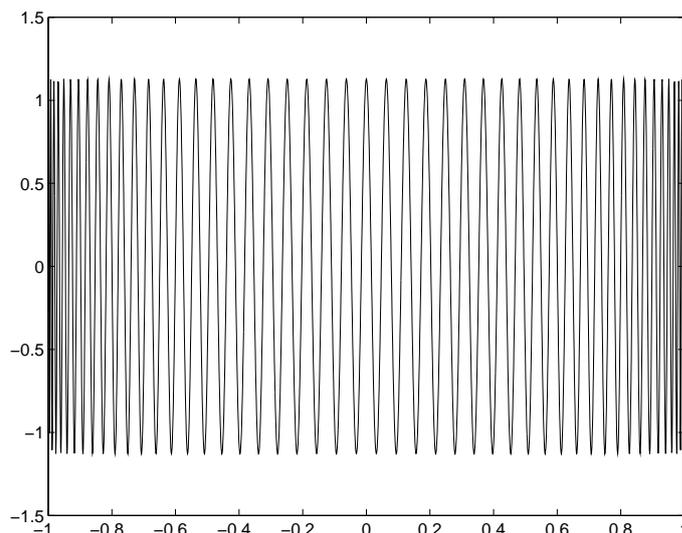


FIGURE 1.5 – Le graphe de la fonction polynômiale de Tchebychev Θ_{100} sur $[-1, 1]$

L'exercice 3 proposé dans le guide 3 du contrat sous Ulysse accompagnant ce cours complète aussi cette brève sensibilisation au rôle important tenu par le système orthonormé des polynômes de Tchebychev.

Exemple 1.7. Un autre exemple important (du point de vue de la physique) sera l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, e^{-t^2} dt)$ des classes de fonctions mesurables sur \mathbb{R} , à valeurs complexes, telles que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 e^{-t^2} dt < \infty,$$

équipé du produit scalaire

$$\langle \dot{f}, \dot{g} \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} e^{-t^2} dt.$$

Un système orthonormé de cet espace est le système des classes de fonctions polynômiales $(\dot{H}_n)_{n \geq 0}$ (H_n est une fonction polynômiale de degré exactement n , dite fonction polynômiale de Hermite) donné par

$$\begin{aligned} H_0(t) &:= \frac{1}{\pi^{1/4}} \\ H_n(t) &:= \frac{(-1)^n}{2^{n/2} \pi^{1/4} \sqrt{n!}} \times e^{t^2} \times \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t^2}], \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.22)$$

28. On adopte cette terminologie en l'honneur du probabiliste et statisticien russe Pafnouti Tchebychev (1821-1894).

29. Voir par exemple la section 4.2.3 dans le cours d'algorithmique numérique : <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht632.pdf>

L'importance de cet espace de Hilbert (et du système orthonormé de Hermite) tient au fait que la gaussienne $t \mapsto \exp(-t^2)$ sera amenée à jouer (on le verra) un rôle très important vis-à-vis du principe d'incertitude en physique ou dans les théorèmes limites du calcul des probabilités (le théorème « *limite central* » en particulier³⁰). Voir aussi les exercices 9 et 9bis du guide 1 dans le contrat sous Ulysse accompagnant le déroulement de cette UE.

On retrouvera plus loin une manière pratique de retrouver tous ces exemples à partir du système des fonctions monômes $t \mapsto t^n$, $n = 0, 1, \dots$, qui lui n'est pas orthonormé (dans l'espace de Hilbert de classes de fonctions d'une variable où l'on travaille). La construction se fera de proche en proche suivant le procédé d'orthonormalisation algébrique bien connu de Gram-Schmidt. Voici un autre exemple important :

Exemple 1.8. Dans l'espace $L^2_{\mathbb{R}}([a, b], dt)$, les classes de fonctions

$$t \in [a, b] \mapsto \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \left[\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{t-a}{b-a} \right], \quad n \in \mathbb{N},$$

forment un système orthonormé ; ce sont les *harmoniques locales* subordonnées à l'intervalle $[a, b]$. Ce système orthonormé (pensez que l'intervalle $[a, b]$ peut se dilater ou se contracter tel un accordéon) jouera un rôle primordial pour le codage de la parole ou de la musique.

Voici enfin, pour conclure cette galerie d'exemples, un exemple de *frame*.

Exemple 1.9 (un exemple de « frame »). Voici un exemple de « frame » important : considérons l'espace de Hilbert (réel) H des fonctions continues, affines par morceaux sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, avec « noeuds » aux points d'un maillage $\tau\mathbb{Z}$ ($\tau > 0$), telles que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty,$$

ce qui revient en fait à dire

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n\tau)|^2 < \infty,$$

équipé du produit scalaire

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt.$$

Pour simplifier, on prendra $\tau = 1$. Les fonctions triangle (ou « *splines* » dans la terminologie des mathématiques appliquées)

$$\Delta_n : t \mapsto \max(0, 1 - |t - n|), \quad n \in \mathbb{Z},$$

ne forment pas un système orthonormé de H , ni même orthogonal (le produit scalaire de Δ_n et Δ_{n+1} vaut $1/6$) ; par contre, le système $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est, on le verra plus loin, un *frame*. Ces fonctions (que l'on a représenté sur la figure 1.6 ci-dessous) forment un *frame* important car c'est souvent comme éléments de cet espace de Hilbert que sont représentés visuellement (sur un écran d'ordinateur) les signaux digitaux $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ éléments de l'espace de Hilbert $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$.

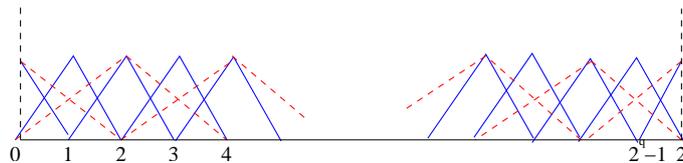


FIGURE 1.6 – Les éléments du *frame* $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $\tau = 1$ et $\tau = 2$

30. Voir l'UE M1MA6M11, ou l'UE N1MA6031 : <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/Proba6031.pdf>

Voir à propos de cet exemple 1.9 l'exercice 5 du guide 2 dans le contrat sous Ulysse accompagnant le déroulement de cette UE.

Supposons maintenant que l'espace de Hilbert ne soit pas de dimension finie et admette au moins un système orthonormé dénombrable. La proposition 1.7 induit la proposition facile (mais très importante) suivante :

Proposition 1.8 *Soit H un \mathbb{K} -espace de Hilbert (réel ou complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), la norme étant notée $\| \cdot \|$ et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un système orthonormé dénombrable de H . Soit V le sous-espace fermé de H défini comme l'adhérence (dans H) de l'ensemble constitué de toutes les combinaisons linéaires finies*

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k e_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}, \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

Alors

1. pour tout $h \in H$, on a l'inégalité suivante, dite de Bessel³¹ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, e_k \rangle|^2 \leq \|h\|^2; \quad (1.23)$$

2. pour tout $h \in H$, la série de terme général $\langle h, e_n \rangle e_n \in H$ est convergente (dans H) et l'on a

$$\text{Proj}_V(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle e_k; \quad (1.24)$$

3. si $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un élément de $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}^*)$, il existe un unique h_{λ} dans V tel que

$$\langle h_{\lambda}, e_k \rangle = \lambda_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*;$$

cet élément h_{λ} est la projection orthogonale sur V de tout autre vecteur h de H tel que

$$\langle h, e_k \rangle = \lambda_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. Pour prouver les points 1 et 2, on introduit la projection orthogonale $\text{Proj}_V(h)$ et on écrit, du fait du théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \|h - \text{Proj}_V(h) + \text{Proj}_V(h)\|^2 = \|h - \text{Proj}_V(h)\|^2 + \|\text{Proj}_V(h)\|^2 \\ &\geq \|\text{Proj}_V(h)\|^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si V_n désigne le sous-espace vectoriel (de dimension finie) engendré par e_1, \dots, e_n , le vecteur

$$\sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k$$

représente la projection orthogonale de h sur V_n . D'après le volet 2 de la proposition 1.7, la suite des projections orthogonales $\text{Proj}_{V_n}(h)$ converge vers la projection orthogonale sur le sous-espace fermé

$$V = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k}.$$

31. On l'attribue au mathématicien allemand Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846.

On a donc bien

$$\text{Proj}_V(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle e_k$$

et la formule (1.24) du point 2 est ainsi démontrée. En utilisant le théorème de Pythagore, on a

$$\|\text{Proj}_{V_n}(h)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle h, e_k \rangle|^2$$

puisque le système $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormé. On a donc, par continuité de la norme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |\langle h, e_k \rangle|^2 \right) = \|\text{Proj}_V(h)\|^2,$$

et en utilisant (1.25),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |\langle h, e_k \rangle|^2 \right) \leq \|h\|^2,$$

ce qui prouve l'inégalité de Bessel (1.23).

Reste à prouver le point 3. Si $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}^*)$, la suite

$$S_\lambda := \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l e_l \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

est de Cauchy dans H car, pour tout $p > n \geq 1$,

$$\left\| \sum_{l=1}^p \lambda_l e_l - \sum_{l=1}^n \lambda_l e_l \right\|^2 = \left\| \sum_{l=n+1}^p \lambda_l e_l \right\|^2 = \sum_{l=n+1}^p |\lambda_l|^2$$

en utilisant le théorème de Pythagore et le fait que le système $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormé. Cette suite S_λ converge donc (puisque H est complet) vers un élément h_λ de H ; en fait $h_\lambda \in V$ car le terme général $S_{\lambda,n}$ de la suite S_λ est dans V_n . On a bien, par continuité du produit scalaire

$$\langle h_\lambda, e_k \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{l=1}^n \lambda_l e_l, e_k \right\rangle = \lambda_k.$$

Si h est un autre élément de V tel que

$$\langle h_\lambda, e_k \rangle = \lambda_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

alors $h - h_\lambda$ est orthogonal à V , ce qui prouve que h_λ est bien la projection orthogonale de h sur V . Le point 3 est ainsi complètement démontré. \diamond

Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système libre dans un espace de Hilbert, il existe un processus algorithmique bien connu des algébristes pour construire à partir de v_1, v_2, \dots (pris dans cet ordre) un système orthonormé $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ce en faisant en sorte qu'à chaque cran n de l'algorithme, les sous-espaces vectoriels de dimension finie $\text{Vec}(v_1, \dots, v_n)$ et $\text{Vec}(e_1, \dots, e_n)$ coïncident.

Voici ce procédé (dit *d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*³²), décrit à l'étape n , en supposant que e_1, \dots, e_{n-1} ont été construits (après avoir démarré avec $e_1 = v_1/\|v_1\|$) : on calcule la projection orthogonale de v_n sur le sous-espace vectoriel V_{n-1} engendré par v_1, \dots, v_{n-1} (qui est aussi le sous-espace engendré par (e_1, \dots, e_{n-1})), cela pouvant se faire de deux façons :

- soit on utilise la formule

$$\text{Proj}_{V_{n-1}}(v_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \langle v_n, e_k \rangle e_k ;$$

- soit on calcule la matrice de Gram

$$G_{n-1} := \left[\langle v_i, v_j \rangle \right]_{1 \leq i, j \leq n-1}$$

(qui est symétrique ou hermitienne), puis on cherche les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que

$$G_{n-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_n, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, v_{n-1} \rangle \end{pmatrix} ;$$

on a alors

$$\text{Proj}_{V_{n-1}}(v_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k v_k .$$

On pose ensuite, le calcul précédent ayant été fait d'une manière ou d'une autre,

$$e_n := \frac{v_n - \text{Proj}_{V_{n-1}}(v_n)}{\|v_n - \text{Proj}_{V_{n-1}}(v_n)\|} .$$

C'est ce procédé qui a été utilisé dans les exemples 1.5 et 1.7 pour construire les fonctions polynômiales de Legendre ou de Hermite à partir du système libre constitué des fonctions monômes $1, t, t^2, \dots$

1.7 Espaces de Hilbert séparables ; notion de base hilbertienne

Définition 1.8 *Un espace de Hilbert H (réel ou complexe) est dit séparable si et seulement si s'il existe dans H un système de vecteurs $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tel que l'on ait*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Vec}(v_1, \dots, v_n)} = H$$

(on dit aussi que le système $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système total).

Si H est un espace de Hilbert séparable, deux configurations sont envisageables :

32. Si on l'attribue au mathématicien allemand Erhard Schmidt (1876-1959), spécialiste d'analyse fonctionnelle, et au mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1853-1916), qui s'est penché sur la méthode des moindres carrés, ce procédé algorithmique est certainement bien plus ancien et connu de Cauchy et Laplace dès le début du XIX-ème siècle (Cauchy le manipula expressément vers 1830).

- soit H est de dimension finie ;
- soit il existe dans H un système libre et total de vecteurs $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Dans l'un ou l'autre des cas, on peut construire (en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) soit une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) dans le premier cas, soit un système orthonormé total $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans le second cas. Cela nous conduit naturellement à la définition suivante :

Définition 1.9 *Soit H un espace de Hilbert séparable. On appelle base hilbertienne de H tout système orthonormé fini (si H est de dimension finie) ou total (sinon). Tout espace de Hilbert séparable admet toujours au moins une base hilbertienne (dénombrable³³).*

Le cas des espaces hilbertiens de dimension finie (\mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n) relevant totalement de l'algèbre, nous nous intéresserons surtout ici au cadre des espaces de Hilbert séparables mais non de dimension finie. On a alors la proposition très importante suivante, conséquence immédiate de la proposition 1.8³⁴ :

Proposition 1.9 *Soit H un \mathbb{K} espace de Hilbert séparable et de dimension infinie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H (il en existe toujours). Tout élément h de H se représente comme la somme de la série convergente*

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle e_k$$

avec

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, e_k \rangle|^2 = \|h\|^2.$$

De plus, l'application

$$\text{inj} : h \in H \longmapsto \left(\langle h, e_k \rangle \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$$

est un \mathbb{K} -isomorphisme isométrique (conservant la norme) entre H et l'espace de Hilbert $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}^*)$. Les scalaires $\langle h, e_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont dits coordonnées de l'élément h exprimé dans la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

33. Il convient de faire attention ici à l'usage du mot « base ». Il faut signaler en effet à ce propos qu'il est impossible qu'un \mathbb{K} -espace de Hilbert (voire même simplement un \mathbb{K} -espace vectoriel normé complet) qui ne soit pas de dimension finie soit de dimension (au sens algébrique) dénombrable : si H n'est pas de dimension finie, il ne saurait en effet exister dans H de système dénombrable $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui soit en même temps libre et générateur (au sens algébrique, ce qui signifie que tout élément de H puisse s'écrire comme combinaison linéaire finie d'éléments pris dans le système libre $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$; ceci n'interdit pas, au contraire, qu'il existe (c'est précisément ce que dit la dernière assertion de cette définition 1.9, lorsque H est supposé séparable) une base hilbertienne dénombrable. L'impossibilité évoquée ci-dessus résulte du fait que les espaces normés complets partagent la propriété de Baire (vous le verrez en Master 1). Par exemple, le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ ne saurait être complet pour le choix d'une norme, comme vous l'avez d'ailleurs vu en TD. Dans le cas particulier des Hilbert, il est facile de constater qu'existe ce « trou » entre la dimension finie et la dimension (au sens algébrique) infinie non dénombrable (cf. l'exercice 5 dans le guide d'activités 3 du contrat sous Ulysse accompagnant ce cours).

34. Le résultat établi dans cette proposition est indubitablement, avec le théorème 1.1, un des outils majeurs de l'analyse hilbertienne appliquée.

Preuve. On applique la proposition 1.8, mais en remarquant cette fois que V (qui est par définition le plus petit sous-espace fermé contenant tous les vecteurs e_n) est tel que $V = H$. La première affirmation résulte donc du point 2 de la proposition 1.8. La seconde affirmation tient au fait (voir la preuve de la proposition 1.8) que

$$\|\text{Proj}_V(h)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, e_k \rangle|^2 = \|h\|^2.$$

La surjectivité de inj est une conséquence du point 3 de la proposition 1.8. Le fait que inj préserve la norme implique bien sûr l'injectivité. \diamond

Ainsi, à isométrie près, il n'y a qu'un seul \mathbb{K} -espace de Hilbert séparable (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , à savoir $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}^*)$). Même si cela est vrai, chaque « incarnation » de cet espace $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}^*)$ aura son intérêt propre et sera étudiée séparément : le lien en effet entre $L_{\mathbb{K}}^2(U, dx)$, (où U désigne un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^n), $L^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$ (où (Ω, \mathcal{T}, P) désigne un espace probabilisé³⁵), qui pourtant sont, on le verra, tous les deux des espaces de Hilbert séparables, et $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}^*)$, $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$ (qui en sont d'autres bien sûr) n'est nullement « intuitif » ! Les premiers relèvent plutôt du cadre de l'information continue (à moins que P ne corresponde à une distribution de probabilités discrète), les deux autres relèvent du cadre des mathématiques discrètes !

1.8 Le cas des espaces de Hilbert non séparables

Dans ce cours, la majeure partie des situations que nous traiterons concernera le cas des espaces de Hilbert séparables. Mais il existe, notons le dès à présent, d'importants exemples (même au niveau « applicatif ») d'espaces de Hilbert non séparables ; on en propose un dans l'exercice 5 du guide 3 dans le contrat sous Ulysse accompagnant le déroulement de cette UE.

Dans un espace de Hilbert quelconque (non réduit à $\{0\}$, réel ou complexe) il existe bien sûr toujours des systèmes orthonormés. L'ensemble \mathcal{E} des systèmes orthonormés (dans un espace de Hilbert donné) peut être équipé naturellement d'un ordre : on dira que le système orthonormé $(e_{\mu})_{\mu \in M}$ « précède » le système $(f_{\nu})_{\nu \in N}$ si pour chaque μ dans le premier ensemble d'indices M , il existe $\nu = \nu(\mu)$ (forcément unique car tout système orthonormé est automatiquement libre) tel que $e_{\mu} = f_{\nu(\mu)}$. On notera ceci

$$(e_{\mu})_{\mu \in M} \leq (f_{\nu})_{\nu \in N}.$$

Considérons maintenant une famille totalement ordonnée de systèmes orthonormés

$$(e_{\alpha, \mu_{\alpha}})_{\mu_{\alpha} \in M_{\alpha}}, \quad \alpha \in A,$$

de l'espace de Hilbert H ; ceci signifie que si l'on prend deux systèmes dans cette famille, par exemple

$$(e_{\alpha_1, \mu_{\alpha_1}})_{\mu_{\alpha_1} \in M_{\alpha_1}}, \quad (e_{\alpha_2, \mu_{\alpha_2}})_{\mu_{\alpha_2} \in M_{\alpha_2}},$$

alors soit le premier précède le second pour l'ordre, soit l'inverse. On constate que, si l'on dispose d'une telle famille, on construit encore un système orthonormé en

³⁵. Pourvu que la tribu \mathcal{T} soit *séparable*, c'est-à-dire puisse être engendrée par une famille dénombrable d'éléments pris dans \mathcal{T} .

« concaténant » toutes ces familles : en effet si e et e' sont deux éléments du système concaténé, ils sont tous les deux dans le même système

$$(e_{\alpha_j, \mu_{\alpha_j}})_{\mu_{\alpha_j} \in M_{\alpha_j}}$$

(soit pour $j = 1$, soit pour $j = 2$, cela dépend de l'ordre entre les systèmes correspondant aux indices α_1 et α_2) et on peut donc calculer leur produit scalaire (qui vaut 0 si ces vecteurs sont distincts, 1 s'ils sont égaux) entre ces deux vecteurs en se positionnant dans le système adéquat. Ce système orthormé « majorant » réalise en fait la borne supérieure de la famille totalement ordonnée dont on est parti.

Ainsi, toute famille totalement ordonnée de systèmes orthonormés de H admet toujours une borne supérieure (on dit aussi que l'ordre est *inductif*). L'axiome de Zorn (équivalent de fait à l'axiome du choix) nous assure alors que \mathcal{E} admet au moins un élément maximal (pour l'ordre que nous venons de définir). Nous remarquons alors :

Proposition 1.10 *Si $(e_\iota)_{\iota \in I}$ est un système orthonormé maximal pour l'ordre entre systèmes orthonormés de H décrit ci-dessus, alors le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant tous les e_ι , $\iota \in I$, est H lui-même ; on dit que le système $(e_\iota)_{\iota \in I}$ est orthonormé et total, ou encore que c'est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert H .*

Preuve. On utilise un raisonnement par l'absurde. Soit V le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H contenant tous les e_ι , $\iota \in I$, et h un élément de H n'appartenant pas à V . Le vecteur

$$\frac{h - \text{Proj}_V(h)}{\|h - \text{Proj}_V(h)\|}$$

formerait, avec les e_ι , $\iota \in I$, un système orthonormé strictement plus grand (pour l'ordre mentionné sur les systèmes) que le système pourtant maximal $(e_\iota)_{\iota \in I}$. Ceci est absurde, ce qui montre que l'existence d'un tel h est impossible, donc que l'on a bien $V = H$. \diamond

Voici maintenant la raison pour laquelle les exemples des \mathbb{K} -espaces de Hilbert $l_{\mathbb{K}}^2(I)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) sont si importants :

Proposition 1.11 *Soit H un \mathbb{K} -espace de Hilbert et $(e_\iota)_{\iota \in I}$ une base hilbertienne de H (il en existe d'après l'axiome de Zorn). L'application \mathbb{K} -linéaire*

$$h \in H \mapsto \left(\langle h, e_\iota \rangle \right)_{\iota \in I} \in l_{\mathbb{K}}^2(I)$$

réalise un \mathbb{K} -isomorphisme isométrique entre H et $l_{\mathbb{K}}^2(I)$.

Remarque 1.3. La proposition ci-dessus nous assure donc qu'à un \mathbb{K} -isomorphisme isométrique près, les seuls \mathbb{K} -espaces de Hilbert sont les espaces du type $l_{\mathbb{K}}^2(I)$ pour un certain ensemble d'indices I . Lorsque I est dénombrable, on récupère ainsi tous les espaces de Hilbert séparables.

Preuve. Elle est immédiate ; si h est dans H , alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie $J(\epsilon)$ de I telle que, si $V_{J(\epsilon)}$ désigne le \mathbb{K} -sous-espace vectoriel engendré par les e_ι , $\iota \in J(\epsilon)$,

$$\|h - \text{Proj}_{V_{J(\epsilon)}}(h)\|^2 = \min_{x \in V_{J(\epsilon)}} \|h - x\|^2 \leq \epsilon.$$

On voit tout de suite que si J est une partie finie contenant $J(\epsilon)$

$$\|h - \text{Proj}_{V_J}(h)\|^2 = \min_{x \in V_J} \|h - x\|^2 \leq \min_{x \in V_{J(\epsilon)}} \|h - x\|^2 \leq \epsilon$$

puisque V_J contient $V_{J(\epsilon)}$. La famille $(\langle h, e_\iota \rangle e_\iota)_{\iota \in I}$ est donc sommable et de somme h . Ceci induit (avec le théorème de Pythagore) l'égalité

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \sup_{J \subset I, \#J < \infty} \sum_{\iota \in J} \|\text{Proj}_{V_J}(h)\|^2 \\ &= \sup_{J \subset I, \#J < \infty} \sum_{\iota \in J} |\langle h, e_\iota \rangle|^2. \end{aligned}$$

On utilise ici le fait que si K est une partie finie de I ne rencontrant pas $J(\epsilon)$, on a

$$\sum_{\iota \in K} |\langle h, e_\iota \rangle|^2 \leq \|h - \text{Proj}_{V_{J(\epsilon)}} h\|^2 \leq \epsilon.$$

Il reste à montrer que si $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ est dans $l_{\mathbb{K}}^2(I)$, alors la famille

$$\left(\lambda_\iota e_\iota \right)_{\iota \in I}$$

est sommable, de somme un élément h_λ de H tel que

$$\lambda_\iota = \langle h, e_\iota \rangle, \quad \forall \iota \in I.$$

La preuve du premier point repose sur le fait que pour toute partie finie K de I , on a

$$\left| \sum_{\iota \in K} \lambda_\iota e_\iota \right|^2 = \sum_{\iota \in K} |\lambda_\iota|^2$$

(cela résulte du théorème de Pythagore); on reprend ensuite le raisonnement fait pour montrer la sommabilité de $(z_\iota \bar{w}_\iota)_{\iota \in I}$ lorsque l'on a deux éléments z et w de $l_{\mathbb{K}}^2(I)$. Pour le second point, on utilise simplement la continuité de la projection orthogonale sur chaque droite vectorielle $\mathbb{K}e_\iota$, $\iota \in I$. La proposition est ainsi démontrée. \diamond

1.9 Exemples de bases hilbertiennes dans le cas séparable

1.9.1 Densité des classes de fonctions polynômiales dans $L_{\mathbb{K}}^2(U, dx)$ pour U mesurable borné

On rappelle³⁶ que si $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ et si g désigne la gaussienne

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp(-\|x\|^2/2),$$

la suite $(\dot{g}_{\epsilon_k})_{k \geq 1}$, où $g_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} g(x/\epsilon)$ constitue une approximation de la masse de Dirac dans $L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, dx)$ (au sens de la définition 4.3 du cours de théorie de

36. Voir l'exemple 4.2 du cours de théorie de l'intégration (UE MA5012), polycopié en ligne : <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf>

l'intégration). On en déduit, en utilisant la proposition 4.10 du cours de théorie de l'intégration que, si f est un élément de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{R}^n, dx)$, la suite $(\dot{f} * \dot{g}_{\epsilon_k})_{k \geq 1}$, qui est une suite d'éléments de $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{R}^n, dx)$ d'après le théorème de Young³⁷, converge vers \dot{f} dans l'espace de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

Si \dot{f} a un représentant identiquement nul dx -presque partout hors d'un compact K de \mathbb{R}^n , un représentant de $\dot{f} * \dot{g}_{\epsilon}$ est la fonction

$$\begin{aligned} x \longmapsto \int_K g_{\epsilon}(x-y)f(y) dy &= \frac{1}{\epsilon^n (2\pi)^{n/2}} \int_K \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k! \epsilon^{2k}} \|x-y\|^{2k} \right) f(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n (2\pi)^{n/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k! \epsilon^{2k}} \int_K \|x-y\|^{2k} f(y) dy \end{aligned}$$

qui se présente donc comme la limite uniforme sur K de la suite de fonctions polynômiales $(P_N)_N$, où

$$P_N(x) := \frac{1}{\epsilon^n (2\pi)^{n/2}} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{2^k k! \epsilon^{2k}} \int_K \|x-y\|^{2k} f(y) dy.$$

On déduit de toutes ses remarques la proposition suivante :

Proposition 1.12 *Si U est un sous-ensemble mesurable borné de \mathbb{R}^n , les classes de fonctions polynômiales à coefficients dans le corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) engendrent un \mathbb{K} -sous espace dense dans le \mathbb{K} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2(U, dx)$.*

Exemple 1.5 revisité. Suite à cette proposition, nous pouvons donc affirmer que les classes $(\dot{L}_n)_n$ des polynômes de Legendre introduits dans l'exemple 1.5 forment une base Hilbertienne du \mathbb{K} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2([-1, 1], dt)$. Ce système se construit pas-à-pas en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir du système libre constitué des fonctions monômes $t \mapsto t^n$, $n = 0, 1, \dots$

1.9.2 Densité des classes de polynômes trigonométriques dans $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T}^n)$

Le but de cette sous-section est de montrer dans un premier temps que les classes de monômes trigonométriques complexes

$$e_k := (\theta_1, \dots, \theta_n) \longmapsto \exp(i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)) = \exp(i\langle k, \theta \rangle), \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

engendrent un \mathbb{C} -sous-espace dense dans le \mathbb{C} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}^n)$. On en déduira immédiatement que les classes des monômes trigonométriques réels

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \longmapsto \prod_{j=1}^n (\cos \theta_j)^{k_j} \times \prod_{j=1}^n (\sin \theta_j)^{l_j}, \quad k, l \in \mathbb{N}^n,$$

engendrent un \mathbb{K} -sous-espace vectoriel dense dans $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T}^n)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Le matériel introduit dans cette sous-section sera repris au chapitre 2.

Nous introduisons pour cela le concept d'approximation de l'unité dans $L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{T}^n)$.

³⁷. Théorème 4.2 du cours de MA5012.

Définition 1.10 Une approximation de la masse de Dirac dans $L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{T}^n)$ est une suite $(\dot{\psi}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{T}^n)$ telle que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dot{\psi}_k$ a un représentant $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ - $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ -mesurable, 2π -périodique en chaque variable $\theta_1, \dots, \theta_n$, tel que $\psi_k \geq 0$ sur $[0, 2\pi[^n$ (donc sur \mathbb{R}^n);
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|\dot{\psi}_k\|_{\mathbb{T},1} := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi[^n} |\psi_k(\theta)| d\theta = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi[^n} \psi_k(\theta) d\theta = 1$;
- pour tout $\delta \in [0, \pi[$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_{\substack{\delta < |\theta_j| < \pi \\ j=1, \dots, n}} \psi_k(\theta) d\theta \right) = 0, \quad (1.26)$$

conditions traduisant bien le fait que toute la « masse » (égale à 1) de $\dot{\psi}_k$ se concentre sur l'origine $\dot{0}$ de \mathbb{T}^n lorsque k tend vers $+\infty$.

Exemple 1.10. Soit, pour $k \geq 1$,

$$\Psi_k(\theta) := (2\pi)^n \frac{\prod_{j=1}^n \left(\frac{1 + \cos \theta_j}{2} \right)^k}{\int_{]-\pi, \pi[^n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{1 + \cos u_j}{2} \right)^k du}. \quad (1.27)$$

Chaque fonction Ψ_k , $k \in \mathbb{N}^*$, est une fonction 2π -périodique positive ou nulle en les n variables (c'est même un polynôme trigonométrique) et on a par construction même $\|\Psi_k\|_{\mathbb{T},1} = 1$; de plus, si $\delta \in]0, \pi[$, la convergence uniforme vers 0 sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ de la suite de fonctions

$$\theta \mapsto \frac{\left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^k}{4 \int_0^{\pi/2} (\sin u)^{2k} du} \leq \frac{\left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^k}{4 \int_0^{\pi/2} (2u/\pi)^{2k} du} \leq \frac{(2k+1)(\cos(\theta/2))^{2k}}{2\pi}$$

nous assure que la condition (1.26) est satisfaite et donc que la suite $(\dot{\Psi}_k)_{k \geq 1}$ réalise une approximation de la masse de Dirac dans $L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{T}^n, \mathcal{B}(\mathbb{T}^n), d\dot{\theta})$, approximation qui, il faut le souligner, est donnée par des classes de polynômes trigonométriques.

On introduit la convolution d'un $\dot{g} \overset{\text{per}}{*} \dot{f}$ d'un élément \dot{g} de $L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{T}^n)$ et d'un élément \dot{f} de $L_{\mathbb{K}}^q(\mathbb{T}^n)$ lorsque p et q sont deux éléments de $[1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, $r \in [1, \infty]$ comme étant l'élément

$$\dot{g} \overset{\text{per}}{*} \dot{f}$$

de $L^r(\mathbb{T}^n)$ dont un représentant est la fonction mesurable 2π -périodique en les n variables $\theta_1, \dots, \theta_n$

$$\theta \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi[^n} g(\theta - u) f(u) du = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi[^n} g(u) f(\theta - u) du. \quad (1.28)$$

On a d'ailleurs, d'après les inégalités de Young³⁸ transposables à ce cadre périodique,

$$\|\dot{g} \overset{\text{per}}{*} \dot{f}\|_r \leq (2\pi)^n \|\dot{g}\|_p \times \|\dot{f}\|_q \quad (1.29)$$

38. Voir le théorème 4.2 du cours de MA5012 et sa transposition au cadre périodique dans la définition 4.5 de ce même cours.

si

$$\|\dot{g}\|_p := \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi[^n} |g(\theta)|^p d\theta \right)^{1/p}$$

et

$$\|\dot{f}\|_q := \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi[^n} |f(\theta)|^q d\theta \right)^{1/q}.$$

On peut en particulier appliquer cette opération à partir d'un élément \dot{g} de $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}^n)$ et d'un élément \dot{f} de $L^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}^n)$, ce qui nous donne un élément

$$\dot{g} \overset{\text{per}}{*} \dot{f} \in L^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}^n).$$

Dans exactement la même veine que la proposition 4.10 du cours de théorie de l'intégration, nous avons (la preuve est quasiment identique) la proposition suivante :

Proposition 1.13 *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}^n)$. Si $(\dot{\psi}_k)_{k \geq 1}$ est une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}^n)$, la suite*

$$(\dot{\psi}_k \overset{\text{per}}{*} \dot{f})_{k \geq 1}$$

est une suite d'éléments de $L^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}^n)$ convergeant vers \dot{f} dans le \mathbb{K} -espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}^n)$.

Le corollaire suivant de cette proposition 1.13 sera particulièrement important en ce qui concerne ultérieurement l'analyse de Fourier des signaux ou des images périodiques :

Corollaire 1.1 *Les classes de monômes trigonométriques complexes*

$$e_k : \theta \longmapsto \exp(i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)) = \exp(i\langle k, \theta \rangle), \quad (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n,$$

engendrent un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel dense dans le \mathbb{K} -espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^n)$. Les classes des monômes trigonométriques réels

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \longmapsto \prod_{j=1}^n (\cos \theta_j)^{k_j} \times \prod_{j=1}^n (\sin \theta_j)^{l_j}, \quad k, l \in \mathbb{N}^n$$

engendrent un \mathbb{K} -sous-espace dense dans $L^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}^n)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Preuve. Il suffit de se souvenir que $(\dot{\Psi}_k)_{k \geq 1}$ (où Ψ_k est le polynôme trigonométrique défini par (1.27)) est une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}^n)$ (voir l'exemple 1.10), d'appliquer la proposition 1.13, et de remarquer dans un second temps que si $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}^n)$, la fonction

$$\theta \longmapsto \int_{[0, 2\pi[^n} f(\theta - u) \Psi_k(u) du = \int_{[0, 2\pi[^n} f(u) \Psi_k(\theta - u) du$$

est un polynôme trigonométrique complexe car, pour tout $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{[0, 2\pi[^n} f(u) e^{i\langle k, \theta - u \rangle} du = e^{i\langle k, \theta \rangle} \times \int_{[0, 2\pi[^n} f(u) e^{-i\langle k, u \rangle} du,$$

où \langle , \rangle désigne le produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^n . Le passage des monômes trigonométriques complexes aux monômes trigonométriques réels se fait à l'aide des formules de Moivre et d'Euler. \diamond

Exemple 1.4 revisité. Il résulte du résultat établi dans l'exemple 1.4 (transposé du cadre monodimensionnel au cadre multidimensionnel, ce qui se fait immédiatement) que les classes des monômes trigonométriques complexes

$$e_k : (\theta_1, \dots, \theta_n) \mapsto \exp(i(k_1\theta_1 + \dots + k_n\theta_n)), \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

forment un système orthonormé dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}^n)$. Du fait du corollaire 1.1, ces classes e_k , $k \in \mathbb{Z}^n$, forment une base hilbertienne du \mathbb{C} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}^n)$. Cette base hilbertienne jouera un rôle majeur dans l'analyse de Fourier des phénomènes périodiques ; on la retrouvera au chapitre 2.

Exemple 1.6 revisité. Si \dot{f} est un élément de $L_{\mathbb{C}}^2([-1, 1], (1 - t^2)^{-1/2} dt)$ et que f soit un représentant de \dot{f} , la formule de changement de variables dans les intégrales³⁹ assure que

$$\int_{[-1, 1]} |f(t)|^2 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int_0^\pi |f(\cos \theta)|^2 \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \int_0^\pi |f(\cos \theta)|^2 d\theta < +\infty.$$

Or, d'après le corollaire 1.1, les monômes trigonométriques réels pairs

$$\theta \mapsto \cos(n\theta), \quad n \in \mathbb{N},$$

engendrent un \mathbb{K} -sous-espace dense dans le \mathbb{K} -sous-espace de $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T})$ constitué des classes de fonctions 2π -périodiques paires à valeurs dans \mathbb{K} (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On en déduit que les classes des polynômes de Tchebychev Θ_n définis précisément (voir (1.21)) par

$$\Theta_n(\cos \theta) \equiv \cos(n\theta), \quad n \in \mathbb{N},$$

engendrent un \mathbb{K} -sous-espace dense de $L_{\mathbb{K}}^2([-1, 1], (1 - t^2)^{-1/2} dt)$ et par conséquent, compte tenu de leur orthogonalité deux à deux (voir l'exemple 1.6) forment une base hilbertienne de ce \mathbb{K} -espace de Hilbert (toujours si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Ce système peut se reconstruire *via* le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir du système libre constitué des classes des monômes t^n , $n = 0, 1, \dots$

1.9.3 A propos des polynômes de Hermite

Nous verrons au chapitre 2 que les classes de fonctions polynômiales (à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) engendrent un \mathbb{K} -sous-espace dense dans le \mathbb{K} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{R}, e^{-t^2} dt)$ introduit dans l'exemple 1.7. Il en résulte que les classes \dot{H}_n , $n \in \mathbb{N}$ des fonctions polynômiales de Hermite définies par

$$H_n(t) := \frac{(-1)^n}{2^{n/2}\pi^{1/4}\sqrt{n!}} \times e^{t^2} \times \frac{d^n}{dt^n}[e^{-t^2}], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.30)$$

forment une base hilbertienne de $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{R}, e^{-t^2} dt)$. Ce système peut ici encore, se reconstruire *via* le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir du système libre constitué des classes des monômes t^n , $n = 0, 1, \dots$

1.10 Le théorème de dualité

Nous revenons maintenant à l'étude générale des propriétés des espaces de Hilbert. Nous donnons dans cette section une application clef du théorème de projection, qui nous dit que le dual d'un espace de Hilbert (au sens topologique) s'identifie

39. Formule (3.11) dans l'énoncé du théorème 3.5 du cours de MA5012.

isométriquement à l'espace lui même. Rappelons que le dual (au sens topologique) du \mathbb{K} -espace de Hilbert H est par définition le \mathbb{K} -espace des formes \mathbb{K} -linéaires continues de H dans \mathbb{K} (« continues » s'entendant naturellement au sens de la topologie définie par la norme euclidienne $\| \cdot \|$).

1.10.1 Quelques préliminaires à propos des formes linéaires continues sur un Hilbert

Le fait qu'une forme \mathbb{K} -linéaire $L : H \rightarrow K$ soit continue équivaut au fait qu'il existe une constante C telle que

$$\forall x \in H, \|x\| \leq 1 \implies |L(x)| \leq C.$$

Si tel est le cas, on définit la *norme* de L par

$$\|L\|^* := \sup_{\{x; \|x\| \leq 1\}} |L(x)| = \sup_{\{x; \|x\|=1\}} |L(x)|.$$

Cette norme $\| \cdot \|^*$ est dite norme de l'espace normé dual du \mathbb{K} -espace de Hilbert $(H, \| \cdot \|)$ (la norme $\| \cdot \|$ étant la norme dérivant du produit scalaire sur H)⁴⁰.

Dans la pratique, on ne dispose bien souvent de la description de l'action d'une forme linéaire L que sur un sous-espace vectoriel dense dans H (et non explicitement sur H); un exemple important est celui d'un espace de Hilbert séparable où l'on dispose d'une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (ou d'un « *frame* » engendrant un sous-espace dense V) et où l'on ne connaît l'action de L que par le biais des $L(e_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. On ne connaît donc *a priori* que l'action de L sur les combinaisons linéaires finies des vecteurs $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$L\left(\sum_{-N}^N \lambda_k e_k\right) := \sum_{-N}^N \lambda_k L(e_k), \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

Une question naturelle se pose : celle de « prolonger » sans ambiguïté L à l'espace de Hilbert tout entier (en une forme linéaire continue bien sûr) de manière à pouvoir vraiment travailler avec un élément du dual de H . Le petit lemme de prolongement suivant, anodin à première vue, est en fait très important du point de vue pratique :

Lemme 1.1 (Lemme de prolongement des formes linéaires) *Soit V un \mathbb{K} -sous-espace dense (mais attention, pas nécessairement fermé, c'est le problème !) de H et L une forme linéaire de V dans H . Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse prolonger L en un élément du dual topologique de H est qu'il existe une constante positive C telle que*

$$\forall v \in V, |L(v)| \leq C\|v\|.$$

Preuve. Si L se prolonge de V à H en une forme linéaire continue, on peut prendre $C = \|L\|$ et l'inégalité $|L(h)| \leq C\|h\|$ est satisfaite pour tout h dans H , donc *a fortiori* pour tout v dans V . Pour la réciproque, on approche un élément arbitraire

40. Pour ne pas alourdir les notations, on omettra par la suite de faire figurer l'exposant $*$ dans l'expression de la norme duale ; on la notera aussi $\| \cdot \|$ par souci de simplicité, ce lorsque la confusion avec la norme $\| \cdot \|$ sur H s'avèrera impossible.

h de H par une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de V (V est dense, c'est donc possible). On remarque que, puisque

$$|L(v_n) - L(v_m)| = |L(v_n - v_m)| \leq C\|v_n - v_m\|, \quad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

la suite $(L(v_n))_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans le corps \mathbb{K} comme la suite convergente $(v_n)_{n \geq 0}$; elle converge donc et l'on peut poser

$$L(h) := \lim_{n \rightarrow +\infty} L(v_n)$$

après avoir remarqué que cette limite ne dépendait pas en fait de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ choisie pour approcher h . L'action de L est ainsi prolongée à H tout entier et la forme linéaire $L : H \rightarrow \mathbb{K}$ définie ainsi prolonge l'action de L sur V , est unique et continue car on a bien sûr

$$\forall h \in H, \quad |L(h)| \leq C\|h\|.$$

Le résultat repose donc essentiellement sur la complétude de \mathbb{K} . \diamond

1.10.2 L'énoncé du théorème de dualité

Théorème 1.2 *Soit L une forme linéaire continue sur un \mathbb{K} -espace de Hilbert H (le corps de base \mathbb{K} étant \mathbb{R} ou \mathbb{C}); il existe un et un seul $h \in H$ tel que*

$$\forall x \in H, \quad L(x) = \langle x, h \rangle.$$

De plus, l'application

$$L \longmapsto h = h(L)$$

est une isométrie anti-linéaire⁴¹ entre H^ (muni de la norme $\|\cdot\|^*$ d'espace normé dual définie ci-dessus) et H ; le dual H^* hérite donc naturellement ainsi d'une structure de \mathbb{K} -espace de Hilbert avec un produit scalaire défini par*

$$\langle L_1, L_2 \rangle = \langle h(L_2), h(L_1) \rangle$$

Preuve. Le sous espace $F = \text{Ker } L$ est un sous espace fermé F de H . A moins que L ne soit l'application nulle (auquel cas $h = 0$ convient dans l'énoncé du théorème), F est strictement inclus dans H . De plus, d'après le théorème de projection orthogonale 1.1, H est somme directe orthogonale de F et F^\perp puisque tout $x \in H$ s'écrit

$$x = \text{Proj}_F(x) + \left(x - \text{Proj}_F(x) \right) \in F \oplus^\perp F^\perp,$$

la somme étant directe. On peut par conséquent toujours trouver (lorsque $L \neq 0$) au moins un vecteur u non nul dans F^\perp .

Remarquons aussi (toujours si $L \neq 0$) qu'il est impossible de trouver dans F^\perp deux vecteurs indépendants u_1 et u_2 : en effet, si tel était le cas, on aurait $L(u_1) = \lambda L(u_2)$

41. L'anti-linéarité signifie que pour toute paire de formes \mathbb{K} -linéaires L_1, L_2 , pour toute paire de scalaires λ_1, λ_2 ,

$$h(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2) = \overline{\lambda_1} h(L_1) + \overline{\lambda_2} h(L_2).$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et par conséquent $u_1 - \lambda u_2 \in F \cap F^\perp = \{0\}$, ce qui contredirait l'indépendance de u_1 et u_2 . On a donc

$$H = F \oplus^\perp \mathbb{C}u.$$

Lorsque $L \neq 0$, choisissons un vecteur non nul u de F^\perp , c'est-à-dire, d'après ce qui précède, une base de F^\perp . Pour tout $x \in F$, on a $L(x) = \langle x, u \rangle = 0$. Posons

$$h := \frac{\overline{L(u)}}{\|u\|^2} u.$$

On a, avec ce choix,

$$\forall x \in H, L(x) = \langle x, h \rangle$$

et la première partie du théorème est prouvée. L'unicité de h est immédiate, car

$$\langle x, h_1 \rangle = \langle x, h_2 \rangle, \quad \forall x \in H$$

implique en particulier $\langle h_1 - h_2, h_1 - h_2 \rangle = 0$, soit $h_1 = h_2$. Enfin, on a, du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.9) (avec son cas d'égalité),

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, h \rangle| = \|h\|,$$

ce qui montre bien que

$$L \longmapsto h = h(L)$$

est une isométrie. L'antilinearité de cette application est évidente. \diamond

1.11 Opérateurs de H dans H ; notion d'adjoint

Après nous être intéressés à décrire le \mathbb{K} -espace vectoriel des formes linéaires continues sur un \mathbb{K} -espace de Hilbert H , nous allons dans cette section nous intéresser à l'étude (très succincte) des opérateurs \mathbb{K} -linéaires continus d'un \mathbb{K} -espace de Hilbert dans lui-même.

1.11.1 Préliminaires sur les opérateurs linéaires continus de H dans H

Soit $T : H \longrightarrow H$ une application \mathbb{K} -linéaire du \mathbb{K} -espace de Hilbert H dans lui-même⁴². Dire que T est continue (pour la topologie d'espace normé définie par la norme $\| \cdot \|$ dérivant du produit scalaire) équivaut à dire qu'il existe une constante C telle que

$$\forall h \in H, \|h\| \leq 1 \implies \|T(h)\| \leq C.$$

On pose dans ce cas

$$\|T\| := \sup_{\{h \in H; \|h\| \leq 1\}} \|T(h)\| = \sup_{\{h \in H; \|h\|=1\}} \|T(h)\|. \quad (1.31)$$

Comme pour les formes linéaires, dans de nombreux problèmes pratiques, on ne dispose de la description de l'action d'un opérateur que sur un sous-espace vectoriel

⁴². On dit aussi un *opérateur* linéaire continu de H dans H .

dense dans H (et non explicitement sur H) ; un exemple important est celui d'un espace de Hilbert séparable où l'on dispose d'une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (ou d'un « *frame* » engendrant un sous-espace dense V) et où l'on ne connaît l'action de T que par le biais des $T(e_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. On ne connaît donc *a priori* que l'action de T sur les combinaisons linéaires finies des vecteurs $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$T\left(\sum_{k=-N}^N \lambda_k e_k\right) := \sum_{k=-N}^N \lambda_k T(e_k), \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

Une question naturelle se pose : celle de « prolonger » sans ambiguïté T à l'espace de Hilbert tout entier (en un opérateur \mathbb{K} -linéaire continu bien sûr) de manière à pouvoir vraiment travailler avec un opérateur \mathbb{K} linéaire continu de H dans lui-même. Le petit lemme de prolongement suivant, anodin à première vue, est en fait très important du point de vue pratique :

Lemme 1.2 (Lemme de prolongement des opérateurs) *Soit V un \mathbb{K} -sous-espace dense (mais attention, pas nécessairement fermé, c'est tout le problème!) de H et T une application \mathbb{K} -linéaire de V dans H . Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse prolonger T de manière unique en un opérateur \mathbb{K} -linéaire continu de H dans lui-même est qu'il existe une constante positive C telle que*

$$\forall v \in V, \quad \|T(v)\| \leq C\|v\|.$$

Preuve. Si T se prolonge de V à H en un opérateur linéaire continu, on peut prendre $C = \|T\|$ et l'inégalité $\|T(h)\| \leq C\|h\|$ est satisfaite pour tout h dans H , donc *a fortiori* pour tout v dans V . Pour la réciproque, on approche un élément arbitraire h de H par une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de V (V est dense, c'est donc possible). On remarque que, puisque

$$\|T(v_n) - T(v_m)\| = \|T(v_n - v_m)\| \leq C\|v_n - v_m\|, \quad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

la suite $(T(v_n))_{n \geq 0}$ est de Cauchy comme la suite convergente $(v_n)_{n \geq 0}$; elle converge donc et l'on peut poser

$$T(h) := \lim_{n \rightarrow +\infty} T(v_n)$$

après avoir remarqué que cette limite ne dépendait pas en fait de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ choisie pour approcher h . L'action de T est ainsi prolongée à H tout entier et le nouvel opérateur $T : H \rightarrow H$ défini ainsi prolonge l'action de T sur V , est unique et continu car on a bien sûr

$$\forall h \in H, \quad \|T(h)\| \leq C\|h\|.$$

Le résultat repose donc sur la complétude de H en place de celle de \mathbb{K} utilisée pour le lemme 1.1. \diamond

Exemple d'application 1.11 (thème d'exercice). Voici un exemple d'application important de ce lemme de prolongement dans un \mathbb{K} -espace de Hilbert séparable où l'on dispose d'une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. On se donne l'action d'un opérateur linéaire T en se la donnant uniquement sur les vecteurs e_k de la base hilbertienne. On veille simplement à ce que l'action de T ne détériore pas trop l'orthogonalité, au sens suivant : il existe une suite $(\tau_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres positifs telle que

$$\|\tau\|_1 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k < \infty$$

et

$$\forall k, l \in \mathbb{Z}, |\langle T(e_k), T(e_l) \rangle| \leq \tau_{k-l}$$

(on parle alors pour la famille $(T(e_k))_k$ de famille « presque orthogonale »). Alors, si N est un entier positif non nul et $(\lambda_k)_{k=-N}^N$ des scalaires, on a, du fait du théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \left\| T\left(\sum_{k=-N}^N \lambda_k e_k\right) \right\|^2 &= \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \lambda_k \bar{\lambda}_l \langle T(e_k), T(e_l) \rangle \\ &\leq \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N |\lambda_k| |\lambda_l| \tau_{k-l} \\ &\leq \sum_{l=-N}^N \sum_{p=-l-N}^{-l+N} |\lambda_l| |\lambda_{l+p}| \tau_p \\ &\leq \sum_{p=-2N}^{2N} \tau_p \left(\sum_l |\lambda_l| |\lambda_{l+p}| \right) \\ &\leq \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tau_p \left(\sqrt{\sum_l |\lambda_l|^2} \sqrt{\sum_l |\lambda_{l+p}|^2} \right) \\ &\leq \|\tau\|_1 \times \sum_{k=-N}^N |\lambda_k|^2 \end{aligned}$$

si l'on convient de prolonger la collection $(\lambda_k)_k$ par des zéros hors de $\{-N, \dots, N\}$, que l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.9) et l'invariance par translation de la mesure de comptage sur \mathbb{Z} . On voit qu'il existe une constante $C = \sqrt{\|\tau\|_1}$ telle que, pour tout h dans le sous-espace vectoriel engendré par les e_k , $k \in \mathbb{Z}$, on ait $\|T(h)\| \leq C\|h\|$. Le lemme de prolongement s'applique donc et l'action de T se prolonge bien en celle d'un opérateur linéaire continu de H dans lui-même.

Par exemple, si $H = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et si

$$e_k : \theta \mapsto e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

on définit un opérateur linéaire continu de H dans lui-même en posant

$$T(e_k) : \theta \mapsto a_k(\theta) e^{ik\theta}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

où a_k désigne (pour tout $k \in \mathbb{Z}$) une fonction C^∞ 2π -périodique⁴³, avec la contrainte qu'il existe une constante absolue $K \geq 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \|a_k\|_\infty + \|a'_k\|_\infty + \|a''_k\|_\infty \leq K.$$

On voit en effet (en faisant deux intégrations par parties successives) que, si tel est le cas, il existe bien une constante C telle que, pour tout couple d'entiers (m, n) avec $m \neq n$,

$$|\langle T(e_k), T(e_l) \rangle| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_k(\theta) \overline{a_l(\theta)} e^{-i(k-l)\theta} d\theta \right| \leq \frac{C}{|k-l|^2},$$

ce qui assure l'existence d'une suite $(\tau_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$|\langle T(e_k), T(e_l) \rangle| \leq \tau_{k-l}, \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

(la série de Riemann $[1/k^2]_{k \geq 1}$ étant convergente). La possibilité de prolonger T en un opérateur linéaire continu à l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ tout entier entre donc bien dans le cadre de l'exemple.

43. Il s'agit concrètement d'un mécanisme de *modulation de l'amplitude*, dans la mesure où l'on remplace l'amplitude constante égale à 1 de $\theta \mapsto e^{ik\theta}$ par l'amplitude « modulée » (de façon douce) $\theta \mapsto a_k(\theta)$.

1.11.2 La notion d'opérateur adjoint

La notion importante que nous attacherons dans ce cours à un opérateur \mathbb{K} -linéaire continu $T : H \rightarrow H$ sera celle d'*opérateur adjoint*.

Soit T un tel opérateur \mathbb{K} -linéaire continu $T : H \rightarrow H$. Pour tout h fixé dans H , l'application

$$x \in H \mapsto \langle T(x), h \rangle$$

est une \mathbb{K} -forme linéaire continue sur H . Il existe donc (d'après le théorème de dualité 1.2), un unique élément $T^*(h)$ tel que

$$\langle T(x), h \rangle = \langle x, T^*(h) \rangle, \quad \forall x \in H. \quad (1.32)$$

Si l'on remplace h par $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$ avec $h_1, h_2 \in H$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, on constate que

$$\begin{aligned} \langle T(x), \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \rangle &= \overline{\lambda_1} \langle T(x), h_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle T(x), h_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \langle x, T^*(h_1) \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, T^*(h_2) \rangle \\ &= \left\langle x, \lambda_1 T^*(h_1) + \lambda_2 T^*(h_2) \right\rangle, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application

$$h \mapsto T^*(h)$$

définie suivant (1.32) est bien \mathbb{K} -linéaire. La relation définissant complètement cette application \mathbb{K} -linéaire $T^* : H \rightarrow H$, soit

$$\forall x \in H, \forall h \in H, \langle T(x), h \rangle = \langle x, T^*(h) \rangle \quad (1.33)$$

est dite *formule d'adjonction*. Cette formule d'adjonction se lit aussi

$$\begin{aligned} \forall x \in H, \forall h \in H, \langle T^*(x), h \rangle &= \overline{\langle h, T^*(x) \rangle} \\ &= \overline{\langle T(h), x \rangle} \\ &= \langle x, T(h) \rangle, \end{aligned}$$

on constate que $(T^*)^* = T$.

Si h est de norme 1, on a, pour tout x dans H ,

$$|\langle x, T^*(h) \rangle| = |\langle T(x), h \rangle| \leq \|T(x)\| \times \|h\| \leq \|T\| \times \|x\|,$$

ce qui montre (en prenant $x = T^*(h)$) que $\|T^*(h)\| \leq \|T\|$, donc que T^* est une application \mathbb{K} -linéaire continue de H dans H (comme T), avec $\|T^*\| \leq \|T\|$. Comme $(T^*)^* = T$, on a aussi l'inégalité inverse

$$\|(T^*)^*\| = \|T\| \leq \|T^*\|.$$

Tout ce que nous venons de faire se résume en la proposition-définition suivante :

Proposition 1.14 *Soit H un \mathbb{K} -espace de Hilbert ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et $T : H \rightarrow H$ une application \mathbb{K} -linéaire continue de H dans lui-même (on dit aussi un opérateur \mathbb{K} -linéaire continu de H dans H). La formule d'adjonction (1.33)*

$$\forall x \in H, \forall h \in H, \langle T(x), h \rangle = \langle x, T^*(h) \rangle$$

permet de définir sans équivoque un autre opérateur \mathbb{K} -linéaire continu de H dans lui-même, dit adjoint de T . Les opérateurs T et T^* sont tels que $\|T\| = \|T^*\|$ et l'opération de prise d'adjoint $T \mapsto T^*$ est une involution isométrique antilinéaire du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(H, H)$ des opérateurs \mathbb{K} -linéaires continus de H dans H (équipé de la norme d'opérateur continu définie par (1.31) à partir de la norme $\|\cdot\|$ dérivant du produit scalaire sur H).

On remarque de plus (toujours grâce à la caractérisation de l'adjoint *via* la formule d'adjonction (1.33)) que si T_1 et T_2 sont deux opérateurs \mathbb{K} -linéaires continus de H dans lui-même,

$$(T_2 \circ T_1)^* = T_1^* \circ T_2^* .$$

En particulier, si un opérateur linéaire continu $T : H \rightarrow H$ admet un inverse aussi linéaire continu $T^{-1} : H \rightarrow H$, on a nécessairement $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Exemple 1.12 : le cas de la dimension finie. Si $H = \mathbb{R}^n$ ou $H = \mathbb{C}^n$ sont équipés d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (pas nécessairement le produit scalaire canonique), la notion d'adjoint rejoint celle que l'on connaît en algèbre. Si M est la matrice de l'opérateur T exprimée dans une base orthonormée de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n (relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$), la matrice de l'adjoint T^* (relativement à la structure hilbertienne attachée au choix du produit scalaire) exprimée dans cette même base est exactement la matrice M^* , c'est-à-dire la transconjugée de la matrice M (on transpose et on conjugue les coefficients).

Exemple 1.13 : les « shifts ». Si $H = l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$, l'opérateur $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}$ (dit *shift* d'un pas vers la droite) a pour adjoint l'opérateur $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$ (dit *shift* d'un pas vers la gauche).

Exemple 1.14 : le cas d'une projection orthogonale sur un sous-espace fermé. Si V est un sous-espace fermé de H , l'opérateur Proj_V (qui est continu de norme 1 puisque $\|\text{Proj}_V x\| \leq \|x\|$ avec égalité si et seulement si $x \in V$) a pour adjoint

$$(\text{Proj}_V)^* = \text{Proj}_V$$

car on a, pour tout x, h dans H ,

$$\begin{aligned} \langle x, \text{Proj}_V(h) \rangle &= \langle \text{Proj}_V(x), \text{Proj}_V(h) \rangle \\ &= \langle \text{Proj}_V(x), h \rangle . \end{aligned}$$

L'opérateur Proj_V est un exemple d'opérateur *auto-adjoint*. La norme d'opérateur d'une projection orthogonale P_V sur un sous-espace fermé V est égale à 1 car $P_V(x) = x$ pour $x \in V$ et d'autre part $\|P_V(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x dans H .

La proposition suivante nous sera utile car elle relie noyau et image d'un opérateur linéaire continu T au noyau et image de son adjoint T^* .

Proposition 1.15 *Soit H un \mathbb{K} -espace de Hilbert et T un opérateur \mathbb{K} -linéaire continu de H dans lui-même. On a les relations :*

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= (\overline{\text{Im } T^*})^\perp \\ \text{Ker } T^* &= (\overline{\text{Im } T})^\perp \\ H &= \text{Ker } T \overset{\perp}{\oplus} \overline{\text{Im } T^*} \\ &= \text{Ker } T^* \overset{\perp}{\oplus} \overline{\text{Im } T} \end{aligned} \tag{1.34}$$

Preuve. Si h est dans le noyau de T , on a

$$\forall x \in H, \langle T(h), x \rangle = 0.$$

En utilisant la formule d'adjonction (1.33), il vient donc

$$\forall x \in H, \langle h, T^*(x) \rangle = 0,$$

ce qui signifie que h est orthogonal au sous-espace $\text{Im } T^*$. Comme le produit scalaire est continu sur $H \times H$, h est aussi orthogonal au sous-espace fermé $\overline{\text{Im } T^*}$, ce qui prouve bien l'inclusion

$$\text{Ker } T \subset (\overline{\text{Im } T^*})^\perp.$$

Prenons maintenant h orthogonal à $\text{Im } T^*$; pour montrer que $T(h) = 0$, il suffit de montrer que pour tout $x \in H$,

$$\langle T(h), x \rangle = 0.$$

Mais, toujours d'après la formule d'adjonction (1.33)

$$\langle T(h), x \rangle = \langle h, T^*(x) \rangle = 0$$

puisque $h \perp T^*(x)$. On a donc bien aussi l'autre inclusion

$$(\overline{\text{Im } T^*})^\perp \subset \text{Ker } T$$

(on peut passer à gauche à l'adhérence car l'on sait que $\text{Ker } T$ est fermé). Les formules des première et troisième lignes de (1.34) sont donc prouvées (pour celle de la troisième ligne, on applique le théorème de projection orthogonale). En remplaçant T par T^* et en utilisant l'involutive de la prise d'adjoint $(T^*)^* = T$, on en déduit les formules des seconde et quatrième lignes. \diamond

1.11.3 L'intérêt de la prise d'adjoint ; deux exemples pratiques

Nous donnons dans ce paragraphe deux exemples de raisonnements où l'opération de prise d'adjoint facilite la tâche. Ces raisonnements conduisent chacun à une application pratique importante : la première concerne la « poursuite » d'une information inconnue par le biais de projections orthogonales itérées judicieuses, la seconde concerne la possibilité, dans un espace de Hilbert séparable, de « perturber » une base hilbertienne tout en conservant certaines des propriétés opérationnelles qui lui sont attachées. Cette sous-section peut être pensée comme deux thèmes de problèmes à regarder à tête reposée. On peut la lire à titre d'exercice (ces exercices seront d'ailleurs partiellement repris dans les guides d'activités proposés sous Ulysse).

Itération de projections

Le résultat de ce paragraphe est celui que soutend la figure illustrant l'exemple 1.2 de la section 1.1.

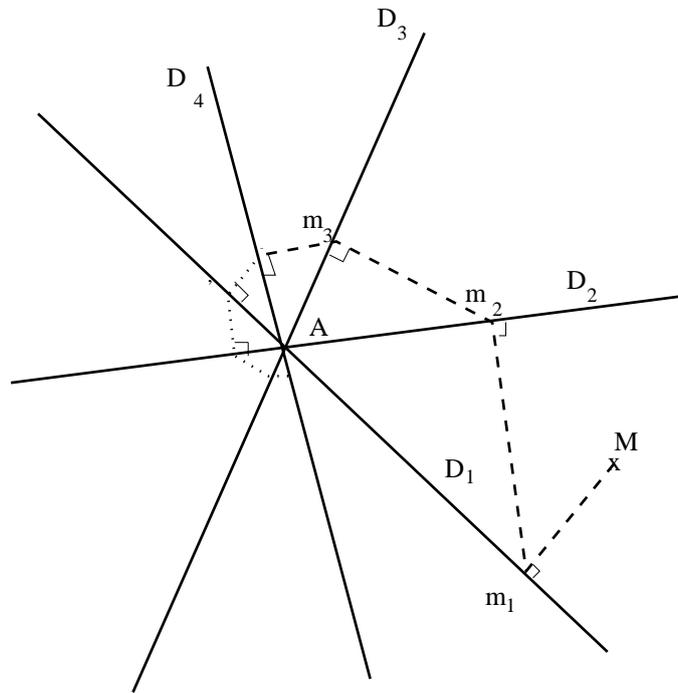


FIGURE 1.7 – Itération de projections (rappel de l'exemple 1.2)

Proposition 1.16 Soient V_1, V_2, \dots, V_N , N sous espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert H , h un élément de H , et P_1, \dots, P_N , les projections orthogonales sur les sous-espaces affines respectifs $D_1 := h + V_1, \dots, D_N := h + V_N$. Soit $V := V_1 \cap \dots \cap V_N$ et P la projection orthogonale sur le sous espace affine $A = h + V$. Alors, si Q est l'application affine $Q = P_N \circ \dots \circ P_1$, on a

$$Q^k(x) \longrightarrow P(x) \quad (1.35)$$

pour tout x dans H lorsque k tend vers l'infini. De plus, lorsque $N = 2$ et

$$\cos \theta := \sup_{\substack{h_1 \in V_1^* \cap V^\perp \\ h_2 \in V_2^* \cap V^\perp}} \frac{|\langle h_1, h_2 \rangle|}{\|h_1\| \|h_2\|} < 1,$$

alors, on a l'information quantitative permettant l'estimation d'erreur dans cet algorithme itératif :

$$\|Q^k(x) - P(x)\| \leq (\cos \theta)^k \|x - P(x)\|. \quad (1.36)$$

Preuve. On se ramène au cas $h = 0$, ce qui nous permet de poser le problème au niveau des sous-espaces vectoriels et non plus affines. Les projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels fermés étant des opérateurs de norme égale à 1, on voit que si x est dans le noyau de $Q - \text{Id}$, on a

$$\|x\| \geq \|P_1(x)\| \geq \dots \geq \|Q(x)\| = \|x\|,$$

et donc $\|P_j(x)\| = \|x\|$ pour $j = 1, \dots, N$. Ceci implique (via le théorème de Pythagore), que $P_j(x) = x$ pour tout $j = 1, \dots, N$, soit $x \in V$. On a donc

$$\text{Ker}(I - Q) = V.$$

Introduisons ici la prise d'adjoint. Comme $\text{Ker}(I - Q^*) = \text{Ker}(I - Q) = V$ (il suffit d'inverser l'ordre des projections orthogonales P_k , qui sont toutes, on le rappelle, des opérateurs autoadjoints, cf. exemple 1.14 ci-dessus), on peut d'après la proposition 1.15 décomposer l'espace de Hilbert H sous la forme

$$H = \text{Ker}(I - Q^*) \oplus \overline{\text{Im}(I - Q)} = V \oplus \overline{\text{Im}(I - Q)}.$$

Prouver le premier volet de la proposition revient donc à prouver (1.35) pour tout x dans $\overline{\text{Im}(I - Q)}$, ou encore, ce qui est suffisant par continuité de $I - Q$ et puisque tous les opérateurs T^k sont de norme au plus 1 comme composés de projections orthogonales sur des sous-espaces fermés, pour tout x dans $\text{Im}(I - Q)$. Mais si $x = (I - Q)(y)$, posons

$$a := \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q^k(y)\|.$$

(a existe bien car on a affaire à une suite décroissante de nombres positifs). Distinguons maintenant deux cas.

- Si $a > 0$, on considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, où

$$u_k = \frac{Q^k(y)}{\|Q^k(y)\|};$$

on a $\|Q(u_k)\| \rightarrow 1$; ceci implique

$$(I - Q)(u_k) \rightarrow 0,$$

comme on le voit en utilisant une fois de plus le théorème de Pythagore et en raisonnant par récurrence sur le nombre N de projecteurs impliqués dans la factorisation de Q ; comme $a > 0$, il en résulte

$$Q^k \circ (I - Q)(y) = (I - Q) \circ Q^k(y) \rightarrow 0.$$

- Si maintenant $a = 0$, on a également

$$(I - Q) \circ Q^k(y) \mapsto 0.$$

Ainsi, pour tout x dans $\text{Im}(I - Q)$, on a $Q^k(x) \rightarrow 0 = P(x)$, ce qui, avec le fait que $Q^k(x)$ converge vers $x = P(x)$ lorsque $x \in V$, conclut la preuve du premier volet de la proposition.

En ce qui concerne le second volet de cette même proposition, il suffit de remarquer que, compte tenu de la définition de $\cos \theta$,

$$\|Q(x)\| \leq \cos \theta \|x\|$$

pour tout x dans V^\perp et d'appliquer cette inégalité de manière itérative au vecteur $x - P(x)$. \diamond

Application. Une application importante de ce résultat est la suivante : c'est celle qu'illustre la figure déjà introduite dans l'exemple 1.1 de la section 1.1 et que pour mémoire nous redonnons ci-dessous.

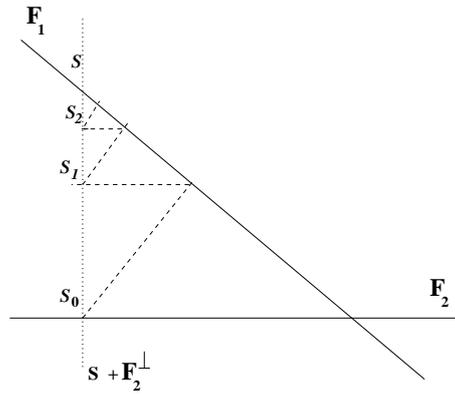


FIGURE 1.8 – Itération de projections (rappel de l'exemple 1.1)

On se donne deux sous-espaces F_1 et F_2 de H tels que $F_1 \cap F_2^\perp = \{0\}$. On note P_1 (resp. P_2) la projection orthogonale sur F_1 (resp. F_2) et Q_1 (resp. Q_2) la projection orthogonale sur F_1^\perp (resp. F_2^\perp). On suppose que s est un élément de F_1 *a priori* inconnu, la seule information connue étant $s_0 = P_2(s)$. Alors, l'algorithme itératif

$$\begin{aligned} s_0 &= P_2(s) \\ &\vdots \\ s_{k+1} &= s_0 + Q_2 \circ P_1(s_k) \\ &= (s - Q_2(s)) + Q_2 \circ P_1(s_k) \\ &= s + Q_2(P_1(s_k) - s) \\ &= s + Q_2 \circ P_1(s_k - s), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

(c'est plus parlant sur la figure) converge vers s . Il suffit d'utiliser la proposition 1.16. De plus, si F_1 et F_2^\perp sont tels que

$$\sup_{\substack{h_1 \in F_1 \setminus \{0\} \\ h_2 \in F_2^\perp \setminus \{0\}}} \frac{|\langle h_1, h_2 \rangle|}{\|h_1\| \|h_2\|} = \cos \theta < 1, \quad (1.37)$$

on a une estimation de la vitesse de convergence de s_k vers s en

$$\|s_k - s\| \leq (\cos \theta)^k \|s_0 - s\| = (\cos \theta)^k \|Q_2(s)\| \leq (\cos \theta)^k \|s\|;$$

la décroissance de l'erreur d'approximation est exponentielle. Souvent, pareille idée est exploitée, même dans le cas où l'« angle » des deux sous-espaces F_1 et F_2^\perp est égal à 0 ($\cos \theta = 1$); l'algorithme n'a plus alors, on s'en doute, la robustesse que l'on pourrait escompter.

Systèmes bi-orthonormés dans un espace de Hilbert séparable

Souvent les bases orthonormées des espaces de Hilbert sont amenées à se présenter comme « perturbées », l'orthogonalité n'étant alors plus assurée. Il est néanmoins possible de pallier à ce problème grâce à la proposition suivante⁴⁴.

Proposition 1.17 *Soit $(e_k)_{k \geq 1}$ une base hilbertienne d'un \mathbb{K} -espace de Hilbert séparable et $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ un système de vecteurs tel qu'il existe une constante absolue $\tau \in]0, 1[$*

44. Que l'on peut voir comme un résultat de stabilité concernant les bases hilbertiennes, même si l'orthogonalité reste une notion « fragile » comparée à la redondance qui elle est une notion beaucoup plus robuste! Nous y reviendrons dans la section 1.12 suivante.

avec

$$\left\| \sum_{k=1}^N \lambda_k (e_k - f_k) \right\|^2 \leq \tau^2 \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2 \quad (1.38)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout choix de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ dans le corps⁴⁵. Il existe alors un système de vecteurs $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tel que

$$\langle f_k, g_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

et que tout élément h de H puisse s'écrire

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, g_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, f_k \rangle g_k$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\|h\|}{1 + \tau} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, g_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\|h\|}{1 - \tau} \\ (1 - \tau)\|h\| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, f_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq (1 + \tau)\|h\|. \end{aligned}$$

Preuve. On définit tout d'abord un opérateur linéaire continu $T : H \rightarrow H$ en définissant dans un premier temps son action sur les éléments de la base hilbertienne $(e_k)_{k \geq 1}$ par

$$T(e_k) = e_k - f_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout choix de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_N$,

$$T\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^N \lambda_k (e_k - f_k).$$

Pour tout élément h dans le sous-espace vectoriel engendré par les e_k , $k \geq 1$, on a

$$\|T(h)\| \leq \tau \|h\| \quad (1.39)$$

d'après l'hypothèse (1.38), ce qui prouve (si l'on invoque le lemme 1.2 de prolongement des opérateurs) que T se prolonge bien en un opérateur linéaire continu de H dans lui-même puisque le sous-espace vectoriel engendré par les e_k , $k \geq 1$ est dense. L'opérateur $T : H \rightarrow H$ ainsi défini est de norme majorée par τ du fait de l'inégalité (1.39) (valable par prolongement pour tout h dans H). L'opérateur T étant de norme $\|T\| \leq \tau < 1$, l'opérateur $S = \text{Id}_H - T = I - T$ admet un inverse continu S^{-1} dont l'action est définie par

$$S^{-1}(h) := \sum_{k=0}^{\infty} T^k(h), \quad \forall h \in H, \quad (1.40)$$

45. Ceci signifie que le système $(f_k)_{k \geq 1}$ est en quelque sorte une version « perturbée » du système orthonormé idéal qu'est la base hilbertienne $(e_k)_{k \geq 1}$.

où T^k désigne, pour $k \in \mathbb{N}$, l'itéré k fois de l'opérateur T ($T^0 = \text{Id}$); la série au second membre de (1.40) est en effet absolument convergente car

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k(h)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k \|h\| \leq \|h\| \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \leq \frac{\|h\|}{1-\tau},$$

ce qui prouve non seulement que $S^{-1} : H \rightarrow H$ est bien défini (comme opérateur linéaire continu de H dans lui-même), mais encore que

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\tau}.$$

Notons que l'on a, pour tout h dans H , les inégalités :

$$\begin{aligned} (1-\tau)\|h\| &= (1-\tau)\|S^{-1}(S(h))\| \leq \|S(h)\| \leq \|h\| + \|T(h)\| \leq (1+\tau)\|h\| \\ (1-\tau)\|S^{-1}(h)\| &\leq \|h\| = \|S(S^{-1}(h))\| \leq (1+\tau)\|S^{-1}(h)\|. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ici intervient l'opération de prise d'adjoint : nous introduisons en effet l'opérateur S^* adjoint de S ; la norme de cet opérateur S^* est égale à la norme de S , donc majorée par $1+\tau$. Du fait de la remarque suivant la proposition 1.14, l'opérateur S^* est un opérateur inversible, d'inverse l'opérateur continu $(S^{-1})^*$ (de norme égale à $\|S^{-1}\|$); on a donc aussi, pour tout h dans H , l'encadrement

$$(1-\tau)\|h\| = (1-\tau)\|(S^*)^{-1}(S^*(h))\| \leq \|S^*(h)\| \leq (1+\tau)\|h\|. \quad (1.42)$$

Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$g_k := (S^{-1})^*(e_k) = (S^*)^{-1}(e_k).$$

D'après la formule d'adjonction (1.33), on a bien, pour tout couple (k, l) d'entiers positifs,

$$\begin{aligned} \langle f_k, g_l \rangle &= \langle S(e_k), (S^{-1})^*(e_l) \rangle = \langle S^{-1} \circ S(e_k), e_l \rangle \\ &= \langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l. \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi, pour tout h dans H ,

$$\begin{aligned} h = S(S^{-1}(h)) &= S\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}(h), e_k \rangle e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^{-1}(h), e_k \rangle S(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, (S^{-1})^*(e_k) \rangle S(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, g_k \rangle f_k \end{aligned}$$

et aussi

$$h = (S^*)^{-1} \circ S^*(h) = (S^*)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle S^*(h), e_k \rangle e_k\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle S^*(h), e_k \rangle (S^*)^{-1}(e_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, (S^*)^*(e_k) \rangle g_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, S(e_k) \rangle g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, f_k \rangle g_k.
\end{aligned}$$

Comme de plus (toujours en utilisant la formule d'adjonction (1.33))

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, g_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, (S^{-1})^*(e_k) \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle S^{-1}(h), e_k \rangle|^2 = \|S^{-1}(h)\|^2 \\
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, f_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, S(e_k) \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle S^*(h), e_k \rangle|^2 = \|S^*(h)\|^2,
\end{aligned}$$

on conclut à toutes les assertions de la proposition en invoquant les doubles encadrements (1.41) et (1.42). \diamond

Exemple 1.15. Dans l'espace de Hilbert $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ où les classes de fonctions

$$e_k : \theta \mapsto e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(correspondant aux harmoniques fondamentales) forment une base hilbertienne, on peut considérer les classes « perturbées » des fonctions obtenues en 2π -périodisant les

$$f_k : \theta \in [-\pi, \pi[\mapsto e^{i\omega_k \theta}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

où les ω_k sont des nombres réels avec

$$\mu := \max_k |\omega_k - k| < \frac{\log 2}{\pi}.$$

Comme on le vérifie aisément, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout choix de scalaires complexes $(\lambda_k)_{k=-N}^N$,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=-N}^N \lambda_k (f_k - e_k) \right\| &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-N}^N \lambda_k (e^{i(\omega_k - k)\theta} - 1) e^{ik\theta} \right|^2 d\theta \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-N}^N \lambda_k \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(i(\omega_k - k))^l \theta^l}{l!} \right) e^{ik\theta} \right|^2 d\theta \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi^l}{l!} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-N}^N \lambda_k (i(\omega_k - k))^l e^{ik\theta} \right|^2 d\theta \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi^l \mu^l}{l!} \left(\sum_{k=-N}^N |\lambda_k|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq (e^{\mu\pi} - 1) \left(\sum_{k=-N}^N |\lambda_k|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \tau \left(\sum_{k=-N}^N |\lambda_k|^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

avec $\tau < 1$ si $\mu < \log 2/\pi$. La proposition s'applique dans ce contexte et l'on peut associer un système $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ au système « perturbé » $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Notons que ceci nous autorise à travailler dans l'espace $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ avec un système de fonctions de référence qui correspondent à des classes de fonctions oscillantes, mais cette fois apériodiques, puisque les fréquences ω_k , $k \in \mathbb{Z}$, ne sont plus entières. Ceci est souvent très intéressant dans les problèmes pratiques liés à l'analyse de Fourier (sur laquelle on se penchera au chapitre 2 de ce cours).

1.12 Un procédé algorithmique : le *matching*

Comme on l'a déjà mentionné dans ce cours, les notions de système orthonormé et de base hilbertienne, si elles constituent des modèles mathématiques « idéaux » pour décomposer un élément dans un espace de Hilbert, ne sont pas des objets « robustes » lorsqu'on les perturbe. Il est souvent préférable du point de vue pratique de travailler avec des « *frames* » ou même des « dictionnaires » souvent très redondants : au contraire de ce qui se passe pour les systèmes orthonormés, les éléments distincts du dictionnaire sont autorisés cette fois à être corrélés entre eux, c'est-à-dire à ne plus être nécessairement orthogonaux relativement au produit scalaire avec lequel on travaille.

On utilise souvent, tant en mathématiques appliquées qu'en informatique, des algorithmes « gloutons » pour « pister⁴⁶ » un élément d'un espace de Hilbert contre un dictionnaire (en général redondant) d'éléments « test » pris dans ce même espace de Hilbert (en utilisant toute la force de l'algorithme de projection orthogonale).

Au titre d'annexe à ce cours (et de thème de problème de révision), voici un exemple d'un tel procédé algorithmique ; on peut ici le voir comme un thème d'exercice guidé, mais c'est une méthode très couramment utilisée dans la pratique, notamment en informatique (par exemple en imagerie), dans toutes les questions relatives à l'analyse, au stockage, au classement, à la compression (souvent aux fins de synthèse ultérieure), de données expérimentales. La « traque » d'un visage ou d'un objet dans un film vidéo, la confrontation d'une image médicale pathologique avec un dictionnaire d'images « type », constituent des exemples illustrant parfaitement ce type de démarche algorithmique d'inspiration naturellement hilbertienne.

Proposition 1.18 *Soit H un \mathbb{K} -espace de Hilbert, h un élément de H et D un dictionnaire d'éléments (tous de norme 1) que l'on suppose dénombrable et engendrant un sous-espace dense ; on suppose que l'on peut construire de manière itérative une suite d'éléments d_1, \dots, d_n, \dots du dictionnaire D (les d_j dépendent de h), une suite de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ (dépendant aussi de h) tels que*

$$\begin{aligned} |\langle h, d_1 \rangle| &= \max_{d \in D} |\langle h, d \rangle| \\ \lambda_1 d_1 &= \text{Proj}_{\mathbb{K}d_1}(h), \end{aligned}$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle h - \sum_{k=1}^n \lambda_k d_k, d_{n+1} \right\rangle \right| &= \max_{d \in D} \left| \left\langle h - \sum_{k=1}^n \lambda_k d_k, d \right\rangle \right| \\ \lambda_{n+1} d_{n+1} &= \text{Proj}_{\mathbb{K}d_{n+1}} \left(h - \sum_{k=1}^n \lambda_k d_k \right). \end{aligned}$$

Alors, la suite

$$(h_n)_{n \geq 1} := \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k d_k \right)_{n \geq 1}$$

46. C'est la l'origine de la terminologie anglo-saxonne de « *matching* ».

converge vers h dans H ; on dit qu'elle réalise le matching⁴⁷ du vecteur h contre le dictionnaire D .

Preuve. Posons $v_k := \lambda_k d_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et notons r_n le « reste » de la décomposition de h une fois l'étape n de l'algorithme effectuée, soit

$$r_n := h - \sum_{k=1}^n v_k$$

partant de $r_0 = h$. Si $1 \leq n < m$, on a

$$r_n = r_m + \sum_{k=n+1}^m v_k.$$

Comme on effectue à chaque cran de l'algorithme une projection orthogonale unidimensionnelle sur la droite vectorielle engendrée par le nouvel élément du dictionnaire trouvé (le procédé est très simple et très naïf!), on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|r_k\|^2 = \|r_{k-1}\|^2 - |\langle r_{k-1}, d_k \rangle|^2.$$

La suite $(\|r_k\|^2)_{k \geq 0}$ est donc une suite décroissante minorée, donc convergente. On en déduit aussi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|^2 < \infty. \quad (1.43)$$

Pour montrer dans un premier temps que la suite $(r_k)_{k \geq 0}$ converge, nous allons prouver qu'elle est de Cauchy. Fixons donc $\epsilon > 0$. Comme on le voit aisément, on a, si $1 \leq n < m$,

$$\|r_n - r_m\|^2 = \|r_n\|^2 + \|r_m\|^2 - 2\|r_m\|^2 - 2 \sum_{k=n+1}^m \operatorname{Re} \langle r_m, v_k \rangle.$$

Mais on a, pour tout k entre $n+1$ et m ,

$$|\langle r_m, v_k \rangle| \leq \|v_k\| \times \|v_{m+1}\|; \quad (1.44)$$

en effet, toujours pour k entre $n+1$ et m ,

$$\begin{aligned} |\langle r_m, v_k \rangle| &= \left| \langle r_m, \langle r_{k-1}, d_k \rangle d_k \rangle \right| \\ &= |\langle r_m, d_k \rangle| \times |\langle r_{k-1}, d_k \rangle| \\ &= \|v_k\| |\langle r_m, d_k \rangle| \\ &\leq \|v_k\| \times \|v_{m+1}\| \end{aligned}$$

du fait même du principe de l'algorithme, puisque $|\langle r_m, d_{m+1} \rangle|$ (qui est par définition la norme de v_{m+1}) maximise tous les $|\langle r_m, d \rangle|$ avec $d \in D$. On a donc

$$\|r_n - r_m\|^2 \leq \|r_n\|^2 - \|r_m\|^2 + 2\|v_{m+1}\| \sum_{k=n+1}^m \|v_k\| \quad (1.45)$$

47. Comme le dictionnaire D peut fort bien être redondant (on a d'ailleurs tout intérêt à ce qu'il en soit ainsi), la décomposition de h suivant D n'a rien d'unique; la méthode proposée dans ce scénario algorithmique fournit simplement une décomposition efficace en « pistant » (de manière « hiérarchique ») les éléments tests qui comptent le plus dans la représentation de h .

Or

$$\|v_{m+1}\| \sum_{k=n+1}^m \|v_k\| \leq \|v_{m+1}\| \sum_{k=1}^{m+1} \|v_k\|.$$

Mais la clause (1.43) implique

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\inf_{q \geq p} \left(\|v_q\| \sum_{k=1}^q \|v_k\| \right) \right) = 0. \quad (1.46)$$

Si n est assez grand, on est donc certain que

$$\|r_n\|^2 - \|r_m\|^2 \leq \epsilon.$$

On choisira n assez grand pour qu'il en soit ainsi. Il résulte de (1.46) qu'il existe $q > m$ tel que

$$\|v_q\| \sum_{k=1}^q \|v_k\| \leq \epsilon.$$

Mais on a

$$\|r_n - r_m\| \leq \|r_n - r_q\| + \|r_m - r_q\|.$$

En appliquant (1.45) (mais cette fois avec les couples (n, q) et (m, q) au lieu de (m, n)), on voit que

$$\max(\|r_n - r_q\|^2, \|r_m - r_q\|^2) \leq 3\epsilon.$$

En mettant tout ensemble, on voit donc que

$$\|r_n - r_m\| \leq 2\sqrt{3\epsilon}$$

pour ce choix de n , ce qui implique bien que la suite $(r_k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy, donc convergente. Mais on a aussi la convergence vers 0 de $\|v_k\|$ lorsque k tend vers l'infini. On a donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\langle r_k, d_{k+1} \rangle| = 0.$$

Le principe de l'algorithme (appliqué une fois de plus) nous assure que pour tout élément d du dictionnaire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\langle r_k, d \rangle| = 0.$$

Comme le dictionnaire forme une partie totale, la limite de la suite $(r_k)_{k \geq 0}$ doit être orthogonale à tous les atomes du dictionnaire, est par conséquent nulle, et la proposition est ainsi démontrée. \diamond

Remarque 1.4. On peut raffiner de beaucoup de manières cet algorithme. Une manière consiste par exemple (en utilisant le procédé de Gram-Schmidt) à faire en sorte qu'à chaque étape le reste r_n soit orthogonal aux éléments tests atomes d_1, \dots, d_n du dictionnaire précédemment sélectionnés. Ceci évite de ré-utiliser le dictionnaire complet à chaque cran du processus. Le risque est de réintroduire la fragilité liée au souci d'orthogonalité.

Chapitre 2

L'analyse de Fourier et ses applications

2.1 Introduction

Si l'analyse de Fourier puise ses sources dans le travail de pionnier de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)¹ et en particulier dans son mémoire fondateur « *Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* » de 1807 où il introduit la théorie des séries trigonométriques, elle a fédéré tout au long du XIX-ème et du XX-ème siècles tant des mathématiciens (on retrouvera dans ce cours les noms de Friedrich Bessel, Karl Weierstrass, Gustav Lejeune Dirichlet, Lipót Fejér, Alfred Tauber, Johannes Radon, Michaël Plancherel,..., théoriciens des nombres ou analystes), que des physiciens (on y croitera Werner Heisenberg avec le célèbre principe d'incertitude, Denis Gabor, Josiah Gibbs, des opticiens comme Joseph von Fraunhofer) et des ingénieurs mathématiciens ou informaticiens (Claude Shannon, James W. Cooley et John W. Tukey,...). À travers ce second chapitre, où l'on présentera l'analyse de Fourier tant en mathématiques discrètes qu'en mathématiques « continues », on tentera de mettre en lumière non seulement les idées et résultats mathématiques, mais aussi la manière dont ces idées et ces résultats s'insèrent aujourd'hui de manière essentielle (et surtout depuis la « révolution numérique » survenue à l'aube des années 1970 avec le célèbre algorithme proposé par les ingénieurs américains James Cooley et John Tukey autour de 1965) dans de nombreuses branches relevant des mathématiques, de la physique, de l'ingénierie ou de l'informatique : traitement des signaux et des images, théorie de l'information, cryptologie et cryptanalyse, optique, physique quantique, tomographie en instrumentation médicale (CAT-Scanner, IRM), analyse et synthèse du son et de la parole, téléphonie mobile et télécommunications,...

Si les mathématiques (avec leur présentation pouvant parfois paraître « académique ») constituent le fil directeur des notes de ce chapitre, il est évident qu'il convient de prendre ici un certain recul qui permette aussi de voir ces mathématiques « en situation » dans le monde qui nous entoure ; cela était déjà vrai avec l'analyse hilbertienne et l'algorithmique « à la Pythagore » présentée au premier chapitre,

1. Mathématicien, mais aussi conseiller scientifique et compagnon de Napoléon qu'il accompagna avec Champollion durant la campagne d'Égypte, homme politique aussi (il fut préfet de l'Isère et l'Université Grenoble 1 porte aujourd'hui son nom), Joseph Fourier a marqué profondément l'essor conjoint des mathématiques et de la physique à l'aube du XIX-ème siècle. Il faut veiller à ne pas le confondre avec son homonyme le philosophe François-Marie Charles Fourier (1772-1837), le père du « Fouriérisme » et fondateur de l'École Sociétaire.

c'est bien sûr encore plus criant pour cette seconde partie du cours, évidemment très en prise avec la première.

Nous suivrons l'analyse de Fourier depuis le cadre de la dimension finie (avec les modèles \mathbb{R}^N ou \mathbb{C}^N), relevant de l'algèbre et de l'arithmétique, jusqu'aux cadres discret dénombrable ($l_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{Z}^n)$) et continu ($L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}^n)$ ou $L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{T}^n)$), relevant, eux, plus de l'analyse car la notion de dimension infinie y est présente ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On insistera en particulier sur le cadre $p = 2$ présentant l'intérêt majeur d'être propice à l'algorithmique hilbertienne « à la Pythagore » étudiée au chapitre 1.

2.2 Transformation de Fourier dans le cadre discret

Cette section sera dévolue au cadre des mathématiques discrètes : notre premier modèle sera celui des espaces (de Hilbert) $l_{\mathbb{K}}^2(\{0, \dots, N-1\})$ (espace des signaux digitaux de longueur N réels ou complexes) ou $l_{\mathbb{K}}^2(\{0, \dots, N_1-1\} \times \{0, \dots, N_2-1\})$, (espace des images digitales de taille $N_1 \times N_2$), \mathbb{K} désignant le corps des réels ou celui des complexes. Ensuite, notre modèle sera celui des espaces $l_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{Z})$, $p \geq 1$, parmi lesquels les cas $p = 1$ et bien sûr $p = 2$ (c'est le modèle, on l'a vu, de \mathbb{K} -espace de Hilbert séparable²) retiendront surtout notre attention.

Notre souci est d'introduire la transformation de Fourier avec les deux motivations qui l'accompagnent :

- fournir un outil puissant de calcul pour transformer une opération (la « convolution ») omniprésente mais difficile à gérer en une opération autrement plus maniable (la multiplication) ;
- permettre la décomposition (dite *harmonique*) des phénomènes discrets en phénomènes périodiques (toujours discrets).

2.2.1 La transformation de Fourier discrète

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif. Un système orthonormé du \mathbb{C} -espace de Hilbert $l_{\mathbb{C}}^2(\{0, \dots, N-1\})$ des vecteurs $(s(k))_{k=0, \dots, N-1}$ de nombres complexes, équipé du produit scalaire

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} s_1(k) \overline{s_2(k)},$$

est donné par les suites $(e_j(k))_{k=0, \dots, N-1}$, $j = 0, \dots, N-1$, où $e_j(k) = 1$ si $j = k$, 0 sinon ; c'est la classique base canonique de \mathbb{C}^n . Mais il existe d'autres systèmes orthogonaux particulièrement intéressants ; l'un d'eux est constitué des suites

$$\left(\exp(2i\pi jk/N) \right)_{k=0, \dots, N-1} = \left(\cos(2jk\pi/N) + i \sin(2jk\pi/N) \right)_{k=0, \dots, N-1},$$

$j = 0, \dots, N-1$. Le signal digital $f_j := (\exp(2i\pi jk/N))_{k=0, \dots, N-1}$ correspond à la suite des valeurs prises successivement aux points $t = 0, t = 1, \dots, t = N-1$, par la

2. On choisit ici l'indexation par \mathbb{Z} plutôt que par \mathbb{N} ou \mathbb{N}^* parce que \mathbb{Z} est équipé avec l'addition d'une structure de groupe commutatif, ce qui jouera un rôle précieux à la fois dans la définition et le maniement de la transformation de Fourier.

fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(2i\pi jt/N)$$

qui est une fonction du type $t \longmapsto \exp(i\omega_j t)$ avec $\omega_j = 2\pi j/N$, donc une fonction périodique de fréquence j/N . Le système orthogonal constitué des N signaux digitaux f_0, \dots, f_{N-1} constitue un système totalement différent du système orthonormé constitué par les $e_j = (e_j(k))_{k=0, \dots, N-1}$; il est constitué de signaux discrets « oscillants » et non de fonctions « pic »; en divisant ces vecteurs par \sqrt{N} , on obtient donc un nouveau système orthonormé $(f_j)_{j=0, \dots, N-1}$ de \mathbb{C}^N constitué de vecteurs correspondant à des signaux digitaux par essence très différents des signaux « pic » e_j , $j = 0, \dots, N-1$, correspondant aux vecteurs de la base canonique.

Changer de base orthonormée (ici remplacer $(e_j)_{j=0, \dots, N-1}$ par $(f_j)_{j=0, \dots, N-1}$) pour exprimer un vecteur de \mathbb{C}^N (que l'on pensera ici comme un signal digital à valeurs complexes défini sur $\{0, \dots, N-1\}$) ne change bien sûr en rien le carré de la norme l^2 du vecteur des coordonnées; si

$$s = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j e_j = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\xi}_j f_j,$$

on a bien sûr

$$\|\xi\|_2^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |\tilde{\xi}_j|^2 = \|\tilde{\xi}\|_2^2 = \|s\|^2.$$

Mais il est une quantité qui, elle, peut changer de manière drastique, c'est l'entropie du signal lorsqu'il est exprimé dans la base $\mathcal{B} = (e_j)_{j=0, \dots, N-1}$ (resp. dans la base $\tilde{\mathcal{B}} = (f_j)_{j=0, \dots, N-1}$), définie par

$$\begin{aligned} \text{Entr}[s; \mathcal{B}] &:= - \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j|^2 \log_2 |\xi_j|^2 \\ (\text{resp. } \text{Entr}[s; \tilde{\mathcal{B}}] &:= - \sum_{j=0}^{N-1} |\tilde{\xi}_j|^2 \log_2 |\tilde{\xi}_j|^2). \end{aligned}$$

Cette notion d'entropie se révèle être (pensez à son incarnation en thermodynamique) un indicateur du chaos; plus l'entropie d'un signal digital exprimé dans une base est petite, mieux ce signal digital se présente comme « organisé » dans la base considérée, ce qui se lit aussi de la manière suivante: plus forte sera la pente du graphe de la fonction $j \longmapsto |\xi_j|$ obtenue en réorganisant les $|\xi_j|$ suivant l'indice j de manière à ce que cette fonction soit décroissante. Trouver une base orthonormée de \mathbb{C}^N dans laquelle l'entropie soit minimale est évidemment un challenge très intéressant aux fins d'applications futures (compression, transmission, stockage, etc.). Il est intuitivement évident que la base canonique $(e_j)_{j=0, \dots, N-1}$ ne saurait être la base orthonormée de ce point de vue la plus adéquate pour encoder un signal digital « oscillant » de même que bien sûr la base $(f_j)_{j=0, \dots, N-1}$ est sûrement bien moins intéressante que ne l'est la base canonique pour encoder une combinaison linéaire de fonctions « pic ». C'est face à ce type de problématique que se situe l'intérêt de l'analyse de Fourier discrète.

En effet, prendre la transformée de Fourier discrète d'un signal digital

$$s = (s(k))_{k=0, \dots, N-1},$$

ce n'est rien d'autre que précisément calculer (au facteur \sqrt{N} près) les coefficients de s dans cette nouvelle base orthonormée $(f_j)_{j=0,\dots,N-1}$ alors que les nombres $s(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ sont les coordonnées de s dans la base canonique.

Proposition 2.1 *La N -transformée de Fourier discrète d'un élément*

$$(s(0), \dots, s(N-1))$$

de $l_{\mathbb{C}}^2(\{0, \dots, N-1\})$ est par définition l'élément $(\widehat{s}(0), \dots, \widehat{s}(N-1))$ défini par

$$\begin{aligned} \widehat{s}(j) &:= \left\langle s, (\exp(2i\pi jk/N))_{k=0,\dots,N-1} \right\rangle := \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp\left(-\frac{2i\pi jk}{N}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \left[\exp\left(-i\frac{2\pi j}{N}t\right) \right]_{t=k}, \quad j = 0, \dots, N \end{aligned} \quad (2.1)$$

Il s'agit d'une transformation linéaire inversible de \mathbb{C}^N dans \mathbb{C}^N , dont l'application inverse est donnée par

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{s}(j) \exp \frac{2i\pi jk}{N}$$

car la matrice symétrique $M_N = \left[\exp(-2i\pi jk/N) \right]_{0 \leq j, k \leq N-1}$ vérifie

$$M_N \cdot (M_N)^* = N I_N.$$

Preuve. Pour voir que $M_N \cdot (M_N)^*$ est N fois la matrice identité, on utilise simplement le fait que $W_N = \exp(-2i\pi/N)$ est une racine de $X^N = 1$ et que toutes les racines ξ de cette équation autres que $X = 1$ (c'est à dire tous les W_N^k , $k = 1, \dots, N-1$) vérifient

$$1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{N-1} = 0.$$

Le calcul de $M_N \cdot (M_N)^*$ est alors considérablement simplifié. \diamond

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un système orthogonal intéressant de $l_{\mathbb{R}}^2(\{0, \dots, N-1\})$ est celui qui est donné par les suites

$$\left(\alpha_j \cos \frac{\pi j(2k+1)}{2N} \right)_{k=0,\dots,N-1}$$

avec $\alpha_0 = \sqrt{1/N}$ et $\alpha_j = \sqrt{2/N}$ si $j > 0$ (ces suites forment, elles, un système orthonormé de $l_{\mathbb{R}}^2(\{0, \dots, N-1\})$) et la transformation qui associe au vecteur

$$(s(0), \dots, s(N-1)) \in \mathbb{R}^n$$

le vecteur de coordonnées

$$\begin{aligned} s^{\cos}(j) &:= \left\langle s, \left(\alpha_j \cos \frac{\pi j(2k+1)}{2N} \right)_{k=0,\dots,N-1} \right\rangle \\ &= \alpha_j \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \cos \frac{\pi j(2k+1)}{2N} \\ &= \alpha_j \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \left[\cos \frac{\pi j(2t+1)}{2N} \right]_{t=k}, \quad j = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

est appelée *N-transformation en cosinus discrète*. La transformation inverse est donnée par les formules

$$s(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j s^{\cos}(j) \cos \frac{\pi j(2k+1)}{2N}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Il faut donc interpréter ces transformations (*N-transformation de Fourier discrète* dans le cas complexe ou *N-transformation en cosinus discrète* dans le cas réel) comme l'effet sur la suite des coordonnées de changements de base; dans les deux cas, on cherche à décomposer le vecteur $(s(0), \dots, s(N-1))$ de \mathbb{K}^N (exprimé ainsi dans la base canonique de \mathbb{K}^N) dans une nouvelle base constituée de fonctions oscillantes discrétisées aux points $0, \dots, N-1$, la gamme de fréquences étant $[0, 2\pi[$ (les fréquences étant $0, 2\pi/N, \dots, 2(N-1)\pi/N$)³. Ces transformations se transposent au cadre des espaces de Hilbert

$$l_{\mathbb{K}}^2(\{0, \dots, N_1-1\} \times \{0, \dots, N_2-1\}).$$

Par exemple, la (N_1, N_2) -transformée de Fourier discrète d'une matrice

$$[I(k_1, k_2)]_{\substack{0 \leq k_1 \leq N_1-1 \\ 0 \leq k_2 \leq N_2-1}}$$

est la matrice $[\widehat{I}(j_1, j_2)]_{\substack{0 \leq j_1 \leq N_1-1 \\ 0 \leq j_2 \leq N_2-1}}$ dont les entrées sont donnés par

$$\widehat{I}(j_1, j_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} I(k_1, k_2) \exp\left(-\frac{2i\pi k_1 j_1}{N_1}\right) \exp\left(-\frac{2i\pi k_2 j_2}{N_2}\right)$$

pour $j_1 = 0, \dots, N_1-1$, $j_2 = 0, \dots, N_2-1$. Les formules inverses sont

$$I(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} \widehat{I}(j_1, j_2) \exp\frac{2i\pi k_1 j_1}{N_1} \exp\frac{2i\pi k_2 j_2}{N_2}$$

pour $k_1 = 0, \dots, N_1-1$, $k_2 = 0, \dots, N_2-1$. Dans les versions bi-dimensionnelles, on privilégie souvent pour des raisons pratiques de symétrie les transformations réelles, donc plutôt la (N_1, N_2) -transformation en cosinus discrète plutôt que la (N_1, N_2) -transformation de Fourier discrète⁴.

Pour comprendre l'importance de la transformation de Fourier du point de vue opérationnel (on retrouvera toujours cette propriété par la suite), prenons deux suites $(s_1(0), \dots, s_1(N-1))$ et $(s_2(0), \dots, s_2(N-1))$ de $l_{\mathbb{K}}^2(\{0, \dots, N-1\})$ et associons

3. En fait, cela n'aurait pas grand sens d'envisager des fréquences au delà de ce seuil 2π car la discrétisation aux entiers $0, 1, \dots, N-1$ ne rendrait absolument plus compte des oscillations! Notons que $\exp(-2i\pi jk/N) = \exp(2i\pi j(N-k)/N)$ pour $j = [N/2] + 1, \dots, N$, ce qui fait que l'on peut aussi considérer que la gamme des fréquences explorées (si l'on entend prendre un intervalle symétrique autour de l'origine) est $[-\pi, \pi]$.

4. C'est par exemple la version bi-dimensionnelle de la transformation en cosinus discrète qui est l'un des ingrédients majeurs des algorithmes de traitement ou de compression d'image tels JPEG (la compression se faisant au niveau de la transformée en cosinus discrète de blocs 8×8 en lesquels le tableau (N_1, N_2) a été préalablement décomposé).

leur les deux polynômes

$$P_1(X) := s_1(0) + s_1(1)X + \cdots + s_1(N-1)X^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} s_1(k)X^k$$

$$P_2(X) := s_2(0) + s_2(1)X + \cdots + s_2(N-1)X^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} s_2(k)X^k.$$

Le reste de $P_1(X)P_2(X)$ après division euclidienne par $X^N - 1$ est le polynôme

$$\sum_{k=0}^{N-1} (s_1 *_N s_2(k)) X^k,$$

où

$$s_1 *_N s_2(k) := \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{s}_1(k-l)\tilde{s}_2(l) = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{s}_2(k-l)\tilde{s}_1(l), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2.2)$$

\tilde{s}_1 et \tilde{s}_2 désignant les fonctions définies sur \mathbb{Z} et à valeurs dans \mathbb{K} prolongeant s_1 et s_2 par 1-périodicité. On a alors la proposition (et définition) immédiate suivante.

Proposition 2.2 *L'opération $(s_1, s_2) \mapsto s_1 *_N s_2$ de $(l_{\mathbb{K}}^2(\{0, \dots, N-1\}))^2$ dans $l_{\mathbb{K}}^2(\{0, \dots, N-1\})$ est appelée N -convolution cyclique. On a*

$$\widehat{s_1 *_N s_2}(j) = \widehat{s}_1(j) \times \widehat{s}_2(j), \quad \forall j \in \{0, \dots, N-1\}, \quad (2.3)$$

ce qui fait de la N -transformée de Fourier discrète un isomorphisme entre le groupe $(l_{\mathbb{K}}^2(\{0, \dots, N-1\}), *_N)$ et $l_{\mathbb{K}}^2(\{0, \dots, N-1\})$ équipé de la multiplication « terme à terme ».

Preuve. On écrit

$$P_1(X)P_2(X) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} (s_1 *_N s_2(k)) X^k \pmod{X^N - 1},$$

puis on pose $X = \exp(-2i\pi j/N)$; on obtient ainsi

$$\widehat{s}_1(j)\widehat{s}_2(j) = \sum_{k=0}^{N-1} (s_1 *_N s_2(k)) \exp(-2i\pi jk/N) = \widehat{s_1 *_N s_2}(j),$$

ce qui donne le résultat voulu. \diamond

Ce résultat très simple (mais d'un intérêt majeur⁵) soutend l'opération algorithmique de *multiplication rapide* de polynômes. Multiplier deux polynômes de degré au plus $N-1$ est une opération qui « consomme » N^2 multiplications, comme il est immédiat de s'en convaincre si l'on utilise aucune astuce particulière. Il en est de même du calcul de la N -transformée de Fourier discrète d'un signal digital de longueur N (on doit multiplier un vecteur par une matrice carrée de taille $N \times N$), sauf dans le cas certes très particulier (mais pourtant essentiel) $N = 2$ où aucune

5. On en retrouvera de nombreuses versions tout au long de ce cours, transposées du cadre fini au cadre discret, du cadre discret au cadre continu,...

multiplication n'entre en jeu (seulement une addition et une soustraction⁶). On comprend aisément que si N est très grand (pensez à $N = 10^6$), le coût d'un tel calcul numérique ($N^2 = 10^{12}$) échappe très vite aux normes raisonnables !

Mais il y eut dans cette histoire un miracle ! Il fallut attendre 1965 pour que deux ingénieurs informaticiens américains, James William Cooley et John Wilder Tukey, mettent au point un algorithme récursif très simple⁷ exploitant la simplicité du cas $N = 2$ et permettant, lorsque $N = 2^p$, d'effectuer le calcul de la N -transformée de Fourier discrète d'un signal digital avec $p \times N/2 = p \times 2^{p-1}$ et non plus $N^2 = 2^{2p}$ multiplications ! Le gain est énorme et déclencha à l'aube des années 1970 ce qui allait être la « révolution numérique ». Jusque là resté instrument théorique au service du mathématicien ou du physicien, la transformation de Fourier allait devenir le formidable outil technologique qu'elle n'a cessé d'être depuis dans tous les domaines (télécommunications, imagerie, équations aux dérivées partielles, ...).

La transformation de Fourier lorsque N est une puissance de 2 devient la *Fast Fourier Transform* (FFT) et l'on comprend pourquoi les écrans de télévision ou les consoles d'ordinateur sont souvent des configurations à 1024 sur 1024, 512 sur 256, ..., pixels. Un rôle majeur est joué dans de tels algorithmes par une racine 2^p de l'unité, à savoir $W_{2^p} = \exp(-2i\pi/2^p)$. Dans le cadre arithmétique, les nombres de Fermat (de la forme $2^{2^m} + 1$), avec m grand (donc *a fortiori* certainement de la forme $2^p + 1$) seront amenés jouer un grand rôle car le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/(2^{2^m} + 1)\mathbb{Z}$ (de cardinal précisément une puissance de 2, à savoir 2^{2^m}) sera dans ce cas cyclique (puisque $2^{2^m} + 1$ est premier) et engendré par un élément a auquel on fera jouer le rôle de $W_{2^{2^m}}$; des algorithmes copiés de l'algorithme de Cooley-Tukey pourront ainsi être utilisés pour implémenter rapidement dans $\mathbb{Z}/(2^{2^m} + 1)\mathbb{Z}$ l'opération de corrélation cyclique. Les calculs sont cette fois des calculs arithmétiques, donc sans pertes, et les applications en codage/décodage, cryptographie, traitement de l'information, analyse et synthèse d'images (encodées au format « entier » RGB) sont légion. L'algorithme de FFT devient dans ce cadre arithmétique l'algorithme de FNT (*Fermat Number Transform*). C'est l'algorithme par exemple découvert par R. Crandall et C. Pomerance (2005), inspiré de telles idées et basé sur le principe de la multiplication rapide des entiers via la prise spectre arithmétique qui permet aujourd'hui la multiplication rapide d'entiers énormes et, par exemple, la découverte de nouveaux nombres de Mersenne (nombres premiers de la forme $2^m - 1$, on en est en 2012 au 46-ième!) *via* l'utilisation des tests de primalité.

6. La 2-transformation de Fourier discrète se résume aux deux formules $\widehat{s}(0) = s(0) + s(1)$ et $\widehat{s}(1) = s(0) - s(1)$; c'est d'ailleurs le seul cas où la matrice de la N -transformation de Fourier discrète (dite dans ce cas « matrice papillon » car c'est sous la forme de ce type de diagramme que l'on schématise cette transformation) est une matrice réelle.

7. On trouvera par exemple une présentation succincte de l'algorithme de Cooley-Tukey dans mes notes du cours de l'UE N1MA303 : « Calcul scientifique et symbolique et initiation aux logiciels », en ligne sur <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/CSSL.pdf>, section 3.1.4 (on trouvera le code MATLAB sur la page <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/initiationMATLAB/Corrige-TP5>). La clef de cet algorithme tient simplement dans la remarque $W_{2^p}^{2^{p-1}} = -1$ si $W_N := \exp(-2i\pi/N)$, les entrées du vecteur colonne s étant préalablement triées entre entrées d'indice pair et entrées d'indice impair.

2.2.2 La transformée de Fourier sur $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$

Comme on l'a vu dans la section précédente 2.2.1, le calcul de la transformée de Fourier d'un élément $s = (s(0), \dots, s(N-1))$ de $l_{\mathbb{C}}^2(\{0, \dots, N-1\})$ revient à calculer le produit scalaire de s avec les versions échantillonnées aux points $0, \dots, N-1$ des fonction oscillantes

$$t \mapsto \exp(i\omega_j t), \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Plus N augmente, plus l'éventail de fréquences $\{j/N; j = 0, \dots, N-1\}$ remplit l'intervalle $[0, 1[$. Le fait maintenant d'imaginer que N tende vers $+\infty$ nous incite à définir la transformée de Fourier d'une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ (en calquant les formules 2.1) comme suit :

Définition 2.1 Soit $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un élément de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$. La transformée de Fourier (ou spectre) de s est la fonction continue 2π -périodique sur \mathbb{R} , à valeurs en général complexes⁸ :

$$\widehat{s} : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k e^{-ik\omega}. \quad (2.4)$$

L'application $\mathcal{F} : s \mapsto \widehat{s}$ ainsi définie est une application linéaire continue injective du \mathbb{C} -espace de Banach $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ dans le \mathbb{C} -espace de Banach $C^0(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ des fonctions continues 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , équipé de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

Preuve des affirmations incluses dans la définition. La convergence des deux séries de fonctions $(\omega \mapsto s_k e^{-ik\omega})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\omega \mapsto s_{-k} e^{ik\omega})_{k \in \mathbb{N}^*}$ étant une convergence normale puisque

$$|s_{\pm k} e^{-\pm ik\omega}| = |s_{\pm k}|$$

et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s_k| = \|s\|_1 < +\infty$$

par hypothèses, le spectre \widehat{s} d'un élément $s \in l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ est une fonction continue (en général à valeurs complexes, sauf dans le cas particulier où $s_{-k} = \overline{s_k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$). De plus, on a

$$\|\widehat{s}\|_{\infty} := \sup_{[0, 2\pi]} |\widehat{s}| \leq \|s\|_1,$$

ce qui prouve la continuité de \mathcal{F} .

Il est immédiat de retrouver s à partir de son spectre (cela prouvera donc l'injectivité de \mathcal{F}) *via* les relations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{s}(\omega) e^{ik\omega} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} s_l e^{-il\omega} \right) e^{ik\omega} d\omega \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_l \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\omega(k-l)} d\omega \right) = s_k \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (c'est la convergence normale qui permet l'interversion série/intégrale à la seconde ligne du calcul ci-dessus). \diamond

8. Le spectre de $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est à valeurs réelles si et seulement si $s_{-k} = \overline{s_k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2.1. Attention ! Il est faux que $\mathcal{F} : s \mapsto \widehat{s}$, considérée comme une application injective de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ dans l'espace $C^0(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, soit surjective. Par exemple, si $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ est une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, alors le lemme d'Abel (uniforme) montre que la suite de fonctions

$$\left(\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{l=1}^k \epsilon_l \frac{\sin l\omega}{l} \right)_{k \geq 1}$$

converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction continue 2π -périodique ; pour le voir, on utilise le fait qu'il existe une constante absolue C telle que

$$\left\| \omega \mapsto \sum_{k=1}^N \frac{\sin k\omega}{k} \right\|_{\infty} \leq C \quad \forall N \in \mathbb{N}^* ;$$

en effet⁹ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\sin k\omega}{k} &= \int_0^{\omega} \left(\sum_{k=1}^N \cos ku \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\omega} \left(\sum_{k=-N}^N e^{iku} - 1 \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\omega} \left(\frac{\sin(N+1/2)u}{\sin u/2} - 1 \right) du, \end{aligned}$$

et l'on a à la fois

$$\left| \int_0^{\omega} \frac{\sin Nu}{u} du \right| \leq K_1, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

et

$$\int_0^{\omega} \left| \frac{\sin(N+1/2)u}{2 \sin u/2} - \frac{\sin Nu}{u} \right| du \leq K_2, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

pour deux constantes absolues K_1 et K_2 . Si l'on choisit par exemple comme suite $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ la suite $((\log(k+1))^{-1})_{k \geq 1}$, on constate que la fonction

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega}{k \log(k+1)}$$

est une fonction continue 2π -périodique qui ne peut pas être la transformée de Fourier d'une suite de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ puisque la série de Bertrand $[1/(p \log p)]_{p \geq 2}$ est divergente !

On a vu dans le cours de théorie de l'intégration (proposition 4.9 du polycopié de l'UE MA5012) le rôle essentiel que revêtait l'opération interne de *convolution discrète* entre éléments de $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), opération qui à deux suites $(s_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(s_{2,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z})$ associe la suite de terme général

$$(s_1 * s_2)_k := \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1,l} s_{2,k-l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1,k-l} s_{2,l} = (s_2 * s_1)_k.$$

L'importance de cette opération tient surtout au fait que tout opérateur linéaire continu \mathcal{L} de $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z})$ dans lui-même invariant par translation (c'est-à-dire tel que $\mathcal{L}[(s_{k-k_0})_k] = (\mathcal{L}[s]_{k-k_0})_k$ pour tout $s = (s_k)_k$ dans $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z})$ et pour tout k_0 dans \mathbb{Z} ¹⁰) se représente précisément comme un tel opérateur de convolution

$$\mathcal{L} : s \mapsto h * s,$$

9. Le calcul sera conduit plus en détails plus loin, voir la suite d'égalités 2.21 dans la section 2.3.3.

10. Un tel opérateur est aussi appelé *boîte noire* ou *filtre digital*.

où $h = \mathcal{L}[e_0]$, e_0 désignant la suite $(\delta_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$, est un élément particulier de $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z})$ dit *réponse impulsionnelle* du filtre digital \mathcal{L} .

La proposition 2.2 devient dans ce nouveau contexte l'énoncé suivant, confirmant le rôle « opérationnel » de la transformation de Fourier, rôle que l'on retrouvera dans le contexte continu plus tard :

Proposition 2.3 *Si s_1 et s_2 sont deux éléments de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$, on a*

$$\widehat{s_1 * s_2}(\omega) = \widehat{s_1}(\omega) \times \widehat{s_2}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Preuve. C'est une application du théorème de Fubini et de l'invariance par translation de la mesure de décompte sur \mathbb{Z} : on écrit

$$\begin{aligned} \widehat{s_1 * s_2}(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1,l} s_{2,k-l} \right) e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1,l} s_{2,k-l} e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1,l} s_{2,k-l} e^{-i\omega(k-l)} e^{-i\omega l} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1,l} e^{-i\omega l} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{2,k-l} e^{-i\omega(k-l)} \right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1,l} e^{-i\omega l} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{2,k} e^{-i\omega k} \right) \\ &= \widehat{s_1}(\omega) \times \widehat{s_2}(\omega). \end{aligned}$$

On a appliqué Fubini deux fois (après avoir vérifié qu'en mettant des modules partout l'intégrale double est convergente, ce qui est vrai car les exponentielles introduites sont de module 1, donc invisibles lorsque l'on prend les modules des termes) : de la ligne 1 à la ligne 2, puis de la ligne 3 à la ligne 4. De la ligne 4 à la ligne 5, c'est l'invariance par translation de la mesure de comptage que l'on a utilisé. Mais il est clair que la formule $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$ (pour passer de la ligne 2 à la ligne 3) a joué un rôle décisif (c'est en fait la clef du problème). \diamond

Tout ce que nous avons fait dans cette sous-section s'adapte pour définir naturellement la transformée de Fourier sur $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z}^n)$. Par exemple, dans le cas $n = 2$ (correspondant au cadre des images digitales), si $[I(k_1, k_2)]_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}}$ est un tableau (indexé par \mathbb{Z}^2) d'entrées complexes tel que

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |I(k_1, k_2)| < \infty,$$

le spectre de I est la fonction continue (2π -périodique en les deux variables) :

$$(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \widehat{I}(\omega_1, \omega_2) := \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} I(k_1, k_2) e^{-i(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2)}. \quad (2.5)$$

La convolution bidimensionnelle¹¹ de deux tels tableaux I_1 et I_2 est le tableau $I_1 * I_2$ défini par

$$\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, (I_1 * I_2)(k_1, k_2) = \sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}} I_1(l_1, l_2) I_2(k_1 - l_1, k_2 - l_2)$$

11. On parle aussi de « masque » à propos d'une image I agissant par convolution sur toutes les autres.

$$= \sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}} I_1(k_1 - l_1, k_2 - l_2) I_2(l_1, l_2) \quad (2.6)$$

et on a la formule

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2, \widehat{I_1 * I_2}(\omega_1, \omega_2) = \widehat{I_1}(\omega_1, \omega_2) \times \widehat{I_2}(\omega_1, \omega_2). \quad (2.7)$$

2.2.3 La transformée de Fourier sur $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$

L'espace $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ (contenant strictement $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ ¹²) est un cadre de travail plus propice que celui de l'espace $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$, ce pour deux raisons : d'une part parce que c'est un \mathbb{C} -espace de Hilbert (et l'on peut y faire de la géométrie « à la Pythagore »), d'autre part parce que la norme l^2 correspond à une entité « physique », la notion d'énergie. Nous allons donc dans ce cadre élargi (par rapport au cadre de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$) définir la notion de spectre.

On a vu au chapitre 1 (exemple 1.4) que le système constitué des fonctions

$$\omega \mapsto \exp(ik\omega), \quad k \in \mathbb{Z},$$

constitue une base hilbertienne du \mathbb{C} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$. Par conséquent, si $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, la série bilatère des classes de fonctions

$$\omega \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k e^{-ik\omega}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

converge (au niveau des classes dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$) vers un élément \widehat{s} de $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 2.2 On appelle spectre \widehat{s} d'un élément $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ l'élément \widehat{s} de $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ (c'est donc une classe de fonction mesurable de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodique et d'énergie finie sur $[0, 2\pi]$) tel que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \widehat{s}(\omega) - \sum_{k=-N}^N s_k e^{-ik\omega} \right|^2 d\omega = 0.$$

L'application $\mathcal{F} : s \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) \mapsto \widehat{s} \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ réalise une isométrie linéaire bijective entre ces deux espaces, qui coïncide sur $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ avec la transformation \mathcal{F} de la définition 2.1.

Remarque 2.2. Le fait que l'application \mathcal{F} de la définition 2.2 réalise une isométrie correspond à un principe physique, le principe de *conservation d'énergie*; nous verrons en effet ultérieurement que la transformation de Fourier \mathcal{F} (ou encore la prise de spectre), pensée dans le cadre continu et non plus comme ici discret, a une incarnation concrète en deux dimensions ou trois (on le verra dans une section ultérieure lorsque nous envisagerons la transformation de Fourier agissant sur $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n)$), à savoir le processus de diffraction à travers une lentille ou un prisme en optique ou en cristallographie. La formule qui rend compte de ce principe (suivant le premier volet de la proposition 1.9), à savoir ici

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega, \quad \forall s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}),$$

12. Si $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est dans $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ avec $\|s\|_1 \leq 1$, alors on a $|s_k| \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et par conséquent $\sum_k |s_k|^2 \leq \sum |s_k| = \|s\|_1 \leq 1$.

est, dans ce cadre discret, connue comme la formule de Parseval¹³. Cette formule se « duplique » de la manière suivante : si $s_1 = (s_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ et $s_2 = (s_{2,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ sont deux éléments de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{s}_1(\omega) \overline{\widehat{s}_2(\omega)} d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{1,k} \overline{s_{2,k}}. \quad (2.8)$$

Remarque 2.3. Attention! Au contraire de ce qui se passe concernant le spectre \widehat{s} d'une suite $s \in l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$, le spectre d'une suite s de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ est une classe de fonctions, non une fonction, donc n'a pas de définition ponctuelle ($\widehat{s}(\omega_0)$ pour une valeur spécifique de ω_0 n'a aucun sens!).

Contrairement à ce qui se passait dans le cadre de $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z})$, la convolution n'est plus une opération interne sur $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Cependant, du fait du théorème de Young dans le cadre discret (théorème 4.3 du cours de théorie de l'intégration de l'UE MA5012), on a le résultat suivant. Si $s_1 = (s_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ et $s_2 = (s_{2,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ sont deux éléments de $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$, on peut encore définir leur convolution (sur le modèle de ce que l'on a fait pour définir la convolution entre éléments de $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z})$); en effet, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |s_{1,l}| |s_{2,k-l}| \leq \sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |s_{1,l}|^2} \times \sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |s_{2,k-l}|^2} = \|s_1\|_2 \times \|s_2\|_2,$$

ce qui prouve que

$$s_1 * s_2 := \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} s_{1,l} s_{2,k-l} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

est bien défini : c'est un élément de $l_{\mathbb{K}}^{\infty}(\mathbb{Z})$ avec

$$\|s_1 * s_2\|_{\infty} \leq \|s_1\|_2 \|s_2\|_2.$$

On a toujours commutativité et associativité de cette opération, e_0 est élément neutre, et l'opération coïncide (si on la restreint à $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z})$) avec celle qui a été définie dans le cadre l^1 .

Dans ce contexte l^2 , nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 2.4 Soit \mathcal{L} un opérateur linéaire continu de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même tel que, pour tout $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, on ait¹⁴

$$\mathcal{L}[(s_{k-k_0})_{k \in \mathbb{Z}}] = \left(\mathcal{L}[s]_{k-k_0} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \forall k_0 \in \mathbb{Z}. \quad (2.9)$$

Si $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \mathcal{L}[e_0]$, on a $\widehat{h} \in L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{T})$. De plus, pour tout $s \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, on a

$$\mathcal{L}[s] = s * h \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$$

13. C'est au mathématicien français Marc Antoine Parseval des Chênes (1755-1836), dont d'ailleurs on connaît très peu de la vie, que revient en 1799 l'intuition de la formule qui porte son nom; la formule de Plancherel concerne plutôt, elle, la théorie relative à la transformation intégrale de Fourier (point de vue continu, que l'on verra lorsque nous envisagerons la transformation de Fourier agissant sur $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n)$, et non, comme ici, dans un cadre discret.

14. Cette dernière condition (2.9) signifie que les paramètres de l'appareil réalisant l'action \mathcal{L} sont immuables dans le temps. On dit qu'un tel opérateur linéaire continu \mathcal{L} est un *filtre discret stationnaire*, ce dernier qualificatif rendant précisément compte de l'immuabilité dans le temps des paramètres de l'appareil réalisant l'action du filtre.

et

$$\widehat{s * h} = \widehat{s} \times \widehat{h} \quad (2.10)$$

(la dernière égalité étant entendue au sens des fonctions 2π -périodiques à valeurs complexes définies presque partout). Réciproquement, si $h \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ est tel que l'on ait $\widehat{h} \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur

$$s \longmapsto \mathcal{F}^{-1}[\widehat{s} \cdot \widehat{h}]$$

est un opérateur linéaire continu de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ dans lui-même, tel que $\mathcal{L}[e_0] = h$, se pliant à la clause (2.9).

Preuve. Prouvons d'abord l'assertion directe. En utilisant la linéarité et la continuité de \mathcal{L} , couplées avec la clause (2.9), on voit, si $h = \mathcal{L}[e_0]$, que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{L}[s]_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} s_l h_{k-l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l s_{k-l}.$$

On a donc bien $\mathcal{L}[s] = s * h$; on a affaire avec $\mathcal{L}[s]$ a priori à un élément de $l^\infty(\mathbb{Z})$, mais de fait cet élément est dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ puisque \mathcal{L} est supposé être un opérateur de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ dans lui-même. La propriété (2.10) se montre en observant tout d'abord que la continuité de \mathcal{L} , combinée avec la continuité de \mathcal{F} , permettent de se ramener au cas où les s_k sont tous nuls pour $|k| > M$, M étant un entier positif (on approche ensuite s dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ par ses versions « tronquées » $s^{(n)}$ où $s_k^{(n)} = s_k$ si $|k| \leq n$, $s_k^{(n)} = 0$ sinon). Pour un tel s et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N (s * h)_k e^{-ik\omega} &= \sum_{k=-N}^N \left(\sum_{l=-M}^M s_l h_{k-l} \right) e^{-ik\omega} \\ &= \sum_{l=-M}^M s_l \left(\sum_{k=-N}^N h_{k-l} e^{-ik\omega} \right) \\ &= \sum_{l=-M}^M s_l \left(\sum_{k=-N}^N h_{k-l} e^{-i(k-l)\omega} e^{-il\omega} \right) \\ &= \sum_{l=-M}^M s_l e^{-il\omega} \left(\sum_{k=-N-l}^{N-l} h_k e^{-ik\omega} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

(grâce au théorème de Fubini applicable ici car les ensembles d'intégration sont finis et à l'invariance par translation de la mesure de comptage). Comme

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})}} \left(\omega \longmapsto \sum_{k=-N-l}^{N-l} h_k e^{-ik\omega} \right) = \widehat{h}$$

pour tout $l \in \{-M, \dots, M\}$ (par continuité de \mathcal{F} sur $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$) et que

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})}} \left(\omega \longmapsto \sum_{k=-N}^N (s * h)_k e^{-ik\omega} \right) = \widehat{s * h},$$

on déduit bien de (2.11) en faisant tendre N vers l'infini et en prenant les limites dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ la formule (2.10). Comme $\|\mathcal{L}[s]\|_2 \leq C\|s\|_2$ pour tout $s \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (pour

une certaine constante $C \geq 0$) parce que \mathcal{L} est continu de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}[s]\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{s * h}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{s}(\omega)|^2 |\widehat{h}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq C^2 \|s\|_2^2 = C^2 \int_0^{2\pi} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

pour tout s dans $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, donc pour tout \widehat{s} dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$; on en déduit

$$|\widehat{h}(\omega)|^2 \leq C^2 \text{ pour presque tout } \omega,$$

donc que \widehat{h} est dans $L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{T})$, de norme $\|\widehat{h}\|_{\infty} \leq C$.

L'assertion réciproque résulte de la continuité de \mathcal{F}^{-1} et du fait que l'opérateur de $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ dans lui-même défini par multiplication par une fonction 2π -périodique mesurable essentiellement bornée par une constante C est un opérateur continu de norme inférieure ou égale à C . Le fait que l'opérateur ainsi construit se plie à la clause (2.9) résulte du fait que la spectre de $(s_{k-k_0})_k$ s'obtient en multipliant \widehat{s} par la classe du caractère $\omega \mapsto e^{-ik_0\omega}$. \diamond

Remarque 2.4 : le vocabulaire des ingénieurs. Étant donné un tel filtre discret stationnaire \mathcal{L} , la classe de la fonction 2π -périodique \widehat{h} (où $h = \mathcal{L}[e_0]$) est dite *transformée de Fourier* du filtre, tandis que la classe de la fonction 2π -périodique

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{ik\omega}$$

est dite *fonction de transfert* du filtre \mathcal{L} . La classe $\dot{D}_{\mathcal{L}}$ de $|\widehat{h}|^2$ dans $L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{T})$ est appelée *densité spectrale de puissance* du filtre \mathcal{L} . L'énergie de $\mathcal{L}[s]$ s'obtient donc (via la formule de Parseval) par

$$\|\mathcal{L}[s]\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} D_{\mathcal{L}}(\omega) |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega.$$

Exemple 2.1. Un exemple important de cette proposition est celui des opérateurs de la forme

$$s \mapsto s * h$$

où $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$. On remarque en effet dans ce cas que l'opérateur

$$\mathcal{L}_h : s \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\widehat{h} \cdot \widehat{s}]$$

est bien continu de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même et que $\mathcal{L}_h[e_0] = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{h}] = h$; la convolée de s et de h (considéré comme élément de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$) est donc bien dans $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ et on définit ainsi un opérateur continu de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même.

Tous les résultats établis dans cette section en dimension 1 se transposent naturellement, exactement comme nous l'avons vu à la fin de la section 2.2.2 (par exemple, dans le cas $n = 2$, mêmes définitions pour le spectre et pour la convolutions de deux tableaux dont l'un des deux a un spectre dans $L_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{T}^2)$ que les définitions (2.5), (2.6) et même formule (2.7)).

2.3 Transformation de Fourier sur les espaces de fonctions 2π -périodiques

On note toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Les deux espaces qui vont nous intéresser dans cette section sont les \mathbb{K} -espaces de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T})$ et les \mathbb{K} -espaces de Banach $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{T})$

(le premier \mathbb{K} -espace vectoriel s'injecte ici continuellement dans le second, alors que l'on avait $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z}) \subset l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$). On rappelle que, si $p \in [1, \infty]$, la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{T},p}$ est définie par

$$\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},p}^p := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} |f(\theta)|^p d\theta.$$

Ces définitions peuvent bien sûr être étendues au cadre multidimensionnel, avec la définition des \mathbb{K} -espaces de Banach $L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{T}^n)$, avec leur norme définie par

$$\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},p}^p := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{([0,2\pi])^n} |f(\theta)|^p d\theta,$$

mais, pour simplifier les choses ici, nous nous limiterons essentiellement dans cette section au cas $n = 1$.

2.3.1 La transformation de Fourier sur $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T})$

On notera à partir de maintenant

$$\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},2}^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

le carré de la norme hilbertienne d'un élément \dot{f} du \mathbb{K} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T})$, \dot{f} étant un représentant de la classe f .

On a vu dans la section 2.2.3 que l'application \mathcal{F} (prise de spectre ou transformation de Fourier) transformait les suites $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ de manière isométrique en les éléments \hat{s} de $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$. L'application inverse \mathcal{F}^{-1} est l'application

$$\mathcal{F}^{-1} : \dot{f} \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}) \mapsto \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{ik\theta} d\theta \right)_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (2.12)$$

Comme on l'a vu dès l'introduction de la transformation discrète (proposition 2.1), le principe de l'inversion de la transformée de Fourier est, du point de vue algébrique, celui qui consiste à remplacer un certain opérateur (de matrice M dans le cas de la transformation de Fourier discrète) par l'opérateur « conjugué » (de matrice \overline{M} à une constante près dans le cas de la transformation de Fourier discrète). Suivant ce principe, puisque $\mathcal{F}^{-1} : L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}) \mapsto l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ est définie suivant le mécanisme (2.12), il est naturel de définir la transformation de Fourier $\mathcal{TF} : L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}) \mapsto l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ suivant le mécanisme

$$\mathcal{TF} = \overline{\mathcal{F}^{-1}} : \dot{f} \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}) \mapsto \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \right)_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (2.13)$$

Le nombre

$$c_k(\dot{f}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(qui est appelé *k*-ème coefficient de Fourier complexe de \dot{f}) représente le produit scalaire (ou plus concrètement la « corrélation ») entre \dot{f} et l'harmonique fondamentale \dot{e}_k de période 2π , classe de :

$$\theta \mapsto e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que les seules fonctions oscillantes élémentaires sur \mathbb{R} du type

$$t \longmapsto e^{i\omega t}$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ qui soient 2π -périodiques sont précisément les fonctions

$$\theta \longmapsto e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

et uniquement celles-ci. Le dictionnaire (dénombrable) \mathcal{D} constitué de classes de ces fonctions est bien LE dictionnaire de toutes les classes de fonctions oscillantes élémentaires de la forme $t \longmapsto e^{i\omega t}$ qui soient 2π -périodiques. Calculer le spectre d'une classe de fonction 2π -périodique $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, c'est chercher à exprimer \dot{f} suivant précisément ce dictionnaire, ce aux fins de reconnaître en \dot{f} une certaine combinaison de fonctions oscillantes élémentaires¹⁵. Ceci revient à calculer la liste des coordonnées $(\langle \dot{f}, \dot{e}_k \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$ de \dot{f} dans la base hilbertienne $(\dot{e}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ (voir l'exemple 1.4).

Définition 2.3 On appelle spectre (complexe) d'un élément $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ la suite

$$(c_k(\dot{f}))_{k \in \mathbb{Z}} = (\langle \dot{f}, \dot{e}_k \rangle)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$$

de ses coefficients de Fourier. L'application \mathcal{TF} de prise de spectre est une isométrie bijective entre ces deux espaces, l'inverse étant l'application

$$(\mathcal{TF})^{-1} = \overline{\mathcal{F}} : (s_k)_{k \in \mathbb{Z}} \longmapsto \left(\theta \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k e^{ik\theta} \right),$$

où la convergence de la série $\sum_k s_k e^{ik(\cdot)}$ est entendue au sens de la norme $\| \cdot \|_{\mathbb{T}, 2}$, soit

$$\dot{f} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})}} \left(\theta \longmapsto \sum_{k=-N}^N c_k(\dot{f}) e^{ik\theta} \right). \quad (2.14)$$

Remarque 2.5. Le fait que \mathcal{TF} soit une isométrie (ce qui correspond toujours à la conservation d'énergie après prise de spectre) nous assure que si \dot{f}_1 et \dot{f}_2 sont deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \overline{f_2(\theta)} d\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{f}_1) \overline{c_k(\dot{f}_2)}. \quad (2.15)$$

C'est la version « dupliquée » de la formule de Parseval (que nous avons en fait déjà rencontré en 2.8).

Pour $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et $N \in \mathbb{N}$, le polynôme trigonométrique

$$S_N[\dot{f}] : \theta \longmapsto \sum_{k=-N}^N c_k(\dot{f}) e^{ik\theta}$$

15. Il est intuitivement évident que cette prise de spectre n'est sans doute pas la chose la plus intelligente à tenter lorsqu'il est manifeste que \dot{f} ne s'exprime pas naturellement dans le dictionnaire \mathcal{D} ; pensez par exemple à la fonction obtenue en 2π -périodisant une fonction pic telle la fonction \tilde{g}_ϵ , avec ϵ petit, définie par

$$g_\epsilon(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right).$$

est appelé N -ième somme partielle de Fourier de \dot{f} . Du point de vue de la géométrie hilbertienne, sa classe est la projection orthogonale de \dot{f} sur le sous-espace vectoriel engendré par les harmoniques fondamentales \dot{e}_k , $-N \leq k \leq N$, de représentants

$$e_k : \theta \longmapsto e^{ik\theta}, \quad k = -N, \dots, N.$$

On remarque, si l'on pose

$$\begin{aligned} a_k(\dot{f}) &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N} \\ b_k(\dot{f}) &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(k\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

on peut réécrire

$$S_N[\dot{f}](\theta) = \frac{a_0(\dot{f})}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k(\dot{f}) \cos(k\theta) + b_k(\dot{f}) \sin(k\theta) \right), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Ces remarques nous conduisent à la définition suivante (dans le cadre réel cette fois) :

Définition 2.4 On appelle spectre (réel) d'un élément $\dot{f} \in L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{T})$ la liste des scalaires $(a_0(\dot{f}), (a_k(\dot{f}), b_k(\dot{f}))_{k \geq 1})$. Pour tout $\dot{f} \in L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{T})$, on a

$$\dot{f} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{T})}} \left(\theta \longmapsto \frac{a_0(\dot{f})}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k(\dot{f}) \cos(k\theta) + b_k(\dot{f}) \sin(k\theta) \right) \right); \quad (2.17)$$

de plus

$$\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},2}^2 = \frac{(a_0(\dot{f}))^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \|(a_k(\dot{f}), b_k(\dot{f}))\|^2.$$

Preuve. Les assertions complétant cette définition sont de simples transcriptions des assertions de la définition 2.3 via la réécriture 2.16 et les relations $a_0(\dot{f}) = 2c_0(\dot{f})$ et $a_k(\dot{f}) + ib_k(\dot{f}) = 2c_k(\dot{f})$, $a_k(\dot{f}) - ib_k(\dot{f}) = 2c_{-k}(\dot{f})$ si $k \geq 1$. \diamond

Les formules d'inversion (2.14) et (2.17) sont à la base même de l'analyse de Fourier des signaux périodiques¹⁶. Tout ceci se transpose bien sûr au cadre multidimensionnel.

2.3.2 La transformation de Fourier sur $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{T})$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le \mathbb{K} -espace de Banach $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{T})$ contient strictement (comme \mathbb{K} -sous-espace fermé) le \mathbb{K} -sous-espace $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T})$; l'injection du \mathbb{K} -espace de Hilbert $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T})$ (équipé de sa norme $\|\cdot\|_{\mathbb{T},2}$) dans $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{T})$ (équipé de sa norme $\|\cdot\|_{\mathbb{T},1}$) est d'ailleurs une injection linéaire continue. L'action de la transformation de Fourier, définie à la

16. C'est l'idée de base du mathématicien français Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), sur laquelle repose l'étude des phénomènes physiques oscillants, qu'en un sens à préciser, tout phénomène physique 1-dimensionnel T -périodique se réalise comme un empilement de T -harmoniques fondamentales complexes (*resp.* réelles), affectées de coefficients correspondant précisément aux coefficients de Fourier complexes (*resp.* réels).

section précédente sur $L_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{T})$, s'étend de fait au cadre élargi qu'est celui du \mathbb{K} -espace de Banach $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{T})$. L'aspect hilbertien sera toutefois perdu et l'on ne pourra donc plus en profiter dans ce cadre élargi.

Si \dot{f} est un élément de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$, on peut toujours définir la suite $(c_k(\dot{f}))_{k \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier complexes :

$$c_k(\dot{f}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z},$$

quand bien même on ne peut plus interpréter ces nombres comme des produits scalaires entre deux éléments d'un \mathbb{C} -espace de Hilbert.

Définition 2.5 *On appelle spectre (complexe) d'un élément $\dot{f} \in L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ la suite $(c_k(\dot{f}))_{k \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier. L'application \mathcal{TF} de prise de spectre est une application linéaire continue de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ dans l'espace de Banach $l_{\mathbb{C}}^{\infty,0}(\mathbb{Z})$ des suites de nombres complexes tendant vers 0 à l'infini¹⁷, équipé de la norme uniforme. Cette application prolonge l'application $\mathcal{TF} : L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}) \mapsto l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ de la définition 2.3.*

Preuve. On a immédiatement

$$\sup_k |c_k(\dot{f})| \leq \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}. \quad (2.18)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit (comme dans l'exemple 1.10) la classe $\dot{\Psi}_k$ de $L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{T})$, de représentant la fonction polynômiale trigonométrique

$$\theta \mapsto 2\pi \frac{\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^k}{\int_{[-\pi,\pi[} \left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^k du}.$$

D'après la proposition 1.13 appliquée avec l'exemple 1.10, on peut, étant donné $\epsilon > 0$, choisir $k_{\epsilon} \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que

$$\|\dot{f} - \dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{\Psi}_{k_{\epsilon}}\| < \epsilon.$$

Or, si k_{ϵ} est ainsi fixé, la classe

$$\dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{\Psi}_{k_{\epsilon}}$$

a pour représentant une fonction de la forme

$$\theta \mapsto \sum_{-k_{\eta}}^{k_{\epsilon}} c_{k_{\epsilon},l}(\dot{f}) e^{il\theta}$$

et l'on vérifie immédiatement que l'on a

$$c_k(\dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{\Psi}_{k_{\epsilon}}) = 0$$

pour $|k| > k_{\epsilon}$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}, |k| > k_{\epsilon} \implies |c_k(\dot{f})| = |c_k(\dot{f} - \dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{\Psi}_{k_{\epsilon}})| \leq \epsilon.$$

17. Cette propriété, pour la suite $(c_k(\dot{f}))_{k \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier d'un élément de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$, de tendre vers 0 à l'infini, est la version discrète du lemme de Riemann-Lebesgue.

Ceci prouve bien

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} |c_k(\dot{f})| = 0$$

et donc le fait que l'opération \mathcal{TF} de prise de spectre réalise une application \mathbb{C} -linéaire de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ dans l'espace de Banach $l_{\mathbb{C}}^{\infty,0}(\mathbb{Z})$, sous-espace fermé de $l_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{Z})$ constitué des suites tendant vers 0 à l'infini. La continuité de la prise de spectre complexe résulte de la majoration 2.18. \diamond

Remarque 2.6. Attention ! La transformation de Fourier $\mathcal{TF} : L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T}) \rightarrow l_{\mathbb{C}}^{\infty,0}(\mathbb{Z})$ n'est malheureusement pas surjective : pour le voir, anticipons un peu le cours et prenons par exemple la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l_{\mathbb{C}}^{\infty,0}(\mathbb{Z})$ définie par

$$u_k = \begin{cases} \frac{1}{i \log k}, & \text{si } k \geq 2 \\ 0 & \text{si } k = -1, 0, 1 \\ -\frac{1}{i \log |k|} & \text{si } k \leq -2. \end{cases}$$

S'il existait \dot{f} dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ tel que $u_k = c_k(\dot{f})$ et que l'on introduise la fonction (nécessairement continue et 2π -périodique puisque $\dot{f} \in L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ et que $c_0(\dot{f}) = 0$) définie par

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} f(u) du, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

on vérifierait par intégration par parties que, pour tout k tel que $|k| \geq 2$,

$$c_{|k|}(\dot{F}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[F(\theta) \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} c_k(\dot{f}) = -\frac{1}{|k| \log |k|}.$$

Mais la série de Bertrand $[1/(p \log p)]_{p \geq 2}$ est une série divergente¹⁸, alors que le théorème de Fejér version locale (que nous verrons plus loin, théorème 2.3) nous indique que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(c_0(\dot{F}) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq -1, 0, 1}}^n \frac{1}{|k| \log |k|} \right) = F(0) = 0.$$

Or, comme

$$\sum_{\substack{k=-n \\ k \neq -1, 0, 1}}^n \frac{1}{|k| \log |k|} \sim 2 \log(\log n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq -1, 0, 1}}^n \frac{1}{|k| \log |k|} \right) = -\infty,$$

ce qui est contradictoire.

Comme dans le contexte discret (propositions 2.2, 2.3, 2.4), la transformation \mathcal{TF} transforme l'opération de convolution 2π -périodique entre éléments de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$, définie en (1.28) par le fait que $\dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{g}$ a pour représentant

$$\theta \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} f(\theta - u) g(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} f(u) g(\theta - u) du \quad \text{p.p.},$$

en multiplication terme à terme au niveau des spectres. On a le résultat suivant :

¹⁸. Voir par exemple le polycopié du cours d'Analyse 3 (Semestre 4).

Proposition 2.5 Soit \dot{f}_1 et \dot{f}_2 deux éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_k(\dot{f}_1 \overset{\text{per}}{*} \dot{f}_2) = c_k(\dot{f}_1) \times c_k(\dot{f}_2).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} c_k(\dot{f}_1 \overset{\text{per}}{*} \dot{f}_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(u) f_2(\theta - u) du \right) e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f_1(u) \left(\int_0^{2\pi} f_2(\theta - u) e^{-ik(\theta - u)} d\theta \right) e^{-iku} du \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f_1(u) e^{-iku} \left(\int_0^{2\pi} f_2(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \right) du \\ &= c_k(\dot{f}_1) \times c_k(\dot{f}_2) \end{aligned}$$

(le théorème de Fubini permet de passer de la ligne 1 à la ligne 2, puis vient le fait que l'exponentielle échange addition et multiplication, enfin pour finir on utilise l'invariance de la mesure de décompte par translation). \diamond

Pour envisager la restitution de \dot{f} à partir de la connaissance des coefficients de Fourier $c_k(\dot{f})$, $k \in \mathbb{Z}$, on peut par exemple utiliser la propriété (proposition 1.13 et exemple 1.10) :

$$\dot{f} = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})}} (\dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{\Psi}_k),$$

où

$$\dot{\Psi}_k : \theta \mapsto 2\pi \frac{\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^k}{\int_{[-\pi,\pi]} \left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^k du} = \sum_{l=-k}^{l=k} \gamma_{k,l} e^{il\theta}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On remarque en effet, grâce à la proposition 2.5, que l'on a

$$\dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{\Psi}_k = \sum_{l=-k}^{l=k} \gamma_{k,l} c_l(\dot{f}) \dot{e}_l,$$

ce qui nous permet d'affirmer

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \dot{f} - \sum_{l=-k}^k \gamma_{k,l} c_l(\dot{f}) \dot{e}_l \right\|_{\mathbb{T},1} = 0. \quad (2.19)$$

On dispose ainsi d'un procédé « en deux temps » pour « reconstituer » \dot{f} à partir de la connaissance de son spectre complexe : pour rendre l'erreur d'approximation assez petite, il faut commencer par fixer k assez grand, puis, ce choix étant fait, former la classe du polynôme trigonométrique

$$\theta \mapsto \sum_{l=-k}^k \gamma_{k,l} c_l(\dot{f}) e^{il\theta}.$$

Un tel procédé s'appelle un procédé *taubérien*¹⁹.

19. La terminologie fait référence au mathématicien austro-hongrois Alfred Tauber, né en 1866 et mort en déportation autour de 1942, qui a introduit ce type de procédé pour « resommer » des séries divergentes.

Bien sûr un résultat idéal au niveau de l'inversion de la transformation \mathcal{TF} : $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T}) \mapsto l_{\mathbb{C}}^{\infty,0}(\mathbb{Z})$ aurait été

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \dot{f} - \sum_{k=-N}^N c_k(\dot{f}) e^{-ik\theta} \right\|_{\mathbb{T},1} = 0.$$

Mais il se trouve que ce résultat est FAUX en général pour $\dot{f} \in L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$!²⁰. Nous y reviendrons dans la section suivante et verrons comment rectifier le tir.

Il est un cas particulier important où l'inversion de la transformation de Fourier est immédiate (vous avez sûrement croisé l'exemple 2.2 qui l'illustre dans le cours de L2 sur les séries de Fourier) :

Proposition 2.6 *Si \dot{f} est un élément de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ tel que la suite $(c_k(\dot{f}))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit dans $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$, un représentant de \dot{f} est donné par la fonction continue 2π -périodique*

$$\theta \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\dot{f}) e^{ik\theta}, \quad (2.20)$$

la série ci-dessus étant normalement convergente sur \mathbb{R} .

Preuve. La convergence normale de la série (2.20) est immédiate ; la suite $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est aussi un élément de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ et \dot{f} est aussi la limite dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ de la suite des classes

$$\left(\sum_{k=-N}^N c_k(\dot{f}) e_k \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$$

(puisque l'injection de $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ est continue). La classe \dot{f} est dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ et, d'après le fait que l'on puisse extraire d'une suite $(\dot{S}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ convergeant dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ une sous-suite dont les représentants convergent presque partout (avatar du théorème de Riesz-Fischer, voir la proposition 4.6 du cours de théorie de l'intégration), un représentant de \dot{f} est bien la fonction 2π -périodique continue

$$\theta \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\dot{f}) e^{ik\theta}.$$

La proposition est démontrée. \diamond

Exemple 2.2. Un exemple majeur d'application de ce résultat est celui où \dot{f} est la classe d'une fonction 2π -périodique continue et C^1 par morceaux, c'est-à-dire telle qu'il existe une subdivision

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N = 2\pi$$

20. Ceci est cependant vrai dès que \dot{f} admet un représentant dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$, en vertu de la formule (2.14) établie à la section 2.3.1 et du fait que la convergence dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ implique la convergence dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$, ce qui complique singulièrement le problème pour exhiber un contre-exemple. En fait, on peut exhiber un élément \dot{f} de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ tel que la suite de fonctions $(S_N[\dot{f}])_{N \in \mathbb{Z}}$ diverge presque partout sur \mathbb{R} ; on ne peut donc extraire de sous-suite convergente presque partout, ce qui aurait été le cas si la suite $(S_N[\dot{f}])_{N \geq 0}$ avait convergé vers \dot{f} dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{T})$ (proposition 4.6 du cours de théorie de l'intégration MA5012). Pour voir comment effectuer cette construction (subtile), voir par exemple le livre d'Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, John Wiley and Sons, 1968, pp. 59-61 (voir aussi les exercices p. 50 du même ouvrage). Cette construction sort du cadre du cours, mais il était utile de mentionner le résultat.

de manière à ce que la restriction de f à chaque segment $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N-1$, soit de classe C^1 . Alors, on vérifie facilement en écrivant (grâce à des intégrations par parties sur chaque $[a_j, a_{j+1}]$, pour $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(\dot{f}) &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\left[f(\theta) \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_{a_j}^{a_{j+1}} + \frac{1}{ik} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \right), \end{aligned}$$

que

$$(ik)c_k(\dot{f}) = c_k(\dot{g}),$$

où g est définie par $g(\theta) = f'(\theta)$ sur \mathbb{R} privé des $a_j + 2\pi\mathbb{Z}$, $j = 0, \dots, N$. Comme \dot{g} est dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, la suite $(c_k(\dot{g}))_{k \in \mathbb{Z}}$ est dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ et la suite $(c_k(\dot{f}))_{k \in \mathbb{Z}}$ est dans $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (comme produit terme à terme de deux éléments de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$). La proposition 2.6 s'applique ici et l'on peut affirmer que

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{f}) e^{ik\theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

la série de fonctions au second membre étant normalement convergente sur \mathbb{R} .

On termine cette section en disant deux mots du cas réel, où la notion de spectre est plus mal commode à gérer (on préférera de loin à travailler, même lorsque l'on a affaire à des éléments de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, avec le spectre complexe en pensant ces éléments comme des éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$).

Définition 2.6 On appelle spectre (réel) d'un élément $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ la collection $(a_0(\dot{f}), (a_k(\dot{f}), b_k(\dot{f}))_{k \in \mathbb{N}^*})$ de ses coefficients réels :

$$\begin{aligned} a_k(\dot{f}) &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N} \\ b_k(\dot{f}) &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(k\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|(a_k(\dot{f}), b_k(\dot{f}))\| = 0$. Cette application prolonge l'application $\mathcal{TF} : L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \mapsto l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ de la définition 2.4.

Le point important à retenir concernant la transformation de Fourier réelle et sa relation avec la transformée de Fourier complexe est la double écriture des sommes partielles de Fourier

$$S_N[\dot{f}](\theta) = \sum_{k=-N}^N c_k(\dot{f}) e^{ik\theta} = \frac{a_0(\dot{f})}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k(\dot{f}) \cos(k\theta) + b_k(\dot{f}) \sin(k\theta)), \quad \forall N \geq 1.$$

et toujours les relations $a_k(\dot{f}) + ib_k(\dot{f}) = 2c_k(\dot{f})$, $a_k(\dot{f}) - ib_k(\dot{f}) = 2c_{-k}(\dot{f})$ si $k \geq 1$.

2.3.3 Les théorèmes de Dirichlet et de Fejér

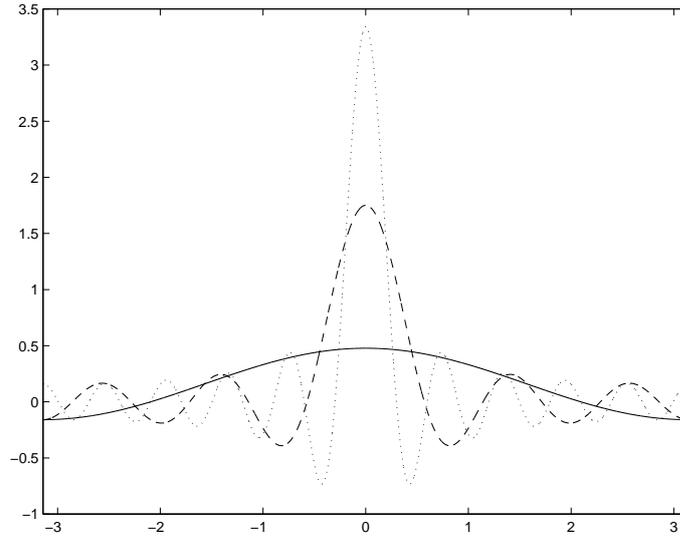


FIGURE 2.1 – Graphes sur $[-\pi, \pi]$ de $D_N/2\pi$, $N = 1, 5, 10$

Si \dot{f} est un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, il est facile d'exprimer $S_N[f]$ comme la convolée 2π -périodique de \dot{f} et d'un certain noyau (dépendant de N); on a en effet :

$$\begin{aligned}
 \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad S_N[\dot{f}](\theta) &= \sum_{k=-N}^{k=N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku} du \right) e^{ik\theta} \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u) \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{k=N} e^{ik(\theta-u)} \right] du \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u) \left[\frac{1}{2\pi} \left(2\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^N e^{ik(\theta-u)} \right) - 1 \right) \right] du \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u) \left[\frac{1}{2\pi} \left(2\operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{i(N+1)(\theta-u)}}{1 - e^{i(\theta-u)}} \right] - 1 \right) \right] du \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u) \left[\frac{1}{2\pi} \left(2\operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{N(\theta-u)}{2}} \frac{\sin \frac{(N+1)(\theta-u)}{2}}{\sin \frac{\theta-u}{2}} \right] - 1 \right) \right] du \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u) \left[\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 \cos \frac{N(\theta-u)}{2} \sin \frac{(N+1)(\theta-u)}{2}}{\sin \frac{\theta-u}{2}} - 1 \right) \right] du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) D_N(\theta - u) du, \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

où D_N est la fonction continue 2π -périodique continue définie par

$$D_N(\theta) := \sum_{k=-N}^{k=N} e^{ik\theta} = \begin{cases} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \neq 0 \text{ mod. } 2\pi \\ 2N + 1 & \text{si } \theta = 0 \text{ mod. } 2\pi. \end{cases}$$

Cette fonction D_N , dont nous avons représenté le graphe pour diverses valeurs de N ($N = 1, 5, 10$) sur la figure 2.1, est appelée *noyau de Dirichlet* (d'ordre N)²¹. Ce graphe sur $[-\pi, \pi]$ présente un lobe central et des lobes latéraux ; on remarque que l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction D_N vaut 2π , mais que cette fonction D_N n'est pas positive, ce qui représentera, on le verra plus loin, un handicap important : la norme $\|\dot{D}_N\|_{\mathbb{T},1}$ tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers l'infini !

Reprenons maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On peut donc écrire, pour tout $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$:

$$\dot{S}_N[\dot{f}] = \dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{D}_N. \quad (2.22)$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant dans le cadre $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$:

Théorème 2.1 (Théorème de Jordan-Dirichlet) *Soit $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{K}$ deux scalaires tels que*

$$\int_0^\pi \frac{|f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l|}{|u|} du < +\infty. \quad (2.23)$$

alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N[\dot{f}](\theta_0) = l.$$

Remarque 2.7 et rappels de L2. Il s'agit ici d'un résultat de nature très différente de ce que nous avons fait jusque là, à savoir un résultat local. On en connaît depuis le cours de L2²² l'application majeure : si \dot{f} a un représentant f présentant une limite à gauche ($f(\theta_0 - 0)$) en θ_0 ainsi qu'une limite à droite ($f(\theta_0 + 0)$) en ce même point, alors on peut affirmer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N[\dot{f}](\theta_0) = \frac{f(\theta_0 - 0) + f(\theta_0 + 0)}{2}$$

à condition toutefois que soit remplie la clause de sécurité suivante :

Le graphe de f présente des demi-tangentes à gauche et à droite respectivement aux points $(\theta_0, f(\theta_0 - 0))$ et $(\theta_0, f(\theta_0 + 0))$.

Si tel est le cas, on peut écrire en effet, dans $]0, \epsilon]$ avec $\epsilon > 0$ assez petit

$$\begin{aligned} f(\theta_0 + u) &= f(\theta_0 + 0) + u f'(\theta_0 + 0) + u \varphi(u) \\ f(\theta_0 - u) &= f(\theta_0 - 0) - u f'(\theta_0 - 0) + u \psi(u) \end{aligned}$$

où φ et ψ sont des fonctions bornées sur $]0, \epsilon]$, et par conséquent

$$\frac{|f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - (f(\theta_0 - 0) + f(\theta_0 + 0))|}{|u|} = |f'(\theta_0 + 0) - f'(\theta_0 - 0) + o(1)| \leq c$$

pour une certaine constante $c > 0$; la clause (2.23) est donc bien remplie et l'on a dans ce cas

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N[\dot{f}](\theta_0) = \frac{f(\theta_0 + 0) + f(\theta_0 - 0)}{2}.$$

21. La terminologie fait référence à l'analyste et théoricien des nombres allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) qui l'introduisit et le manipula en 1828.

22. Voir le polycopié du cours d'Analyse 3 (anciennement MHT401), en ligne sur : <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mat401.pdf>

Preuve. On écrit, en utilisant la formule (2.22) en θ_0 , la parité de D_N et le fait que D_N soit d'intégrale 2π sur $[\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]$,

$$\begin{aligned} S_N[f](\theta_0) - l &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} (f(\theta_0 - u) - l) D_N(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l) D_N(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l}{u} \frac{u}{\sin(u/2)} \sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) u \right] du. \end{aligned}$$

La fonction

$$u \mapsto \chi_{[0, \pi]}(u) \frac{f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l}{u} \frac{u}{\sin(u/2)},$$

prolongée par 2π -périodicité, définit (du fait de l'hypothèse (2.23)) une classe de $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$ et l'on conclut avec le lemme de Riemann-Lebesgue mentionné dans les définitions 2.5 et 2.6. \diamond

Ce résultat est vraiment un résultat local ; pour nous en convaincre, voici un exemple troublant.

On considère la fonction 2π -périodique φ définie par

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } \theta \in [0, \pi[. \end{cases} \quad (2.24)$$

Cette fonction définit un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.

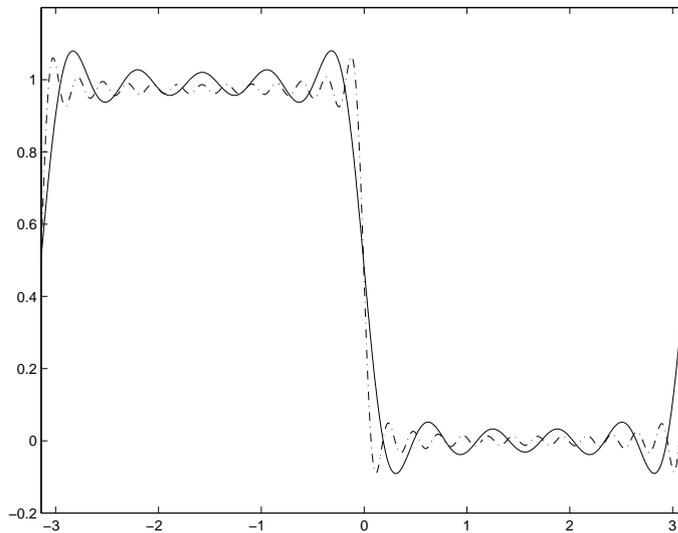


FIGURE 2.2 – Phénomène de Gibbs pour φ avec $N = 10$ et $N = 25$

Sur la figure 2.2, voici ce que l'on observe, en traçant les graphes de $S_{10}[\varphi]$ (en trait plein) et $S_{25}[\varphi]$ (en pointillés) : lorsque N augmente, il y a un phénomène de « rehaussement » de la fonction φ (lorsqu'on tente de l'approcher par $S_N[\varphi]$) avant la singularité en 0 et d'« affaissement » passée cette singularité ; l'amplitude de ce phénomène ne fléchit pas lorsque N augmente, c'est ce que l'on appelle un effet

d'*aliasing*; c'est le phénomène de Gibbs²³, qui refroidit ici nos espoirs d'approcher dans $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$ la classe \dot{f} par la suite $(S_N[\dot{f}])_{N \geq 0}$.

Pour tenter une parade, nous allons « couper en douceur » les composantes « hautes-fréquences », c'est-à-dire les contributions à \dot{f} des

$$\theta \longmapsto e^{ik\theta}, \quad |k| > N.$$

On envisage pour cela

$$T_N[\dot{f}] : \theta \longmapsto \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) c_k(\dot{f}) e^{ik\theta}$$

que l'on appelle la *N-ième somme de Fejér*²⁴ de \dot{f} . Reprenons ici les calculs de trigonométrie que nous avons fait pour exprimer $S_N[\dot{f}]$ en terme d'une convolution 2π -périodique avec le noyau de Dirichlet (formule (2.22)). On a :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_N[\dot{f}](\theta) &= \sum_{k=-(N-1)}^{k=N-1} \frac{N - |k|}{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku} du \right) e^{ik\theta} \\ &= \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} f(u) \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N-1}^{k=N-1} (N - |k|) e^{ik(\theta-u)} \right] du \\ &= \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} f(u) \left[\frac{1}{2\pi} \left(2\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (N - k) e^{ik(\theta-u)} \right) - N \right) \right] du \end{aligned}$$

Or, pour θ réel et non congru à 0 (modulo 2π)

$$2\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (N - k) e^{ik\theta} \right) - N = N\Phi_{N-1}(\theta) - \frac{d}{d\theta} [\Psi_{N-1}(\theta)]$$

avec

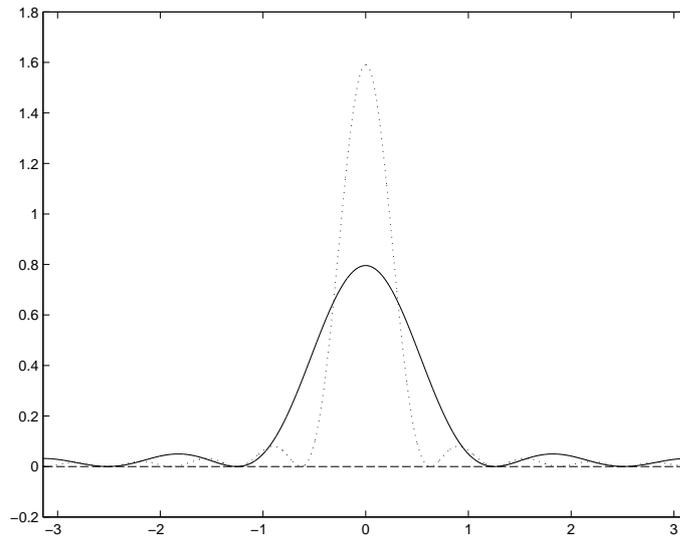
$$\Phi_{N-1}(\theta) := 2\operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta} \right] - 1 = \frac{\sin \left[\left(N - \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

(voir le calcul du noyau de Dirichlet D_{N-1} fait précédemment) et

$$\begin{aligned} \Psi_{N-1}(\theta) &:= 2\operatorname{Im} \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta} \right] = 2\operatorname{Im} \left[\frac{1 - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right] \\ &= 2\operatorname{Im} \left(e^{i\frac{(N-1)\theta}{2}} \frac{\sin \frac{N\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \\ &= \frac{2 \sin \frac{(N-1)\theta}{2} \sin \frac{N\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ &= - \frac{\cos \left[\left(N - \frac{1}{2} \right) \theta \right] - \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

23. H. Wilbraham l'observa en 1848 et c'est Josiah W. Gibbs (1839-1903) qui l'analysa ; ce n'est pas réellement une surprise, mais c'est, on le verra, un défaut qui entache l'opération consistant à « couper » les hautes fréquences (par exemple lors du « repiquage » de vieux enregistrements).

24. Cette idée a été introduite en 1900 par le mathématicien hongrois Lipót Fejér (1880-1959).

FIGURE 2.3 – Graphes sur $[-\pi, \pi]$ de $K_N/2\pi$, $N = 5, 10$

On a donc, toujours pour θ réel et non congru à 0 (modulo 2π)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}[\Psi_{N-1}(\theta)] &= N\Phi_{N-1}(\theta) - \frac{\sin\left(N - \frac{1}{2}\right) + \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ &\quad - \frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left[\left(N - \frac{1}{2}\right)\theta\right]\right)}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= N\Phi_{N-1}(\theta) + \frac{\cos(N\theta) - 1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= N\Phi_{N-1}(\theta) - \frac{\sin^2\frac{N\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement, tous calculs faits, on trouve

$$\dot{T}_N[f] = \dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{K}_N \quad (2.25)$$

avec

$$K_N(\theta) := \sum_{k=-N}^{k=N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ik\theta} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\frac{N\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 & \text{si } \theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ N & \text{si } \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Ce nouveau noyau K_N , dit aussi *noyau de Fejér* est toujours d'intégrale 2π sur $[0, 2\pi]$, mais a cette particularité essentielle qui le différencie du noyau de Dirichlet qui est le fait d'être positif. Pour les valeurs de $N = 5, 10$, on a représenté sur la figure 2.3 les graphes des fonctions $K_N/2\pi$; on remarque que, à valeurs de N égales, le lobe central est plus « enflé » qu'il ne l'est pour le noyau D_N de Dirichlet. Mais encore une fois, le phénomène le plus frappant est la positivité du noyau K_N . Si l'on utilise la suite $(\dot{T}_N[f])_{N \geq 1}$ pour approcher un élément de $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$ (comme l'élément $\dot{\phi}$ défini en (2.24)), on voit cette fois que l'approximation, même si elle est plus lente, n'est

plus cette fois entachée du phénomène de Gibbs ; c'est ce que l'on voit par exemple sur la figure 2.4, où nous avons approché par la suite des classes $(\dot{T}_N[\dot{\varphi}])_{N \geq 1}$ la classe $\dot{\varphi}$.

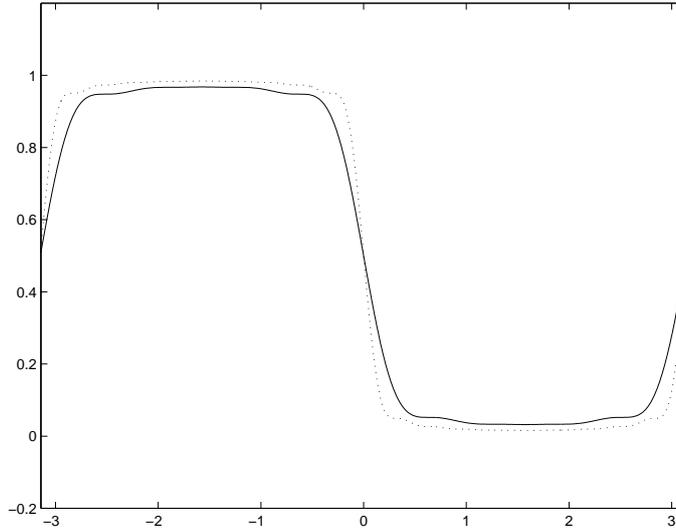


FIGURE 2.4 – Graphes sur $[-\pi, \pi]$ de $T_N[\dot{\varphi}]$, $N = 5, 10$

Théorème 2.2 (théorème de Fejér, version L^1) Pour tout $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\dot{f} - \dot{T}_N[\dot{f}]\|_{\mathbb{T},1} = 0,$$

soit encore

$$\dot{f} = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})}} \left(\theta \mapsto \sum_{k=-N}^N c_k(\dot{f}) \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ik\theta} \right). \quad (2.26)$$

Remarque 2.8. Il est clair que la formule (2.26) constitue la bonne formulation pour l'inversion de $\mathcal{TF} : L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T}) \rightarrow l^{\infty,0}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z})$. Contrairement au procédé taubérien en deux temps (2.19), il s'agit là d'un procédé en un temps. Pas tout à fait cependant si l'on pense à un procédé depuis les sommes $S_N[\dot{f}]$, puisqu'il est immédiat de constater que la N -ième somme de Fejér

$$T_N[\dot{f}] = \frac{S_0[\dot{f}] + \cdots + S_{N-1}[\dot{f}]}{N}$$

est obtenue à partir de la suite des sommes partielles de Fourier $(S_k[\dot{f}])_{k \geq 0}$ par le procédé (lui aussi taubérien) de Césaro.

Preuve. On écrit, en utilisant le fait que K_N est d'intégrale 2π sur $[-\pi, \pi]$ et la formule (2.25), puis le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \|\dot{f} - \dot{T}_N[\dot{f}]\|_{\mathbb{T},1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - f(\theta - u)) K_N[\dot{f}](u) du \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\dot{f} - \dot{f}(\cdot - u)\|_{\mathbb{T},1} |K_N(u)| du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\dot{f} - \dot{f}(\cdot - u)\|_{\mathbb{T},1} K_N(u) du. \end{aligned}$$

C'est au passage de la ligne 2 à la ligne 3 qu'intervient de manière cruciale la positivité de K_N (ceci ne marcherait pas avec D_N en place de K_N). Comme on l'a vu dans le cours de théorie de l'intégration (lemme 4.1 du polycopié de l'UE MA5012, transposé ici du cadre de \mathbb{R}^n au cadre périodique de \mathbb{T}^n avec $n = 1$, ce qui ne pose pas de difficulté), quelque soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|u\| < \eta \implies \|\dot{f} - \dot{f}(\cdot - u)\|_{\mathbb{T},1} < \epsilon/2.$$

On peut donc poursuivre nos majorations :

$$\begin{aligned} \|\dot{f} - \dot{T}_N[\dot{f}]\|_{\mathbb{T},1} &\leq \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\eta}^{\eta} K_N(u) du + \frac{\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}}{\pi N} \int_{\eta < |u| \leq \pi} \left(\frac{\sin(Nu/2)}{\sin u/2} \right)^2 du \\ &\leq \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(u) du + \frac{\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}}{N} \frac{1}{(\sin(\eta/2))^2} \\ &\leq \epsilon/2 + \frac{\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}}{N} \frac{1}{(\sin(\eta/2))^2} \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

dès que N est assez grand. Le résultat est démontré. \diamond

Remarque 2.9. Du point de vue pratique, l'approximation de \dot{f} par les sommes de Fejér (lorsque l'on se soucie de « couper » les composantes « hautes-fréquences ») a le défaut d'être trop lente (cela tient au fait que le lobe central du graphe du noyau de Fejér K_N est trop « enflé »). Si l'on veut profiter du fait que celui du noyau de Dirichlet l'est beaucoup moins (mais que l'on veuille éviter l'écueil du phénomène de Gibbs), on imagine un noyau construit à partir de celui de Dirichlet de manière à récupérer presque la positivité sans perdre trop relativement à l'étrécissement du lobe central. Les solutions proposées :

$$H_{\alpha,N}(\theta) = \alpha D_N(\theta) + \frac{1-\alpha}{2} \left(D_N\left(\theta - \frac{2\pi}{2N+1}\right) + D_N\left(\theta + \frac{2\pi}{2N+1}\right) \right)$$

avec $\alpha = 0.54$ (Hamming²⁵) ou $\alpha = 0.5$ (Hanning²⁶) sont les plus utilisées en pratique. On approche \dot{f} par les $\dot{f} \overset{\text{per}}{*} H_{\alpha,N}$, N tendant vers l'infini.

Signalons au passage qu'une preuve tout à fait identique a déjà été conduite dans le cours de L2²⁷ pour obtenir le résultat suivant, dans la lignée du théorème de Jordan-Dirichlet vu précédemment (théorème 2.1) :

Théorème 2.3 (Théorème de Fejér, version locale) Soit $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{T})$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{K}$ deux scalaires tels que, pour un certain représentant f de \dot{f} , on ait

$$\lim_{u \rightarrow 0_+} (f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u)) = 2l.$$

Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} T_N[\dot{f}](\theta_0) = l.$$

Remarque 2.10 et rappels de L2. Dans le cadre élémentaire du cours de L2 où l'on ne travaille que dans le contexte de l'intégration au sens de Riemann, ce résultat se répercute au niveau des fonctions 2π -périodiques (définies cette fois partout, il ne s'agit plus de classes de fonctions) bornées et réglées, c'est à dire ayant une limite à gauche et à droite en tout point. Comme limite uniforme

25. Les travaux du mathématicien américain Richard Hamming (1915-1998) portaient principalement sur l'informatique et les télécommunications.

26. En référence à Julius Ferdinand von Hann (1839-1921), météorologiste autrichien, l'un des pionniers de la météorologie moderne.

27. Voir le cours et le polycopié en ligne de l'UE Analyse 3 (anciennement MHT401).

de fonctions en escalier, une telle fonction est intégrable au sens de Riemann. On peut donc définir le spectre complexe $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ et les sommes partielles de Fourier $S_N[f]$ et de Fejér $T_N(f)$, $N \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $\theta_0 \in \mathbb{R}$, en adaptant la preuve du théorème 2.3 (la preuve est quasiment identique) :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} T_N[f](\theta_0) = \frac{f(\theta_0 + 0) + f(\theta_0 - 0)}{2}.$$

Preuve. On écrit, en utilisant la formule (2.25) en θ_0 , la parité de K_N et le fait que K_N soit d'intégrale 2π sur $[\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]$,

$$\begin{aligned} |T_N[f](\theta_0) - l| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} (f(\theta_0 - u) - l) K_N(u) du \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\pi (f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l) K_N(u) du \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta |f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l| K_N(u) du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi N} \int_\eta^\pi |f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l| \left(\frac{\sin(Nu/2)}{\sin(u/2)} \right)^2 du \\ &\leq \sup_{u \in [0, \eta]} |f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l| + \frac{\|f\|_{\mathbb{T}, 1} + 2|l|\pi}{2\pi \sin^2(\eta/2)} \times \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

On conclut en fixant η assez petit pour que

$$\sup_{u \in [0, \eta]} |f(\theta_0 + u) + f(\theta_0 - u) - 2l| < \epsilon/2$$

(ϵ étant arbitraire), puis on choisit ensuite N , tenant compte du choix de η , pour que

$$\frac{\|f\|_{\mathbb{T}, 1} + 2|l|\pi}{2\pi \sin^2(\eta/2)} \times \frac{1}{N} < \epsilon/2.$$

Le théorème est ainsi démontré. \diamond .

Remarque 2.11. Si f est une fonction 2π -périodique continue, la preuve ci-dessus, couplée avec le théorème de Heine²⁸ montre que

$$\sup_{\mathbb{R}} |f - T_N[f]| \rightarrow 0$$

lorsque N tend vers l'infini, autrement dit, la convergence des sommes de Fejér vers f est uniforme.

2.4 La transformation de Fourier des classes de fonctions intégrables sur \mathbb{R}^n

Nous allons dans cette section définir la transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$, dx désignant la mesure de Lebesgue. L'idée de base est toujours la même : tenter de « mesurer » quantitativement comment une classe \dot{f} de fonctions intégrables est globalement corrélée sur \mathbb{R}^n aux classes d'harmoniques spatiales

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto e^{i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} = e^{i\langle x, \omega \rangle}, \quad \omega \in \mathbb{R}^n$$

28. Toute fonction 2π -périodique et continue de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est uniformément continue car on peut la voir comme une fonction continue sur le compact $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) = \mathbb{T}$ (avec la métrique quotient) qui s'identifie topologiquement (et métriquement) au cercle unité de \mathbb{R}^2 .

(dites harmoniques temporelles si $n = 1$, t désignant dans ce cas une variable modélisant le temps). Bien sûr, ces harmoniques ne définissent pas des éléments de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ puisque ce sont des fonctions de module 1 qui ne sauraient donc être intégrables sur \mathbb{R}^n . Néanmoins, leur « corrélation » avec un élément \dot{f} de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ (inspirée de la démarche hilbertienne que l'on a conduit par exemple dans la section 2.3) a un sens puisque le produit d'un élément f de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ par un élément e de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R}^n, dx)$ est une fonction appartenant à $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$, avec

$$\|\dot{f}e\|_1 \leq \|\dot{f}\|_1 \times \|e\|_{\infty}.$$

2.4.1 Définition, exemples, et premières propriétés

Définition 2.7 Soit \dot{f} une classe de fonction mesurable et intégrable sur \mathbb{R}^n , à valeurs complexes ; la transformée de Fourier (ou spectre) de \dot{f} est par définition la fonction $\widehat{f} : \omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ définie ponctuellement par

$$\widehat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n)} dx_1 \cdots dx_n,$$

f étant un représentant arbitraire de \dot{f} .

Remarque importante 2.12. Si la transformée de Fourier d'un élément de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}_x^n, dx)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^n$, il est important de se faire à l'idée que la copie \mathbb{R}_ω^n de \mathbb{R}^n sur laquelle est défini le spectre de \dot{f} (copie dans laquelle nous conviendrons de noter $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ le point courant) n'est pas la même que celle (\mathbb{R}_x^n) sur laquelle sont définis les représentants de \dot{f} (copie où l'on note, pour bien marquer cette distinction, $x = (x_1, \dots, x_n)$ le point courant²⁹). Cette dernière copie \mathbb{R}_x^n est l'univers spatial sur lequel vivent les fonctions que l'on prétend traiter (on parle de « plan des images » si $n = 2$, d'« espace des temps » si $n = 1$), tandis que la copie \mathbb{R}_ω^n sur laquelle vivent les spectres des objets est appelée, elle, « espace des fréquences ». On verra plus loin qu'il est naturel de considérer l'espace \mathbb{R}_ω^n des fréquences comme le dual algébrique $(\mathbb{R}_x^n)^*$ de l'univers spatial \mathbb{R}_x^n . On verra aussi (dans la section 2.4.2) comment il est physiquement concevable de « séparer » ces deux copies dans le cas $n = 2$ en intercalant entre elles un mécanisme optique diffractant. La dernière assertion (formule 2.28 de la proposition 2.7 à venir) constituera une première indication de la relation entre transformation de Fourier et *dualité*³⁰ en algèbre linéaire.

Exemple 2.3 : un premier exemple basique ($n = 1$). Le spectre de la fonction caractéristique $\chi_{[a,b]}$ d'un segment fermé borné de \mathbb{R} est la fonction

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^b e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}).$$

On remarque ici que

$$\lim_{|\omega| \rightarrow 0} |\widehat{\chi}_{[a,b]}(\omega)| = 0,$$

ce qui, on le verra, s'avèrera une propriété clef du spectre d'un élément \dot{f} de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ en général (voir la proposition 2.7 à venir). Lorsque $[a, b] = [-T, T]$, on trouve en particulier

$$\widehat{\chi}_{[-T,T]}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T),$$

29. Ou t lorsque $n = 1$.

30. Voir le polycopié du cours de MIAS301, partie algèbre, pages 31-36, disponible sur le site <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursalg.pdf>.

et l'on voit apparaître ici une fonction jouant un rôle très important en analyse de Fourier, la fonction *sinus cardinal* définie par

$$\text{sinc} : u \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(\pi u/2)}{\pi u/2}$$

(c'est en général ainsi qu'elle est normalisée, ce de manière à ce que son intégrale semi-convergente sur $[0, +\infty[$ vaille 1). Le spectre de toutes ces fonctions $\chi_{[a,b]}$, notons le, n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_ω , ce qui s'avèrera un handicap (en relation avec la transposition au cadre continu du phénomène de Gibbs, comme on le verra dans la section 2.4.5).

Exemple 2.4 : un second exemple très important. Lorsque $n = 1$, le spectre de la gaussienne

$$g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

(qui est la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$) est la gaussienne $\omega \mapsto e^{-\omega^2/2}$, résultat qui se répercute en n variables (*via* le théorème de Fubini) sous la forme

$$\left(x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\|x\|^2/2}\right)^\wedge = \left[\omega \mapsto e^{-\|\omega\|^2/2}\right], \quad (2.27)$$

autrement dit, si l'on pouvait superposer les deux copies de \mathbb{R}^n que sont \mathbb{R}_x^n et \mathbb{R}_ω^n , on dirait que la gaussienne convenablement normalisée

$$g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/2}$$

est un vecteur propre de la prise de spectre³¹, ce avec la valeur propre $(2\pi)^{n/2}$. Faisons le calcul pour $n = 1$ ³²; on remarque, en appliquant le théorème de dérivation de Lebesgue (théorème 3.2 du cours de théorie de l'intégration, MA5012), que

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt$$

est de classe C^1 , de dérivée la fonction continue

$$\begin{aligned} \omega \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} \frac{d}{d\omega} [e^{-i\omega t}] dt &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} e^{-t^2/2} t dt \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\omega \widehat{g}(\omega) \end{aligned}$$

(on a utilisé une intégration par parties pour passer de la ligne 1 à la ligne 2). La fonction \widehat{g} étant donc solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y'(\omega) = -\omega y(\omega)$, on constate, en résolvant cette équation, que $\widehat{g}(\omega) = \widehat{g}(0) e^{-\omega^2/2} = e^{-\omega^2/2}$. On rappelle que la vérification du fait que $\widehat{g}(0) = 1$ se fait en remarquant (grâce au théorème de Fubini) que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \times \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr = 2\pi \end{aligned}$$

une fois l'intégrale double exprimée en coordonnées polaires. Le résultat 2.27 est donc ainsi démontré.

31. On verra plus loin, dans la section 2.5.3, l'importance de ce résultat qui explique, entre autres, pourquoi les gaussiennes sont de bons candidats mathématiques pour modéliser les particules en mécanique quantique.

32. Ce calcul a déjà été fait dans le cours d'intégration et dans les guides d'activités de ce cours pour illustrer l'application du théorème de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre, théorème 3.2 du cours de l'UE MA5012.

Exemple 2.5 : la distribution exponentielle symétrique. La fonction

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2^n} e^{-|x_1| - \dots - |x_n|}$$

définit une densité de probabilité intéressante sur \mathbb{R}^n , la loi associée est appelée loi exponentielle symétrique. On la retrouve par exemple (lorsque $n > 1$) dans les processus d'évolution spaciaux. On vérifie immédiatement (en commençant par traiter le cas $n = 1$) que

$$\widehat{f}(\omega) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1 + \omega_j^2)}.$$

En effet

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-(1+i\omega)t} + e^{-(1-i\omega)t}) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} \right) = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

La densité de probabilités sur l'espace des fréquences \mathbb{R}_ω^n définie par

$$\omega \mapsto \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1 + \omega_j^2)}$$

(et qui est à une constante près le spectre de la densité de probabilités d'un vecteur aléatoire suivant une loi exponentielle dans \mathbb{R}^n) induit la loi de probabilité dite *loi de Poisson*³³.

Exemple 2.6. Dans le cas $n = 1$, une loi tout aussi importante est la loi exponentielle sur $[0, \infty[$ de paramètre $\lambda > 0$: il s'agit de la loi de probabilité de densité la fonction définie presque partout par

$$f_\lambda(t) := \lambda \chi_{[0, \infty[}(t) e^{-\lambda t}.$$

On la rencontre par exemple dans les processus de désintégration atomique. Le spectre de f_λ a pour représentant dans l'espace des fréquences la fonction

$$\omega \mapsto \lambda \int_0^\infty e^{-i\omega t - \lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + i\omega};$$

c'est un spectre complexe de par la dissymétrie de f_λ comparée à la symétrie de la densité f introduite à l'exemple précédent.

Proposition 2.7 *Le spectre \widehat{f} d'un élément f de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^n , tendant vers 0 à l'infini³⁴. L'application linéaire $f \mapsto \widehat{f}$ est donc une application linéaire continue (de norme inférieure à 1) du \mathbb{C} -espace de Banach $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ dans le \mathbb{C} -espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})_0$ des fonctions continues de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} tendant vers 0 à l'infini, autrement dit, on a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. De plus, si A est un \mathbb{R} -isomorphisme algébrique de \mathbb{R}^n , on a*

$$\widehat{f(A(\cdot))} = \frac{1}{|\det A|} \widehat{f}(A'(\cdot)), \tag{2.28}$$

où $A' = (A^{-1})^t$ désigne la transposée de l'inverse de A , soit la matrice duale³⁵ de A .

33. Mathématicien français, Siméon-Denis Poisson (1781-1840), fut l'un des pionniers de la théorie des séries et des intégrales de Fourier. Attention toutefois à ne pas confondre la loi de Poisson à densité sur \mathbb{R} introduite ici avec la loi discrète sur \mathbb{N}^* (dite aussi *loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$*), définie par $P(X = n) = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

34. Cette dernière assertion est connue sous la terminologie de *lemme de Riemann-Lebesgue*; c'est la version continue du résultat établi lors de l'étude de la transformation de Fourier sur $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (voir la définition 2.5).

35. Si v_1, \dots, v_n sont les vecteurs colonnes de A (exprimés dans la base canonique e_1, \dots, e_n) et (v_1^*, \dots, v_n^*) la base duale de la base (v_1, \dots, v_n) , la j -ème colonne de A' représente la liste des coordonnées de v_j^* exprimé dans la base (e_1^*, \dots, e_n^*) , base duale de la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n .

Preuve. La continuité de \widehat{f} est une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue (de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre) vu dans le cours d'intégration (UE MA5012, théorème 3.1) puisque, si f est un représentant de \dot{f} ,

$$|f(x)e^{-i\langle x, \omega \rangle}| = |f(x)|$$

et que $|f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, dx)$ définit par conséquent un chapeau majorant intégrable. L'inégalité

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|\dot{f}\|_1$$

est immédiate (le module de l'intégrale d'une fonction est majoré par l'intégrale du module de cette fonction). La formule (2.28) résulte de l'application du théorème de changement de variables (théorème 3.5 du cours de théorie de l'intégration) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(A.x)e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx &= \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle A^{-1}.y, \omega \rangle} dy \\ &= \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y, (A^{-1})^t.\omega \rangle} dy = \frac{1}{|\det A|} \widehat{f}(A'.\omega). \end{aligned}$$

En particulier, si $\epsilon > 0$, la transformée de Fourier de la fonction

$$x \mapsto g_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \epsilon^n}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\epsilon^2}}$$

est la fonction

$$\omega \mapsto \exp(-\epsilon^2\|\omega\|^2/2).$$

Cette gaussienne tend uniformément vers 0 (ainsi d'ailleurs que chacune de ses dérivées partielles à tout ordre) lorsque $\|\omega\|$ tend vers l'infini.

Il nous reste à prouver que $\widehat{f}(\omega)$ tend vers 0 lorsque $\|\omega\|$ tend vers $+\infty$ (propriété dite de *Riemann-Lebesgue*). Fixons $\eta > 0$ et une suite $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ de nombres strictement positifs tendant vers 0. Puisque la famille $(g_{\epsilon_k})_{k \geq 1}$ réalise une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, dx)$, on sait³⁶ que, pour k assez grand

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_{\epsilon_k}\|_{\infty} \leq \|\dot{f} - \dot{f}_{\epsilon_k}\|_1 \leq \eta/2, \quad (2.29)$$

où \dot{f}_{ϵ_k} a pour représentant la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g_{\epsilon_k}(y) dy.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$ pour qu'il en soit ainsi. On peut calculer le spectre de \dot{f}_{ϵ_k} en remarquant

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{\epsilon_k}(t)f(x-t) dt \right) e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g_{\epsilon_k}(t)f(x-t)e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g_{\epsilon_k}(t)f(x-t)e^{-i\langle t, \omega \rangle} e^{-i\langle x-t, \omega \rangle} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_{\epsilon_k}(t)e^{-i\langle t, \omega \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)e^{-i\langle x-t, \omega \rangle} dx \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_{\epsilon_k}(t)e^{-i\langle t, \omega \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx \right) dt = \widehat{f}(\omega) \widehat{g_{\epsilon_k}}(\omega) = \widehat{f}(\omega) e^{-\epsilon_k^2\|\omega\|^2/2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

36. Voir la proposition 4.10 du cours de théorie de l'intégration, UE MA5012; ce résultat a d'ailleurs été rappelé (dans le contexte L^2 , ici nous l'invoquons dans le contexte L^1) dans la section 1.9.1 du chapitre 1 du présent cours.

(la première égalité résulte de l'application de Fubini, la seconde de la propriété clef de l'exponentielle échangeant addition et multiplication, puis vient finalement Fubini une nouvelle fois et l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation sur \mathbb{R}^n)³⁷. On a donc

$$|\widehat{f_\epsilon}(\omega)| \leq \|f\|_1 e^{-\epsilon^2 \|\omega\|^2 / 2},$$

d'où il résulte qu'il existe, k étant ainsi choisi, un seuil $\Omega(\eta, k)$ tel que

$$\|\omega\| \geq \Omega(\eta, k) \implies |\widehat{f_{\epsilon_k}}(\omega)| \leq \eta/2.$$

En combinant avec (2.29), on a donc

$$\|\omega\| \geq \Omega(\eta, k) \implies |\widehat{f}(\omega)| \leq \|\dot{f} - \dot{f_{\epsilon_k}}\|_1 + |\widehat{f_{\epsilon_k}}(\omega)| \leq \eta/2 + \eta/2 = \eta.$$

Comme η avait été choisi arbitrairement (puis k fonction de η), on a bien

$$\lim_{\|\omega\| \rightarrow +\infty} |\widehat{f}(\omega)| = 0$$

et la proposition est ainsi complètement démontrée. \diamond

Remarque 2.13. Nous avons choisi ici, par souci de cohérence avec la trame du cours, où les gaussiennes sont appelées à jouer un rôle important, de démontrer la propriété de Riemann Lebesgue en utilisant la régularisation par une approximation de la masse de Dirac du type $(g_{\epsilon_k})_{k \geq 1}$. Nous aurions pu aussi remarquer que la propriété de Riemann-Lebesgue (le fait que le spectre de \dot{f} tende vers 0 à l'infini) est satisfaite lorsque f est la fonction indicatrice³⁸ d'un pavé fermé borné $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ (voir l'exemple 2.3). On sait que les classes des combinaisons linéaires finies à coefficients complexes de telles fonctions indicatrices constituent un sous-espace dense \mathcal{E} dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$. En utilisant le même schéma de preuve que ci-dessus ($\dot{f_{\epsilon_k}}$ dans (2.29) étant remplacé par une approximation \dot{f}_η précisément dans \mathcal{E}), on prouverait également le résultat.

Exemple d'application 4.7. En appliquant la formule (2.28), on voit que si $m \in \mathbb{R}^n$ et $\sigma \in]0, +\infty[^n$ le spectre de

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - m_j|^2}{\sigma_j^2}\right) \quad (2.31)$$

(loi d'un vecteur de variables aléatoires indépendantes X_j , avec X_j de loi $\mathcal{N}(m_j, \sigma_j)$, $j = 1, \dots, n$) est

$$(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \exp\left(-i\langle m, \omega \rangle - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \omega_j^2\right). \quad (2.32)$$

On constate d'ailleurs sur l'exemple précédent un fait tout à fait général : si \dot{f} est un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ et m un vecteur de \mathbb{R}^n , alors le spectre de la classe translaturée $\dot{f}(\cdot - m)$ est

$$\left[\dot{f}(\cdot - m)\right]^\wedge(\omega) = e^{-i\langle m, \omega \rangle} \widehat{f}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

37. Le calcul fait ici est un cas particulier d'un calcul plus général que nous ferons une fois plus loin, en nous souvenant que $\dot{f_{\epsilon_k}} = \dot{f} * \dot{g_{\epsilon_k}}$.

38. On préfère utiliser ici l'épithète « *indicatrice* » plutôt que « *caractéristique* » (souvent utilisée dans le cours d'intégration) pour éviter la confusion avec la notion de *fonction caractéristique* d'un vecteur de variables aléatoires réelles (voir plus loin).

L'effet d'une translation de m dans l'espace \mathbb{R}_x^n (ce qui revient à considérer les fonctions de x comme fonctions de $x - m$) se traduit donc (dans l'espace \mathbb{R}_ω^n) par une modulation du spectre \widehat{f} par la fonction oscillante

$$\omega \longmapsto e^{-i\langle m, \omega \rangle}.$$

Si maintenant inversement \dot{f} est modulée par multiplication par la fonction oscillante

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto e^{i\langle x, m \rangle}$$

alors le spectre de \dot{f} est translaté de m dans l'espace \mathbb{R}_ω^n , ce que l'on résume en écrivant

$$\left[\dot{f} e^{i\langle x, m \rangle} \right]^\wedge(\omega) = \widehat{f}(\omega - m), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n. \quad (2.34)$$

Une incursion du côté des probabilités. Puisque nous avons ici (en particulier dans notre galerie d'exemples 2.3 à 2.7) fait souvent référence aux probabilités, il est important de faire ici le lien avec une notion introduite dans le cours de théorie de l'intégration (section 3.2.3 du cours de MA5012) ainsi que dans le cours de Probabilités de Semestre 6 : celle de *fonction caractéristique* d'un vecteur de variables aléatoires réelles $X = (X_1, \dots, X_n)$ définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) ; il s'agit, rappelons le, de la fonction continue $\Phi_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par³⁹

$$\Phi_X(\tau_1, \dots, \tau_n) := \int_{\Omega} e^{i\langle \tau_1 X_1(\omega) + \dots + \tau_n X_n(\omega) \rangle} dP(\omega) = E[e^{i\langle \tau, X \rangle}].$$

On remarque que, si la loi de X est une loi à densité $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, dx)$, on a

$$\overline{\Phi_X(\tau)} = \int_{\Omega} e^{-i\langle \tau, X(\omega) \rangle} dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \dot{f}(x) e^{-i\langle \tau, x \rangle} dx = \widehat{\dot{f}}(\tau),$$

d'où l'intime relation entre les notions de transformation de Fourier sur L^1 et de prise de fonction caractéristique d'un vecteur de variables aléatoires suivant une loi à densité sur \mathbb{R}^n . Le concept de fonction caractéristique s'étend cependant aux vecteurs de variables aléatoires de loi quelconque et non plus à densité, ce qui élargit le cadre de la transformation de Fourier (même si ici elle n'est envisagée que pour des classes \dot{f} de fonctions positives d'intégrale 1, comme c'est le cas pour toute densité de probabilité). Notons deux règles de calcul importantes : si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, alors

$$\forall \tau \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi_X(\tau_1, \dots, \tau_n) = \prod_{j=1}^n \Phi_{X_j}(\tau_j) \quad (2.35)$$

et

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi_{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n}(\tau) = \prod_{j=1}^n \Phi_{X_j}(\lambda_j \tau), \quad (2.36)$$

toutes les deux conséquences de la mutuelle indépendance des X_j et du fait que l'exponentielle complexe réalise un homomorphisme entre $(\mathbb{C}, +)$ et (\mathbb{C}^*, \times) :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \exp(z + w) = \exp z \times \exp w,$$

propriété algébrique dont on a très souvent dans ce chapitre déjà eu l'occasion de souligner l'intérêt majeur.

39. Attention ici! on ne peut plus utiliser ω comme variable sur l'espace des « fréquences » puisque ω est ici réservé à l'indexation des événements dans l'ensemble abstrait Ω .

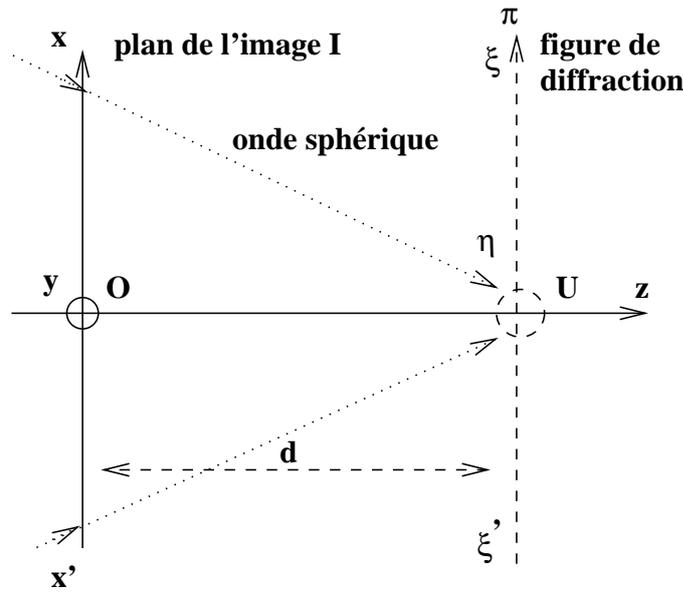


FIGURE 2.5 – Réalisation de la transformation de Fourier optique

2.4.2 La relation avec l'optique

C'est un dispositif optique qui (lorsque $n = 2$) permet de réaliser comme une transformation physique la transformation de Fourier ; c'est en effet la *diffraction de Fraunhofer*⁴⁰ qui réalise de manière optique la transformation d'une image $2D$ en son spectre. Utilisons donc ici un instant le langage des physiciens. Supposons qu'une onde sphérique monochromatique (λ),

$$(t, x, y, z) \mapsto a \exp \left(-i\omega t - ik \frac{x^2 + y^2}{2d} \right)$$

(avec *nombre d'onde* $k = 2\pi/\lambda$), convergeant à la distance d du plan diffractant $\pi = xOy = \{z = 0\}$ (voir la figure 2.5), éclaire un objet qui se trouve dans ce plan diffractant et dont la transmittance en amplitude réalise une distribution d'image $(x, y) \mapsto I(x, y)$; alors (sous réserve que l'on puisse se placer dans le contexte où est valide la règle d'approximation dite « des petits angles »), l'amplitude diffractée dans le plan de convergence $\xi U \eta$ vaut

$$a_{\text{diffract}}(\xi, \eta) = \frac{ka}{2\pi id} \exp \left(ikd - i\omega t + ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2d} \right) \widehat{I}(\xi k/d, \eta k/d). \quad (2.37)$$

Cette formule montre donc que le mécanisme de diffraction de Fraunhofer réalise optiquement la prise de spectre d'une image, à savoir ici l'image I dont le spectre se lit à l'aide de la formule (2.37) à partir de l'amplitude lumineuse diffractée a_{diffract} (on constate en particulier que le module de \widehat{I} correspond en particulier au module de l'amplitude diffractée). Cette interprétation « physique » de la transformation de Fourier expliquera le principe de conservation d'énergie (que matérialisera la formule de Plancherel) que nous énoncerons dans la section 2.5.2.

40. Mise en évidence et étudiée par Joseph von Fraunhofer, opticien allemand (1787-1828).

2.4.3 Fourier et la convolution dans $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$

On rappelle⁴¹ que la convolée $\dot{f} * \dot{g}$ de deux éléments de $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est définie comme l'élément de $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n)$ dont un représentant est la fonction définie dx -presque partout par

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy;$$

l'opération de convolution définie ainsi est une opération interne sur $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$, associative, commutative, mais sans élément neutre⁴².

Certes aucun élément de $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ ne vient remplacer l'élément $e_{0,\dots,0}$ de la base canonique de $l_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{Z}^n)$ et l'on ne peut (comme on aurait envie de le faire) illustrer l'omniprésence de l'opération de convolution dans le cadre continu aussi bien que comme on l'a fait dans le cadre discret⁴³ : la translation $\dot{f} \rightarrow \dot{f}(\cdot - x_0)$ est par exemple un opérateur continu de $L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ dans lui-même, invariant par translation, mais ne se représente pourtant pas comme un opérateur de la forme

$$\dot{f} \mapsto \dot{f} * \dot{h}$$

avec $\dot{h} \in L_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$. Le cadre L^1 (ou même L^2 , le problème est en fait le même), lorsque l'on travaille en continu et non plus en discret, s'avère en effet être un cadre trop restreint pour que l'opération de convolution puisse réellement pendre toute sa signification. C'est la théorie des *distributions* (voir les cours ultérieurs de master 1) qui permettra d'élargir ce cadre, de donner à cette opération tout son sens et de comprendre par là même la raison de son omniprésence en ingénierie (lorsque l'on travaille avec des appareils agissant de manière linéaire, continue en un certain sens, et surtout présentant des caractéristiques immuables en temps ou en espace). Il est cependant bien utile à ce niveau de déjà suggérer cet aspect « pratique » que revêt l'opération de convolution en ingénierie.

La prise de spectre persiste dans le cadre L^1 (comme elle le faisait dans le cadre fini, discret ou périodique, voir les propositions 2.2, 2.3, 2.4, 2.5) à échanger les opérations de convolution et de multiplication ; on a en effet la :

Proposition 2.8 Soit \dot{f}_1 et \dot{f}_2 deux éléments de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$; on a, pour tout ω dans \mathbb{R}^n , la formule

$$[\dot{f}_1 * \dot{f}_2]^{\wedge}(\omega) = \widehat{f}_1(\omega) \times \widehat{f}_2(\omega).$$

Preuve. Grâce au théorème de Fubini (on vérifie la clause de sécurité car les représentants f_1 et f_2 choisis sont intégrables sur \mathbb{R}^n) et à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, on a, pour ω fixé dans \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)f_2(x-y) dy \right) e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx = \int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f_1(y)f_2(x-y)e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx dy \\ & = \int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f_1(y)f_2(x-y)e^{-i\langle y, \omega \rangle} e^{-i\langle x-y, \omega \rangle} dx dy \end{aligned}$$

41. Voir l'énoncé du théorème de Young (théorème 4.2 du cours de théorie de l'intégration MA5012).

42. Voir la troisième séquence du guide d'activité 10 proposé sous Ulysse pour le cours de MA512 (Contrat Automne 2009)

43. Voir la section 4.5.1 du cours de théorie de l'intégration.

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) e^{-i\langle y, \omega \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_2(x-y) e^{-i\langle x-y, \omega \rangle} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) e^{-i\langle y, \omega \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_2(x) e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx \right) dy = \widehat{f}_1(\omega) \widehat{f}_2(\omega). \end{aligned}$$

La proposition est donc ainsi démontrée. \diamond .

Exemple d'application 2.8. Considérons deux fonctions de la forme

$$\begin{aligned} \varphi &: x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sigma_1 \cdots \sigma_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - m_j|^2}{\sigma_j^2}\right) \\ \tilde{\varphi} &: x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\tilde{\sigma}_1 \cdots \tilde{\sigma}_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - \tilde{m}_j|^2}{\tilde{\sigma}_j^2}\right), \end{aligned}$$

où m, \tilde{m} sont des éléments de \mathbb{R}^n et $\sigma, \tilde{\sigma}$ des éléments de $]0, +\infty[^n$. En passant (aller-retour) par la transformation de Fourier (et en utilisant les calculs faits pour passer de (2.31) à (2.32) *via* Fourier), on observe que

$$\varphi * \tilde{\varphi} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\Sigma_1 \cdots \Sigma_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - M_j|^2}{\Sigma_j^2}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} M &= m + \tilde{m} \\ \Sigma_j &= \sqrt{\sigma_j^2 + \tilde{\sigma}_j^2}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ceci montre en particulier que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le \mathbb{K} -sous-espace vectoriel G^{44} de $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, dx)$ engendré (au sens algébrique) par les classes des gaussiennes $g_\epsilon(\cdot - x_0)$, $\epsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, est stable par convolution. Remarquons aussi que, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'image de G par la transformation de Fourier est un \mathbb{C} -sous-espace \widehat{G} de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega, d\omega)$. Le sous-espace \mathcal{G}^{45} engendré par les fonctions

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{i\langle x, \omega \rangle} g_\epsilon(x - x_0), \quad x_0, \omega \in \mathbb{R}^n, \quad \epsilon > 0$$

(et contenant donc G) est, lui, stable par prise de spectre (et aussi en fait par convolution, vérifiez le en exercice) ; il contient à la fois G et \widehat{G} si l'on décide d'identifier les deux copies de \mathbb{R}^n en jeu dans la transformation de Fourier. C'est d'ailleurs le plus petit sous-espace de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x \simeq \mathbb{R}^n_\omega, dx \simeq d\omega)$ contenant à la fois G et \widehat{G} .

2.4.4 La formule d'inversion dans le cadre L^1

L'un des résultats majeurs (et assez inattendu) de la théorie de Fourier au niveau L^1 est la *formule d'inversion* qui nous assure que tout élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ peut s'écrire comme un « empilement » de fonctions oscillantes

$$x \mapsto e^{i\langle x, \omega \rangle}, \quad \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Pourquoi inattendu ? Aucune de ces fonctions oscillantes (sauf la fonction nulle), ne définit en effet une classe de fonctions intégrable ; comment, en « empilant » astucieusement de telles fonctions, espérer récupérer toutes les fonctions intégrables ?

44. La terminologie que l'on a choisi ici pour qualifier ce sous-espace particulièrement intéressant (car engendré par les classes des versions translatées, comprimées ou dilatées, de la gaussienne de référence g) fait référence (ce n'est pas une surprise) à Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

45. La terminologie choisie ici pour qualifier ce sous-espace (engendré cette fois par les classes des versions translatées, comprimées ou dilatées, mais cette fois aussi modulées, de la gaussienne de référence g) fait référence aux travaux du physicien d'origine hongroise Dennis Gabor (1900-1979), prix Nobel de Physique en 1971, à qui l'on doit l'introduction d'un tel « dictionnaire » d'atomes.

Tout est bien sûr de fait caché dans l'« empilement » qui permet, lui, les phénomènes de cancellation (ou de *battements* dans le langage des physiciens, employé surtout en dimension $n = 1$). On retrouve dans cette formule d'inversion la grande idée de Fourier, suivant laquelle tout phénomène physique s'écrirait comme un empilement de phénomènes ondulatoires élémentaires.

Théorème 2.4 (Formule d'inversion dans le cadre L^1) Soit \dot{f} un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$, tel que \widehat{f} soit une fonction intégrable sur l'espace des fréquences \mathbb{R}^n_{ω} . Alors f admet pour représentant la fonction continue :

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega.$$

Preuve. Le point de départ est la proposition 4.10 du cours d'intégration MA5012 qui assure que si $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ est une suite de nombres strictement positifs tendant vers 0, alors

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, dx)}} \dot{f} * \dot{g}_{\epsilon_k} = \dot{f}.$$

Confondons un instant les deux copies de \mathbb{R}^n que sont \mathbb{R}^n_x et \mathbb{R}^n_{ω} . Pour $\epsilon > 0$, la fonction

$$x \simeq \omega \longmapsto g_{\epsilon}(x)$$

est en fait le spectre de la classe de fonction

$$x \simeq \omega \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\epsilon^2 \|x\|^2/2} = h_{\epsilon}(x)$$

(il suffit de considérer cette classe sur le modèle (2.31) et de calculer son spectre sur le modèle (2.32)). Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. On peut donc écrire, en utilisant Fubini (la clause de sécurité est remplie car \dot{f} et \dot{h}_{ϵ_k} sont dans $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, dx)$) et le fait que $g_{\epsilon}(x - y) = g_{\epsilon}(y - x)$:

$$\begin{aligned} f * g_{\epsilon_k}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_{\epsilon_k}(\omega) e^{-i\langle \omega, y-x \rangle} d\omega \right) dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) h_{\epsilon_k}(\omega) e^{-i\langle \omega, y-x \rangle} dy d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \omega \rangle} h_{\epsilon_k}(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y, \omega \rangle} dy \right) d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \omega \rangle} e^{-\epsilon_k^2 \|\omega\|^2/2} \widehat{f}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Si k tend vers l'infini, le théorème de convergence dominée de Lebesgue (applicable ici puisque \widehat{f} est supposée intégrable sur \mathbb{R}^n_{ω}) implique

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \omega \rangle} e^{-\epsilon_k^2 \|\omega\|^2/2} \widehat{f}(\omega) d\omega \right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega.$$

Comme l'on sait d'autre part que $\dot{f} * \dot{g}_{\epsilon_k}$ converge vers \dot{f} dans $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, dx)$ et que ceci implique donc⁴⁶ l'existence d'une suite $(f * g_{\epsilon_{k_p}})_{p \geq 0}$ convergeant en presque tout x

46. Voir la proposition 4.6 du cours de théorie de l'intégration MA5012, avatar essentiel de la démonstration du théorème de Riesz-Fischer.

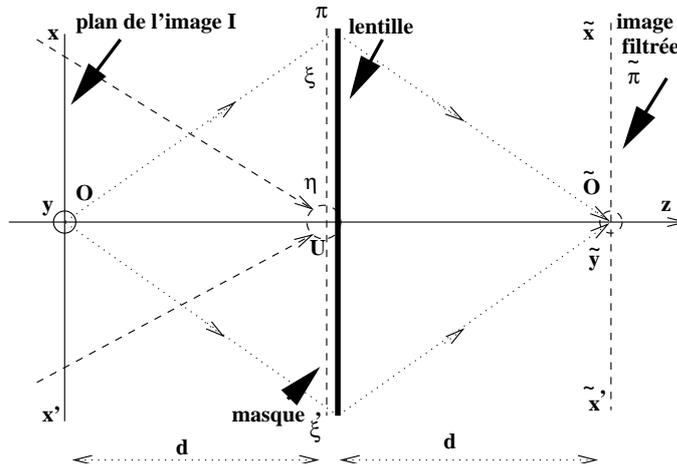


FIGURE 2.6 – Expérience de Abbe

vers $f(x)$, où f est un représentant de \hat{f} , la conclusion du théorème est donc bien démontrée. \diamond

Une nouvelle incursion du côté de l’optique : l’expérience de Abbe.

Voici une nouvelle incursion du côté de l’optique, à la lumière de la formule d’inversion du théorème 2.4. C’est l’expérience de la *double diffraction* (voir la figure 2.6), dite aussi *expérience de Abbe*⁴⁷ qui permet elle la réalisation optique de la convolution comme opération optique. On suppose que le plan $\pi = \xi U \eta$ dans lequel se forme la première figure de diffraction de l’image I (I étant une image vivante dans le plan des images xOy) est le plan d’un masque de filtrage dont la transmittance en amplitude est $\hat{h}(k\xi/d, k\eta/d)$, où h est une autre distribution d’image dans le plan π . L’effet du masque est de transformer l’amplitude lumineuse *diffractée*

$$a_{\text{diffract}}(\xi, \eta) = \frac{ka}{2\pi id} \exp\left(ikd - i\omega t + ik\frac{\xi^2 + \eta^2}{2d}\right) \hat{I}(\xi k/d, \eta k/d)$$

en l’amplitude *diffractée-masquée*

$$a_{\text{diffract}}(\xi, \eta) \times \hat{h}(k\xi/d, k\eta/d).$$

Comme le spectre de la distribution d’image

$$(\xi, \eta) \mapsto \hat{I}(k\xi/d, k\eta/d) \hat{h}(k\xi/d, k\eta/d)$$

est formellement (d’après le théorème 2.4) donné en les variables (x, y) par

$$(x, y) \mapsto \frac{4\pi^2 d^2}{k^2} [I * h](-dx/k, -dy/k),$$

l’image obtenue dans le plan $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$ de la figure 2.6 après la seconde diffraction est

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto a \exp\left(2ikd - i\omega t + ik\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2d}\right) [I * h](\tilde{x}, \tilde{y})$$

47. Ernst Abbe (1840-1905) est un mathématicien et physicien allemand à qui l’on doit le schéma de cette expérience.

et l'on réalise bien via ce procédé de double diffraction la convolution de manière optique. L'idée est toujours de prendre les spectres des deux êtres I et h à convoler (c'est le but de la première diffraction), de multiplier terme à terme ces spectres (c'est l'effet du « masque » correspondant à \widehat{h} dans le plan π), puis d'utiliser la formule d'inversion de Fourier, ce qui revient à effectuer une seconde transformée de Fourier, donc une seconde diffraction, pour retrouver l'antécédent, en l'occurrence $I * h$. La proposition 2.8 soutend bien sûr cette démarche.

Un avatar en probabilités : le théorème « limite central ».

Concluons cette section par une nouvelle incursion vers la théorie des probabilités. Supposons que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ soit une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, toutes définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) , toutes de même loi, avec $E[X^2] = 1$ et $E[X] = 0$ si $X := X_1$. Si l'on calcule la fonction caractéristique de

$$Y_k := \frac{X_1 + \cdots + X_k}{\sqrt{k}}$$

(notons que l'écart type de Y_k est ainsi normalisé égal à 1), on constate, du fait de l'indépendance mutuelle des X_k et donc de la formule (2.36), que

$$\Phi_{Y_k}(\tau) = [\Phi_{X/\sqrt{k}}(\tau)]^k.$$

Or

$$\Phi_{X/\sqrt{k}}(\tau) = \int_{\Omega} e^{i\tau X(\omega)/\sqrt{k}} dP(\omega) = \Phi_X(\tau/\sqrt{k}).$$

D'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (appliqué deux fois), le fait que le moment d'ordre deux $E[X^2]$ soit fini implique que la fonction Φ_X est deux fois différentiable en $\tau = 0$ et que l'on peut écrire, grâce à la formule de Taylor-Young,

$$\Phi_X(\tau/\sqrt{k}) = 1 - \frac{\tau^2}{2k} E[X^2] + o((\tau/\sqrt{k})^2) = 1 - \frac{\tau^2}{2k} + o((\tau/\sqrt{k})^2),$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi_{Y_k}(\tau) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\tau^2}{2k} + o((\tau/\sqrt{k})^2) \right)^k = \exp(-\tau^2/2) = \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(\tau),$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ désigne n'importe quelle variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{T}, P) suivant une loi normale (de densité la gaussienne g). Si maintenant φ est un élément de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}, dt)$ tel que le spectre de φ soit intégrable⁴⁸, on peut écrire, d'après le théorème 2.4 et le théorème de Fubini, que pour tout $k \in \mathbb{N}$ (P_{Y_k} désignant la distribution de probabilité de la variable Y_k sur \mathbb{R}),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(Y_k) dP &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dP_{Y_k}(t) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\tau) e^{i\tau t} d\tau \right] dP_{Y_k}(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\tau) \left[\int_{\Omega} e^{i\tau t} dP_{Y_k}(t) \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\tau) \Phi_{Y_k}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

48. D'après la formule d'inversion du théorème 2.4, on peut donc considérer φ comme une fonction continue tendant vers 0 à l'infini (mais attention, une fonction continue tendant vers 0 à l'infini n'est pas forcément du type envisagé ici, les hypothèses faites ici sur φ étant plus restrictives).

Comme $\|\Phi_{Y_k}\|_\infty \leq 1$, on déduit du théorème de convergence dominée de Lebesgue et du fait que Φ_{Y_k} converge ponctuellement vers la gaussienne g que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(Y_k) dP = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\tau) g(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \widehat{g}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) g(t) dt,$$

soit, utilisant le principe de transport des mesures de probabilités,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(Y_k) dP = \int_{\Omega} \varphi(\mathcal{N}(0, 1)) dP. \quad (2.38)$$

De fait, ce résultat est en fait valable pour toute fonction φ continue bornée sur \mathbb{R} (on l'admettra ici, c'est la conséquence d'un célèbre théorème de Paul Lévy⁴⁹, et le résultat (partiellement) prouvé ici n'est rien d'autre que le célèbre *théorème « limite central »*⁵⁰ (voir l'UE M1MA6M11 ou l'UE N1MA6031⁵¹). Ce théorème (dont on vient de voir, ne serait-ce que par la preuve évoquée ici, qu'il n'était pas étranger à la transformation de Fourier) est l'une des raisons expliquant le rôle crucial joué par la gaussienne (on en verra une autre raison lorsque nous évoquerons dans la section 2.5.3 le principe d'incertitude de Werner Heisenberg, théorème 2.7). La célèbre *expérience de Galton* consistant à laisser tomber un stock de billes au dessus d'une grille avec des plots (la bille pouvant tomber indifféremment à gauche ou à droite lorsqu'elle rencontre un plot, ce suivant une loi binomiale) montre au final que le tas de billes se répartit dans les canaux du réceptacle suivant une distribution de Gauss, comme sur la figure 2.7 ci-dessous ; c'est l'illustration même du théorème limite central.

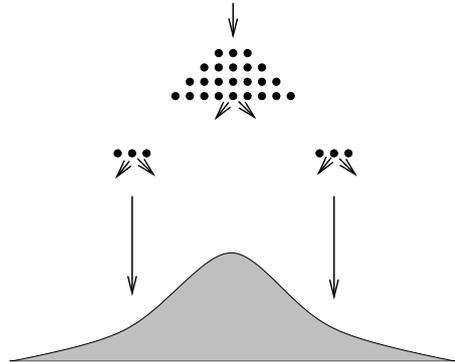


FIGURE 2.7 – Le triangle de Galton

2.4.5 L'inversion locale et la formule sommatoire de Poisson

Commençons dans cette section par énoncer un analogue continu du théorème de Jordan-Dirichlet (théorème 2.1) concernant la restitution « locale » d'un élément

49. « Si une suite $(Y_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires réelles toutes définies sur un même espace de probabilités est telle que la suite des fonctions caractéristiques $(\Phi_{Y_k})_{k \geq 1}$ converge ponctuellement vers une fonction Φ continue en $\tau = 0$, alors Φ est la fonction caractéristique d'une distribution de probabilité P_Y et la suite des lois des variables aléatoires $(Y_k)_{k \geq 1}$ converge en loi vers la distribution de probabilité P_Y ». Le probabiliste français Paul Lévy (1886-1971), certainement l'un des pionniers de la théorie des probabilités modernes, publia ce résultat en 1924 et son application au théorème limite central en est une des applications les plus célèbres.

50. Il s'agit d'un théorème limite, central dans la théorie.

51. Polycopié en ligne sur <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/Proba6031.pdf>

$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, dt)$ à partir de la connaissance de son spectre. On oubliera dans cette section les classes de fonctions \hat{f} pour nous intéresser plus spécifiquement (parce que les valeurs ponctuelles des fonctions seront en jeu) à des représentants particuliers f de ces classes. Nous nous placerons aussi en dimension $n = 1$ (la variable temporelle sera donc le temps t).

Théorème 2.5 (Théorème de Jordan-Dirichlet, version continue) *Soit f un élément de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, dt)$ et t_0, l deux nombres réels tels que*

$$\int_0^1 \frac{|f(t_0 + u) + f(t_0 - u) - 2l|}{|u|} < +\infty \quad (2.39)$$

alors

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{it_0\omega} d\omega = l.$$

Preuve. Grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{i(t_0, \omega)} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{it_0\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i(t-t_0)\omega} d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\sin \Omega(t-t_0)}{t-t_0} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(t_0+u) + f(t_0-u)) \frac{\sin \Omega u}{u} du. \end{aligned}$$

On a, en utilisant le fait que

$$\forall \Omega > 0, \int_0^{\infty} \frac{\sin \Omega u}{u} du = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

(il s'agit d'une intégrale semi convergente, voir par exemple le cours de L2 et le polycopié du cours d'Analyse 3 (anciennement UE MHT401)⁵²),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(t_0+u) + f(t_0-u)) \frac{\sin \Omega u}{u} du - l \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (f(t_0+u) + f(t_0-u) - 2l) \frac{\sin \Omega u}{u} du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} (f(t_0+u) + f(t_0-u)) \frac{\sin \Omega u}{u} du - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sin \Omega u}{u} du. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Les deux premières intégrales dans le membre de droite de (2.40) tendent vers 0 grâce au lemme de Riemann-Lebesgue (proposition 2.7) puisque les fonctions mesurables

$$\begin{aligned} u &\longmapsto \chi_{[0,1]}(u) \frac{f(t_0+u) + f(t_0-u) - 2l}{u} \\ u &\longmapsto \chi_{[1,\infty[}(u) \frac{f(t_0+u) + f(t_0-u)}{u} \end{aligned}$$

52. <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mat401.pdf>

sont dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, dt)$. Enfin

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sin \Omega u}{u} du = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\Omega}^{\infty} \frac{\sin \Omega u}{u} du = 0.$$

La proposition est donc démontrée. \diamond

Exemple d'application 2.9. Voici l'application majeure de ce résultat, comme dans le cadre périodique (comparez avec l'application du théorème 2.1) : si f présente une limite à gauche ($f(t_0 - 0)$) en t_0 ainsi qu'une limite à droite ($f(t_0 + 0)$) en ce même point, alors on peut affirmer que

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\omega) e^{it_0\omega} d\omega = \frac{f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)}{2}$$

à condition toutefois que soit remplie la clause de sécurité suivante : le graphe de f présente des demi-tangentes à gauche et à droite respectivement aux points $(t_0, f(t_0 - 0))$ et $(t_0, f(t_0 + 0))$. Il est important de souligner cependant que ce phénomène de restitution locale de f à partir de son spectre est, comme dans le cadre périodique, entaché du phénomène d'*aliasing* de Gibbs (figure 2.2 de la section 2.3.3).

Une autre application importante est la formule sommatoire de Poisson qui permet de « resommer » une série numérique convergente de manière à pouvoir améliorer la vitesse de convergence des sommes partielles de la série.

Proposition 2.9 (Formule sommatoire de Poisson⁵³) *Soit \dot{f} un élément de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, dt)$ tel que $\widehat{f} \in L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, d\omega)$ et f son unique représentant continu. La série bilatère*

$$[\widehat{f}(\cdot - 2k\pi)]_{k \in \mathbb{Z}}$$

est donc absolument convergente dans $L_{\mathbb{C}}^1([-\pi, \pi], d\theta)$ et sa somme (dans cet espace de Banach) définit un élément $\dot{\psi} \in L_{\mathbb{C}}^1([-\pi, \pi], d\theta)$ que l'on suppose de plus avoir un représentant continu en $\theta = 0$ et présentant des dérivées à gauche et à droite en ce point. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N f(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(2k\pi) \in \mathbb{C}.$$

Preuve. Comme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)| d\omega &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |\widehat{f}(\omega)| d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(\theta + 2k\pi)| d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\theta + 2k\pi)| \right) d\theta < +\infty, \end{aligned}$$

on a bien convergence absolue de la série bilatère $[\widehat{f}(\cdot - 2k\pi)]_{k \in \mathbb{Z}}$ dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, d\theta)$ vers un élément $\dot{\psi}$ de cet espace. Grâce à la formule d'inversion de Fourier (théorème 2.4), on sait que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

^{53.} On l'attribue au mathématicien français Siméon-Denis Poisson (1781-1840) que nous avons déjà évoqué à propos de la *loi de Poisson*.

et que par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N f(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \left(\sum_{k=-N}^N e^{ik\omega} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) D_N(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(u) D_N(u) du. \end{aligned}$$

Mais nous nous trouvons exactement dans conditions d'application du théorème de Jordan-Dirichlet (théorème 2.1 et son application) en $t_0 = 0$ à cause des hypothèses faites sur ψ . On en déduit

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(u) D_N(u) du = \psi(0),$$

d'où le résultat voulu. \diamond

Exemple 2.10. On a vu (exemple 2.5 de la section 2.4.1) que la fonction

$$t \mapsto \frac{e^{-|t|}}{2}$$

avait pour spectre la fonction

$$\omega \mapsto \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

D'après la formule d'inversion de Fourier (théorème 2.4), la fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}$$

a pour spectre

$$\widehat{f} : \omega \mapsto \pi e^{-|\omega|}.$$

On vérifie que les conditions d'application de la proposition 2.9 sont ici remplies et que par conséquent, pour chaque $\tau > 0$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + \tau^2 k^2} = \frac{\pi}{\tau} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi|k|/\tau}$$

(on travaille avec $t \mapsto f(\tau t)$ au lieu de f pour appliquer la formule). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2 \tau^2} + 1 &= \frac{\pi}{\tau} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\pi/\tau} - 1 \right) \\ &= \frac{\pi}{\tau} \frac{1 + e^{-2\pi/\tau}}{1 - e^{-2\pi/\tau}}. \end{aligned}$$

C'est un exemple où la série de droite (série géométrique) converge beaucoup plus vite que la série de gauche (série équivalente à une série de Riemann)⁵⁴. Si l'on prend $\tau \gg 1$, on écrit ceci

$$\frac{2}{\tau^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \frac{1}{\tau^2}} + 1 = \frac{\pi}{\tau} \times \frac{\tau}{2\pi} \left(2 + \frac{1}{6} (2\pi/\tau)^2 + \dots \right)$$

et l'on retrouve en mettant les deux membres sous la forme

$$1 + \frac{\alpha_1}{\tau^2} + o(\tau^{-2}) = 1 + \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\tau^2} + o(\tau^{-2})$$

54. Ceci sera un fait général dans l'utilisation de la formule de Poisson (c'est d'ailleurs une raison majeure de son intérêt) car on verra plus loin avec le principe d'incertitude d'Heisenberg (théorème 2.7) que mieux f est localisée en temps, plus \widehat{f} est diffus en fréquences (et *vice-versa*).

la valeur de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 2.11. Si $\tau > 0$, la gaussienne $t \mapsto e^{-t^2\tau^2/2}$ a pour transformée de Fourier la gaussienne $\omega \mapsto \frac{\sqrt{2\pi}}{\tau} e^{-\omega^2/(2\tau^2)}$; on déduit par conséquent de la formule sommatoire de Poisson la formule

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2\tau^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\tau} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{2\pi^2 k^2}{\tau^2}};$$

si τ est très petit, disons par exemple $\tau \simeq 10^{-3}$, $\tau^2 = 10^{-6}$ et il faut un nombre impressionnant de termes pour calculer la somme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2\tau^2/2}$$

avec une erreur de 10^{-3} (entraînez vous à calculer combien!); en revanche, le calcul approché de la somme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{2\pi^2 k^2}{\tau^2}}$$

se fait lui avec très peu de termes du fait que $1/\tau^2 \simeq 10^6$! C'est là toute la force de la formule sommatoire de Poisson!

2.5 La transformation de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$

2.5.1 Une isométrie de \mathcal{G} dans lui-même (pour la norme L^2)

On rappelle la définition du \mathbb{C} -sous-espace vectoriel \mathcal{G} de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ constitué des classes de fonctions intégrables de la forme

$$f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{i(\omega^{(j)}, x)} g_{\epsilon_j}(x - x^{(j)}),$$

où $x^{(j)}, \omega^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$, désignent des points respectivement de \mathbb{R}_x^n et \mathbb{R}_ω^n , ϵ_j , $j = 1, \dots, N$, des nombres strictement positifs, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ des coefficients complexes.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.10 *Pour tout $\dot{f} \in \mathcal{G}$, on a, pour tout représentant f de \dot{f} :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Preuve. On considère un représentant f de \dot{f} et la fonction

$$F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \dot{f} * \overline{\dot{f}(-\cdot)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{f(y-x)} dy \quad (2.41)$$

(il se trouve que l'intégrale ci dessus est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction de x ainsi définie est donc bien un représentant de l'élément $\dot{f} * \overline{\dot{f}(-\cdot)}$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$). On remarque que la fonction F définie par (2.41) est toujours un élément de \mathcal{G} (car \mathcal{G} est stable par convolution). Il résulte de la proposition 2.8 que l'on a

$$\left[\dot{f} * \overline{\dot{f}(-\cdot)} \right]^{\wedge} = \widehat{f} \times \left[\overline{\dot{f}(-\cdot)} \right]^{\wedge},$$

ce qui donne, pour tout $\omega \in \mathbb{R}_\omega^n$:

$$\begin{aligned} \left[\dot{f} * \overline{\dot{f}(-\cdot)} \right]^\wedge(\omega) &= \widehat{f}(\omega) \times \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)} e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx \\ &= \widehat{f}(\omega) \times \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{i\langle x, \omega \rangle} dx \\ &= \widehat{f}(\omega) \times \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx} \\ &= \widehat{f}(\omega) \times \widehat{\widehat{f}}(\omega) = |\widehat{f}(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Or la formule d'inversion de Fourier (théorème 2.4) nous assure qu'un autre représentant (lui aussi continu, comme F) de la classe $\dot{f} * \overline{\dot{f}(-\cdot)}$ est

$$\widetilde{F} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\omega)|^2 e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega.$$

Comme F et \widetilde{F} sont deux représentants continus du même élément de $L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}^n, dx)$, ces deux représentants coïncident et on a, en prenant leur valeur commune en $x = 0$,

$$F(0) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \widetilde{F}(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

ce qui est la formule escomptée. \diamond .

Les fonctions f représentant les éléments de \mathcal{G} étant clairement des fonctions de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n, dx)$, on peut prendre leurs classes dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n, dx)$ et noter également \mathcal{G} le \mathbb{C} -sous-espace que ces classes constituent dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n, dx)$ cette fois. On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.11 *L'application qui à $\dot{f} \in \mathcal{G} \subset L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}_x^n, dx)$ associe la classe de \widehat{f} dans $\mathcal{G} \subset L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}_\omega^n, d\omega)$ est un isomorphisme entre ces deux copies de \mathcal{G} (l'une sur \mathbb{R}_x^n , l'autre sur \mathbb{R}_ω^n) et l'on a de plus*

$$\|\dot{f}\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\widehat{f}\|_2^2. \quad (2.42)$$

L'isomorphisme inverse est l'application qui à $\dot{f} \in \mathcal{G} \subset L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}_\omega^n, d\omega)$ associe la classe (dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}_x^n, dx)$) de la fonction

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega.$$

Preuve. C'est une application immédiate de la proposition 2.10 et de la formule d'inversion de Fourier (théorème 2.4) applicable ici puisque \mathcal{G} (qui est invariant sous la transformation de Fourier si l'on décide d'identifier les deux copies \mathbb{R}_x^n et \mathbb{R}_ω^n en jeu dans cette transformation) est dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}_x^n \simeq \mathbb{R}_\omega^n, dx \simeq d\omega)$. \diamond

2.5.2 Extension à $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n, dx)$ et formule de Plancherel

Le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel $\mathcal{G} \subset L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}_x^n \simeq \mathbb{R}_\omega^n, dx \simeq d\omega)$ est invariant par prise de transformation de Fourier et est d'autre part un \mathbb{C} -sous-espace dense dans l'espace

de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$. Si en effet \dot{f} est un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ orthogonal à \mathcal{G} , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y, \omega \rangle} g_{\epsilon}(y-x) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y, \omega \rangle} g_{\epsilon}(x-y) dy = 0$$

pour tout x, ω dans \mathbb{R}^n et pour tout $\epsilon > 0$ (compte tenu de la définition de \mathcal{G}). En particulier, on a $\dot{f} * \dot{g}_{\epsilon} = 0$ pour tout $\epsilon > 0$, ce qui implique $\dot{f} = 0$, puisque l'on sait que la suite $(\dot{f} * \dot{g}_{\epsilon_k})_{k \geq 1}$ converge vers \dot{f} dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ lorsque $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ est une suite de nombres strictement positifs tendant vers 0⁵⁵. Comme le sous-espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ est un sous-espace dense de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ ⁵⁶, on a bien densité dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x \simeq \mathbb{R}^n_x, dx \simeq dx)$ du sous-espace \mathcal{G} .

Le lemme 1.2 établi dans la section 1.11.1 du chapitre 1, combiné avec la formule d'isométrie (2.42) (valable pour tout $\dot{g} \in \mathcal{G}$) établie dans la proposition 2.11, nous autorise à étendre (de manière unique) l'action de l'opération

$$\dot{f} \in \mathcal{G} \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx) \longmapsto \text{classe}(\widehat{f}) \in \mathcal{G} \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega)$$

en un opérateur linéaire continu

$$\mathcal{F} : \dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx) \longmapsto \mathcal{F}(\dot{f}) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega).$$

L'opération inverse

$$\text{classe}(\widehat{f}) \in \mathcal{G} \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega) \longmapsto \dot{f} \in \mathcal{G} \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$$

peut également être étendue en un opérateur linéaire continu

$$\mathcal{F}^{-1} : \tilde{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega) \longmapsto \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx).$$

D'une part la formule (2.42) demeure valide, d'autre part l'opérateur \mathcal{F} coïncide sur le sous-espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ avec l'opérateur consistant à associer à \dot{f} la classe de \widehat{f} , \dot{f} étant cette fois considéré comme élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$.

Tout cela peut être résumé en le théorème suivant :

Théorème 2.6 *Soit $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ et $\tilde{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega)$. Les limites*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{T \rightarrow +\infty \\ L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega)}} \left[\omega \longmapsto \int_{[-T, T]^n} f(x) e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx \right] &:= \mathcal{F}(\dot{f}) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega) \\ \lim_{\substack{\Omega \rightarrow +\infty \\ L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)}} \left[x \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\Omega, \Omega]^n} \tilde{f}(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega \right] &:= \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx) \end{aligned}$$

et définissent l'action de deux opérateurs inverses l'un de l'autre que l'on appelle respectivement transformation de Fourier et transformation de Fourier inverse. De plus, on a la formule, dite formule de Plancherel⁵⁷

$$\forall \dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx), \quad \|\dot{f}\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\mathcal{F}(\dot{f})\|_2^2, \quad (2.43)$$

55. Toujours la proposition 4.10 du cours de théorie de l'intégration MA5012.

56. Voir le cours de théorie de l'intégration : ceci résulte du fait que ce \mathbb{C} -sous-espace contient les classes des fonctions indicatrices des pavés $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

57. On fait référence ici aux travaux du mathématicien suisse Michaël Plancherel, 1885-1967.

formule que l'on peut dédoubler en

$$\forall \dot{f}_1, \dot{f}_2 \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx), \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\dot{f}_1)[\omega] \overline{\mathcal{F}(\dot{f}_2)[\omega]} d\omega. \quad (2.44)$$

Attention ! Contrairement à ce qui se passe pour \widehat{f} lorsque $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$, $\mathcal{F}(\dot{f})$ est un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega, d\omega)$ (défini comme une limite dans cet espace de classes de fonctions elles ponctuellement définies, à savoir les classes des spectres des $f\chi_{[-T, T]^n}$, $T \rightarrow +\infty$, qui, eux, sont des spectres d'éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$) et n'a donc pas de sens ponctuel. On ne saurait parler de $\mathcal{F}(\dot{f})[\omega_0]$ en un point spécifique ω_0 de l'espace \mathbb{R}^n_ω . Il faut prendre garde à ce point subtil mais essentiel. C'est la même chose en ce qui concerne $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})$ lorsque \tilde{f} est un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega, d\omega)$.

Preuve. L'énoncé est juste un résumé de ce qui précède dans cette section 2.5.2. Tout a été dit, si ce n'est le fait bien connu qu'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ (*resp.* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega, d\omega)$) s'approche dans cet espace par les classes des fonctions « tronquées »

$$f\chi_{[-T, T]^n}, \quad T > 0,$$

en faisant tendre T vers l'infini. \diamond

Exemple 2.12. On a vu (exemple 2.3 dans la section 2.4.1) que le spectre de la fonction caractéristique $\chi_{[-T, T]}$ était la fonction

$$\omega \mapsto 2 \frac{\sin \omega T}{\omega}.$$

Grâce au théorème 2.6, la transformée de de Fourier

$$\mathcal{F}\left(t \mapsto 2 \frac{\sin Tt}{t}\right)$$

a pour représentant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega)$ la fonction

$$\omega \mapsto 2\pi \times \chi_{[-T, T]}.$$

La transformée de Fourier de la fonction

$$\text{sinc} : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t/2}$$

a pour représentant

$$\omega \mapsto 2\chi_{[-\pi/2, \pi/2]}.$$

2.5.3 Fourier versus la dérivation ; le principe d'incertitude d'Heisenberg

Plus le spectre d'un élément \dot{f} de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ décroît rapidement lorsque $\|\omega\|$ tend vers l'infini, plus l'on peut affirmer que \dot{f} est régulier, c'est à dire admet un représentant de classe C^m , avec m lié à la vitesse de convergence du spectre. En effet, on a la

Proposition 2.12 Si $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ et si $\omega \mapsto \|\omega\|^m |\widehat{\dot{f}}(\omega)|$ définit un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega, d\omega) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega, d\omega)$ pour un certain entier $m \in \mathbb{N}$, \dot{f} admet un représentant f de classe C^m et pour tout opérateur différentiel $P(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$

d'ordre total inférieur ou égal à m , $P[D](f)$ définit un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ dont la transformée de Fourier a pour représentant

$$\omega \in \mathbb{R}^n \longmapsto P(i\omega)\widehat{f}(\omega) ;$$

de plus, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P[D](f)(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |P(i\omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega .$$

Preuve. On utilise tout d'abord la formule d'inversion de Fourier (théorème 2.4) qui nous assure que \widehat{f} admet pour représentant

$$f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega .$$

En appliquant à répétition le théorème de dérivation de Lebesgue des intégrales à paramètres⁵⁸, on voit que le fait que

$$\omega \longmapsto \|\omega\|^m |\widehat{f}(\omega)|$$

soit dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega)$ implique que f est de classe C^m et que l'on a, pour tout opérateur différentiel $P(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ d'ordre au plus m ,

$$P(D)[f](\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} P(i\omega) \widehat{f}(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega .$$

Le théorème 2.6 nous assure que $P(D)[f]$ définit bien un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ puisque

$$\omega \longmapsto \|\omega\|^m |\widehat{f}(\omega)|$$

est aussi dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega)$ et que le degré total de P est au plus m . De plus, ce même théorème nous assure que $\mathcal{F}(P[D](f))$ a pour représentant

$$\omega \in \mathbb{R}^n \longmapsto P(i\omega)\widehat{f}(\omega) .$$

Enfin, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P[D](f)(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |P(i\omega)|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

d'après la formule de Plancherel (2.43). La proposition est ainsi démontrée. \diamond

La proposition 2.12 peut aussi se lire en échangeant les deux mondes \mathbb{R}^n_x et \mathbb{R}^n_{ω} ; plus \widehat{f} a un représentant décroissant vers 0 rapidement, plus le spectre \widehat{f} est régulier. On a la proposition :

Proposition 2.13 *Si f est une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n_x telle que*

$$x \longmapsto \|x\|^m |f(x)|$$

définisse un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ pour un certain entier $m \in \mathbb{N}$, alors \widehat{f} est de classe C^m et pour tout opérateur différentiel $P(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ d'ordre total inférieur ou égal à m , $P[D](\widehat{f})$ définit un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_{\omega}, d\omega)$, avec

$$P[D](\widehat{f})(\omega) = \left[x \longmapsto P(-ix)f(x) \right]^{\wedge}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n_{\omega} ;$$

⁵⁸. Théorème 3.3 du cours de théorie de l'intégration MA5012.

de plus, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P[D](\widehat{f})(\omega)|^2 d\omega = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 |P(-ix)|^2 dx.$$

Preuve. Les hypothèses permettent d'appliquer à répétition (pas plus de m fois cependant) le théorème de dérivation de Lebesgue des intégrales dépendant d'un paramètre à

$$\omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx.$$

Cette fonction est donc de classe C^m et on a

$$P[D](\widehat{f})(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} P(-ix) f(x) e^{-i\langle x, \omega \rangle} dx \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Le théorème 2.6 nous permet d'affirmer que $P[D](\widehat{f})$ définit un élément de l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, d\omega)$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P[D](\widehat{f})(\omega)|^2 d\omega = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 |P(-ix)|^2 dx$$

d'après la formule de Plancherel (2.43). La proposition est démontrée. \diamond

Derrière les énoncés des propositions 2.12 et 2.13, on voit poindre la construction d'une hiérarchie d'espaces de Hilbert, tous sous-espaces de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$, introduits par le mathématicien russe Sergei Sobolev (1908-1989) vers 1935⁵⁹.

Si nous ne pouvons aller plus avant en direction des contributions de Sobolev, nous pouvons cependant formuler un principe essentiel en physique, soutenu par l'analyse de Fourier, principe mettant une nouvelle fois en lumière le rôle privilégié de la gaussienne dans cette analyse. Pour simplifier, nous nous limiterons à la dimension $n = 1$.

Théorème 2.7 (Principe d'incertitude d'Heisenberg⁶⁰) Soit f une fonction mesurable sur \mathbb{R} telle que la fonction $t \mapsto |t| |f(t)|$ définisse un élément de l'espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$, que la fonction $\omega \mapsto |\omega| |\widehat{f}(\omega)|$ définisse un élément de l'espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega)$, et que de plus $\|f\|_2 = 1$ ⁶¹. Alors

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |t|^2 |f(t)|^2 dt} \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\omega|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (2.45)$$

l'inégalité ne devenant une égalité que si f est une gaussienne centrée de la forme

$$f(t) = \pm \frac{\mu}{\pi^{1/4}} e^{-\mu^2 t^2 / 2}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^*$.

59. C'est à Sergei Sobolev en Union Soviétique et à Laurent Schwartz (1915-2002) en France que l'on doit les fondements de la théorie des fonctions généralisées (ou distributions), formidable outil de modélisation dans la théorie des équations aux dérivées partielles; le formalisme de la théorie des distributions, enseigné en master 1, est malheureusement nécessaire pour asseoir la définition mathématique des espaces de Sobolev. Les deux propositions 2.12 et 2.13 ne font ici que suggérer cette définition.

60. Il fut formulé par le physicien allemand Werner Heisenberg au printemps 1927, à l'aube des développements ultérieurs de la mécanique quantique.

61. Cette dernière condition est juste une condition de normalisation.

Preuve. D'après la proposition 2.12, \hat{f} admet un représentant dérivable (c'est lui que nous noterons maintenant f), tel que f' définisse un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\omega|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

De plus, si u et v sont deux réels strictement positifs, alors, une intégration par parties donne

$$\operatorname{Re} \left(\int_{-u}^v t f(t) \overline{f'(t)} dt \right) = \frac{1}{2} \left[t |f(t)|^2 \right]_{-u}^v - \frac{1}{2} \int_{-u}^v |f(t)|^2 dt. \quad (2.46)$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}} |t| |f(t)| dt < +\infty,$$

il existe deux suites strictement croissantes et tendant vers $+\infty$ de nombres réels strictement positifs $(u_k)_{k \geq 0}$ et $(v_k)_{k \geq 0}$ telles que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (-u_k) |f(-u_k)|^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k |f(v_k)|^2 = 0.$$

De plus, tf et f' définissent des éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$, ce qui implique la convergence (absolue) de l'intégrale impropre

$$\int_{\mathbb{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt.$$

Si l'on choisit $u = u_k$, $v = v_k$ dans (2.46) et que l'on fasse tendre k vers l'infini, on trouve donc

$$\operatorname{Re} \left(\int_{-u}^v t f(t) \overline{f'(t)} dt \right) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = -\frac{1}{2}.$$

Il vient donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la proposition 2.12 (pour exprimer $\|f'\|_2$),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} t f(t) \overline{f'(t)} dt \right| \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt} \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\omega|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

ce qui fournit l'inégalité voulue. Pour que cette inégalité ne soit pas stricte, il faut que l'on se trouve dans le cas d'égalité lors de notre utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ avec les deux éléments que sont les classes de $t \mapsto tf(t)$ et de $t \mapsto f'(t)$ (première étape de la chaîne d'inégalités (2.47)). L'égalité n'est possible que s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) + \lambda t f(t) = 0. \quad (2.48)$$

On constate en fait que λ doit aussi être un nombre réel (même strictement positif, *i.e.* $\lambda = \mu^2$, avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, du fait que f est supposée intégrable). L'équation différentielle (2.48) se résout alors immédiatement et l'on trouve bien (compte tenu de la normalisation $\|f\|_2 = 1$) :

$$f : t \mapsto \pm \frac{\mu}{\pi^{1/4}} e^{-\mu^2 t^2 / 2}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^*$. \diamond

Voici l'interprétation du théorème 2.7; les deux facteurs figurant au membre de gauche dans l'inégalité (2.45) peuvent s'interpréter comme les racines carrées des moments d'inertie (par rapport à l'origine) des répartitions d'énergie $|f(t)|^2 dt$ et $|\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$. Plus le premier facteur est petit, meilleure est la concentration de l'énergie de f au voisinage de l'origine dans l'espace \mathbb{R}_t des temps; plus le second facteur est petit, meilleure est la concentration de l'énergie du spectre de f au voisinage de l'origine dans l'espace \mathbb{R}_ω des fréquences. Ce que dit l'inégalité (2.45), c'est que l'on est dans l'incapacité de rendre ces deux facteurs petits, autrement dit, on ne peut bien localiser à la fois l'énergie de f et l'énergie de son spectre. Le moins pire « compromis » s'avère être le choix des gaussiennes, d'où leur rôle pour modéliser les particules en mécanique quantique. Ce principe crucial conditionne autant en mathématiques qu'en physique l'outil qu'est la transformation de Fourier. Il faut tenter de « faire avec ». Il est important de bien l'avoir compris.

2.5.4 Fonctions L^2 à spectre borné; le théorème de Shannon

Les deux dernières sections de ce chapitre (et du cours) doivent être vues comme des digressions (pouvant servir de thème d'exercice ou de problème de révision) autour des deux chapitres. La présente section est dévolue à la notion de « spectre borné » et surtout au résultat majeur qu'est le *théorème d'échantillonnage* de Shannon-Nyquist.

Définition 2.8 Un élément $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, dx)$ est dit à spectre borné s'il existe $\Omega > 0$ tel que

$$\mathcal{F}(f) = 0 \quad \text{presque partout hors de } [-\Omega, \Omega]^n.$$

Du fait du théorème 2.6, un tel élément f admet toujours un représentant continu, à savoir⁶²

$$f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\Omega, \Omega]^n} \mathcal{F}(f)(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega.$$

Nous allons montrer que dans cette section qu'en fait, si τ_1, \dots, τ_n sont des nombres strictement positifs tels que $\tau_j \in]0, \pi/\Omega]$, $j = 1, \dots, n$, alors cette fonction continue est entièrement déterminée par la donnée de tous les échantillons

$$f(k_1\tau_1, \dots, k_n\tau_n), \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^n.$$

L'hypothèse portant sur les τ_j ($\tau_j \leq \pi/\Omega$ pour $j = 1, \dots, n$) est essentielle : par exemple, si $\epsilon \in]0, \Omega[$, la fonction

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(\Omega - \epsilon)t}{t} \times \sin(\epsilon t),$$

qui définit bien un élément f de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ tel que $\mathcal{F}(f) = 0$ presque partout hors de $[-\Omega, \Omega]$, ne saurait être déterminée à partir de ses échantillons $f(\pi k/(\Omega - \epsilon))$, $k \in \mathbb{Z}$, car ces nombres sont tous nuls!

62. En fait, par exemple lorsque $n = 1$, ce représentant est même une fonction réelle analytique, c'est à dire une fonction s'exprimant sur \mathbb{R} comme la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$ (il suffit de développer l'exponentielle en série sous l'intégrale, puis d'invertir, ce qui licite ici d'après le théorème de Lebesgue, sommation et intégration); c'est donc en particulier une fonction C^∞ qui, à moins d'être identiquement nulle, ne saurait présenter que des zéros isolés.

Nous énonçons pour simplifier le résultat dans le cas $n = 1$ mais il est immédiatement transposable au cadre multidimensionnel. Il s'agit, on s'en doute, d'un résultat très important du point de vue pratique puisqu'il valide la possibilité d'échantillonner une fonction continue d'énergie finie et de spectre vivant dans $[-\Omega, \Omega]$ sans courir le risque d'une perte d'informations (pourvu que le pas d'échantillonnage soit plus petit que le seuil π/Ω que les ingénieurs qualifient de *seuil de Nyquist*); c'est le théorème de Shannon-Nyquist⁶³ :

Théorème 2.8 Soit $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ une fonction à spectre borné, inclus dans l'intervalle $[-\Omega, \Omega]$ avec $\Omega > 0$, et f un représentant continu de \dot{f} . Alors, pour tout $\tau \in]0, \pi/\Omega[$, la suite de fonctions $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$, où

$$f_N : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=-N}^N f(k\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{2(t - k\tau)}{\tau}\right), \quad N \in \mathbb{N},$$

converge uniformément vers f sur \mathbb{R} ⁶⁴.

Preuve. D'après le théorème 2.6, on sait que l'unique représentant continu de \dot{f} est la fonction

$$\begin{aligned} f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\dot{f})(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \mathcal{F}(\dot{f})(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} \mathcal{F}(\dot{f})(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}(\dot{f})(\omega/\tau) e^{i\omega t/\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}(\dot{f})(\theta/\tau) \overline{e^{-i\theta t/\tau}} d\theta \end{aligned}$$

On fixe $t \in \mathbb{R}$ et on utilise maintenant la formule (2.15) (formule de Parseval) introduite dans la section 2.3.1 avec les deux fonctions

$$\begin{aligned} f_1 : \theta \in [-\pi, +\pi[&\mapsto \mathcal{F}(\dot{f})(\theta/\tau) \\ f_2 : \theta \in [-\pi, \pi[&\mapsto e^{-i\theta t/\tau} \end{aligned}$$

(ces deux fonctions sont ensuite prolongées par 2π -périodicité en des fonctions définissant des classes \dot{f}_1 et \dot{f}_2 dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$). Les coefficients de Fourier complexes de \dot{f}_1 sont donnés par

$$\begin{aligned} c_k(\dot{f}_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}(\dot{f})(\theta/\tau) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} \mathcal{F}(\dot{f})(-\omega) e^{ik\tau\omega} d\omega \\ &= \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \mathcal{F}(\dot{f})(-\omega) e^{ik\tau\omega} d\omega = \tau f(-k\tau) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

63. Ingénieur électrique américain, Claude Elwood Shannon (1916-2001) fut un des pionniers de la théorie de l'information; on lui doit l'introduction de la notion d'entropie et la mise en évidence de son rôle majeur dans les problèmes de gain ou de compression d'information, les bases de la théorie du codage, etc.. Le résultat que nous citons ici, attribué à Shannon et à Harry Nyquist (1889-1976), physicien suédois collaborateur de Shannon aux Bell Labs, est un principe majeur en théorie de la communication et dans le traitement des signaux ou des images.

64. On rappelle la définition de la fonction *sinus cardinal* sur \mathbb{R} par $\operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u/2)}{\pi u/2}$.

Les coefficients de Fourier complexes de \dot{f}_2 sont donnés, eux, par

$$\begin{aligned} c_k(\dot{f}_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta t/\tau} e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(k+t/\tau)\pi} - e^{-i(k+t/\tau)\pi}}{i(k+t/\tau)} \\ &= \frac{\sin(k+t/\tau)\pi}{(k+t/\tau)\pi} = \operatorname{sinc}\left(\frac{2(t - (-k\tau))}{\tau}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule (2.15), on trouve

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f(-k\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{2(t - (-k\tau))}{\tau}\right) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f(k\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{2(t - k\tau)}{\tau}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(t) \end{aligned}$$

(la convergence étant ici une convergence ponctuelle). Le fait que la convergence soit uniforme résulte du fait que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2(t - k\tau)}{\tau}\right)$$

soit une fonction τ -périodique continue, donc bornée⁶⁵ par une constante $C > 0$, et que $(f(k\tau))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$. Pour $N_2 > N_1$, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|f_{N_2} - f_{N_1}\|_{\infty} \leq \sqrt{C} \left(\sum_{N_1 < |k| \leq N_2} |f(k\tau)|^2 \right)^{1/2}.$$

Le critère de Cauchy uniforme est donc rempli car on peut réaliser $\|f_{N_2} - f_{N_1}\|_{\infty} < \epsilon$ pour $N_2 \geq N_1 \geq N(\epsilon)$ avec $N(\epsilon)$ assez grand ; on en déduit la convergence uniforme de $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ vers f et donc la conclusion du théorème de Shannon. \diamond

2.6 L'outil Fourier couplé avec l'analyse hilbertienne ; deux exemples

Pour faire le pont entre les deux chapitres de ce cours, nous avons choisi deux exemples où analyse hilbertienne et analyse de Fourier se croisent et se complètent : le principe mathématique du CAT-Scanner et le problème de l'extrapolation des informations.

2.6.1 Un premier exemple ; l'inversion de transformations intégrales et le CAT-Scanner

Soit $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, dx)$, admettant un représentant nul presque partout hors de la boule euclidienne fermée de \mathbb{R}^n de rayon R (avec $R > 0$)⁶⁶. Pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})$ (où $\mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})$ désigne la sphère unité de \mathbb{R}^n), il résulte du théorème de Fubini que la fonction

$$p \in \mathbb{R} \mapsto \int_{y \in \xi^{\perp}} f(p\xi + y) d_{\xi^{\perp}} y$$

65. Il se trouve en fait que cette fonction est en fait constante et égale à 1, ce que l'on voit en travaillant un peu plus, mais nous n'en avons pas besoin ici.

66. La classe \dot{f} admet donc un représentant intégrable.

(où ξ^\perp désigne l'hyperplan orthogonal à $\mathbb{R}\xi$ pour le produit scalaire usuel, $d_{\xi^\perp}y$ désignant la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n restreinte à cet hyperplan) est bien définie presque partout (elle est nulle presque partout hors de $[-R, R]$) et induit (comme fonction de p) une classe $R_\theta[f]$ de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_p, dp)$. L'application qui à une telle classe $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n_x, dx)$ associe la collection d'éléments

$$\left(R_\theta[f] \right)_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})}$$

est appelée *transformation de Radon par les hyperplans*. Être capable de restaurer \hat{f} à partir de la connaissance de toutes les « coupes » $R_\xi[\hat{f}]$, $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})$, est un problème d'un intérêt pratique majeur, on le verra plus loin. Nous allons ici proposer deux solutions pour ce faire, l'une reposant sur l'utilisation de la transformation de Fourier, l'autre sur le maniement de l'analyse hilbertienne.

Pour mettre en œuvre la première solution, fixons $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})$ et calculons la transformée de Fourier (au sens L^2) de $R_\xi[\hat{f}]$. Un représentant de $\mathcal{F}(R_\xi[\hat{f}])$ est la fonction

$$\begin{aligned} \tau \in \mathbb{R} &\longmapsto \int_{-R}^R \left(\int_{\xi^\perp} f(p\vec{\theta} + y) d_{\xi^\perp}(y) \right) e^{-ip\tau} dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \tau\xi \rangle} dx = \hat{f}(\tau\xi). \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème 2.6, on a, en utilisant les coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} f &= \lim_{\substack{\Omega \rightarrow +\infty \\ L^2(\mathbb{R}^n_x, dx)}} \frac{1}{(2\pi)^n} \left[x \longmapsto \int_{\|\omega\| \leq \Omega} \hat{f}(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega \right] \\ &= \lim_{\substack{\Omega \rightarrow +\infty \\ L^2(\mathbb{R}^n_x, dx)}} \frac{1}{(2\pi)^n} \left[x \longmapsto \int_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})} \left(\int_0^\Omega \hat{f}(\tau\xi) e^{i\langle x, \tau\xi \rangle} \tau^{n-1} d\tau \right) d_{\mathbb{S}^{n-1}}(\xi) \right] \\ &= \lim_{\substack{\Omega \rightarrow +\infty \\ L^2(\mathbb{R}^n_x, dx)}} \frac{1}{(2\pi)^n} \left[x \longmapsto \int_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^\Omega (R_\xi[\hat{f}])^\wedge(\tau) e^{i\langle x, \tau\xi \rangle} \tau^{n-1} d\tau \right) d_{\mathbb{S}^{n-1}}(\xi) \right] \end{aligned} \tag{2.49}$$

où nous avons convenu de noter $\xi \longmapsto d_{\mathbb{S}^{n-1}}(\xi)$ la mesure de Lebesgue sur la sphère unité de \mathbb{R}^n . Le procédé d'inversion décrit dans (2.49) est un premier procédé, basé sur l'utilisation de la transformée de Fourier, pour recomposer la classe inconnue \hat{f} à partir de toutes les « coupes » $R_\xi[\hat{f}]$, $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})$.

La seconde solution passe, elle, par l'utilisation de l'algorithmique hilbertienne, plus précisément de la proposition 1.16 de la section 1.11.3 du chapitre 1. Soit H le \mathbb{R} -espace des classes de fonctions mesurables sur la boule euclidienne $B := B_n(0, R)$, telles

$$\int_B |f(x)|^2 dx < +\infty$$

et, pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})$, soit

$$R_\xi : \hat{f} \in H \longmapsto R_\xi[\hat{f}] \in L^2_{\mathbb{R}}\left([-R, R], \frac{dp}{(1-p^2)^{(n-1)/2}}\right)$$

qui à \dot{f} associe la classe de fonction

$$p \longmapsto \int_{\xi^\perp} f(p\xi + y) d_{\xi^\perp} y.$$

Il s'agit d'un opérateur continu entre les deux espaces de Hilbert réels que sont H et $L^2([-R, R], dp)$. Le noyau F_ξ de R_ξ est donc un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel fermé de H . La projection d'une classe \dot{g} de H sur l'orthogonal F_ξ^\perp de ce noyau est la classe de représentant (défini presque partout)

$$x \in B_n(0, R) \longmapsto \frac{R_\xi[\dot{g}]}{R_\xi[\chi_{B_n(0, R)}]} (\langle x, \xi \rangle).$$

En effet on vérifie immédiatement que, si g est un représentant de \dot{g} ,

$$x \in B_n(0, R) \longmapsto g(x) - \frac{R_\xi[\dot{g}]}{R_\xi[\chi_{B_n(0, R)}]} (\langle x, \xi \rangle)$$

est le représentant d'une classe appartenant au noyau F_ξ de R_ξ ; d'autre part, pour toute classe \dot{h} (de représentant h) dans ce noyau,

$$\begin{aligned} & \int_B \frac{R_\xi[\dot{g}]}{R_\xi[\chi_{B_n(0, R)}]} (\langle x, \xi \rangle) h(x) dx = \int_{\substack{|p|^2 + \|y\|^2 \leq R^2 \\ y \in \xi^\perp}} \frac{R_\xi[\dot{g}]}{R_\xi[\chi_{B_n(0, R)}]} (p) h(p\xi + y) dp d_{\xi^\perp} y \\ &= \int_{\substack{|p|^2 + \|y\|^2 \leq R^2 \\ y \in \xi^\perp}} h(p\xi + y) \left(\int_{\substack{|p|^2 + \|u\|^2 \leq R^2 \\ u \in \xi^\perp}} \frac{g(p\xi + u)}{R_\xi[\chi_{B_n(0, R)}](p)} d_{\xi^\perp} u \right) dp d_{\xi^\perp} y \\ &= \int_{\substack{|p|^2 + \|u\|^2 \leq R^2 \\ u \in \xi^\perp}} \frac{g(p\xi + u)}{R_\xi[\chi_{B_n(0, R)}](p)} \left(\int_{\substack{|p|^2 + \|y\|^2 \leq R^2 \\ y \in \xi^\perp}} h(p\xi + y) d_{\xi^\perp} y \right) dp d_{\xi^\perp} u \\ &= \int_{\substack{|p|^2 + \|u\|^2 \leq R^2 \\ u \in \xi^\perp}} \frac{g(p\xi + u)}{R_\xi[\chi_{B_n(0, R)}](p)} R_\xi[\dot{h}](p) dp d_{\xi^\perp} u = 0. \end{aligned}$$

Si l'on choisit une collection finie $\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$ de directions dans $\mathbb{S}^{n-1}(\mathbb{R})$ et si P_1, \dots, P_M désignent les projections orthogonales respectivement sur les sous-espaces affines fermés F_1, \dots, F_M , où $F_j := f + F_{\xi_j}$, $j = 1, \dots, M$, f désignant un élément *a priori* inconnu de H , alors, pour tout \dot{g} dans H , la suite

$$\left((P_M \circ P_{M-1} \circ \dots \circ P_1)^k(\dot{g}) \right)_{k \geq 1}$$

converge lorsque k tend vers $+\infty$ vers la projection de \dot{g} sur le sous-espace affine

$$f + \bigcap_{j=1}^M F_{\xi_j}.$$

En particulier, si l'on prend $\dot{g} = \dot{0}$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (P_M \circ P_{M-1} \circ \dots \circ P_1)^k(\dot{0}) \longrightarrow \text{Proj}_{f + (F_{\xi_1} \cap \dots \cap F_{\xi_M})}(\dot{0}),$$

ce qui fournit un moyen (itératif) d'approcher \dot{f} (modulo les éléments du sous-espace vectoriel $F_{\xi_1} \cap \dots \cap F_{\xi_M}$) lorsque l'on dispose de la connaissance de représentants pour les classes $R_{\xi_j}[\dot{f}]$, $j = 1, \dots, M$ (la connaissance de toutes ces classes fournit le moyen de calculer de proche en proche tous les $(P_M \circ P_{M-1} \circ \dots \circ P_1)^k(0)$, on pourra le vérifier en exercice dans le cas $n = 2$). Plus M est grand, plus le \mathbb{R} -sous-espace vectoriel $F_{\xi_1} \cap \dots \cap F_{\xi_M}$ est petit⁶⁷ et par conséquent, meilleure est l'approximation de \dot{f} ainsi réalisée.

Il a fallu attendre les années 1970⁶⁸ pour que les formules établies en 1911 par le mathématicien autrichien Johannes Radon pour inverser la transformée qui porte aujourd'hui son nom trouvent, avec les progrès de l'informatique et de l'algorithmique de la transformation de Fourier (et l'irruption de l'algorithme de *Fast Fourier Transform* proposé par J.W. Cooley et J.W. Tukey en 1965 et dont nous avons parlé dans la section 2.2.1), leur pleine réalisation au service de la tomographie médicale et de son instrument clef, le CAT-scanner⁶⁹.

2.6.2 Un second exemple : l'extrapolation des signaux de spectre borné

Pour cette seconde illustration (qui peut encore être vue comme un thème de problème dirigé), on se place dans le cadre $n = 1$. Le \mathbb{C} -espace de Hilbert $H = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ contient deux types de sous-espaces fermés intéressants :

- d'une part, si $T > 0$, le \mathbb{C} -sous espace H^T constitué des classes \dot{f} ayant un représentant presque partout nul hors de $[-T, T]$;
- d'autre part, si $\Omega > 0$, le \mathbb{C} -sous espace vectoriel H_{Ω} constitué des classes \dot{f} telles que $\mathcal{F}[\dot{f}]$ admette un représentant nul presque partout hors de $[-\Omega, \Omega]$.

Si $\dot{f} \in H$, la projection orthogonale de \dot{f} sur H^T a pour représentant la fonction $f\chi_{[-T, T]}$, où f est un représentant de \dot{f} .

Si $\dot{f} \in H$, la projection orthogonale de \dot{f} sur H_{Ω} est

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\chi_{[-\Omega, \Omega]}],$$

où \widehat{f} est un représentant de $\mathcal{F}[\dot{f}]$. Il résulte du théorème 2.6 et de l'étude de l'exemple 2.12 qui l'accompagne qu'un représentant de cette projection est la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\sin(\Omega(t-u))}{t-u} du,$$

où f est un représentant de \dot{f} .

Comme un élément \dot{f} de H_{Ω} admet pour représentant la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

67. Notons que les éléments de ce sous-espace sont les classes \dot{h} telles que $R_{\xi_j}[\dot{h}] = \dot{0}$, $j = 1, \dots, M$.

68. Avec l'attribution en 1979 du prix Nobel de médecine au physicien (et mathématicien) américain Allan M. Cormack et à l'informaticien et ingénieur électronique anglais Godfrey N. Hounsfield pour leurs travaux en CAT-scanner tomographie.

69. CAT pour Computed Axial Tomography.

qui est une fonction réelle analytique et ne donc peut avoir (à moins d'être identiquement nulle) que des zéros isolés, on a $H_\Omega \cap (H^T)^\perp = \{0\}$ puisque tout représentant d'un élément de $(H^T)^\perp$ doit être presque partout nul hors de $[-T, T]$.

Nous sommes donc en situation de mettre en œuvre l'application de la proposition 1.16 de la section 1.11.3 du chapitre 1 : si $\dot{f}_0 := \text{Proj}_{H^T}(\dot{f})$, alors, par le jeu du mécanisme itératif

$$\dot{f}_{k+1} = \dot{f}_0 + (1 - \chi_{[-T, T]})\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{[-\Omega, \Omega]}\mathcal{F}[\dot{f}_k]\right], \quad k = 0, \dots,$$

on approche \dot{f} dans H , ce qui donne ainsi un procédé (théorique!) pour « extrapoler » le représentant continu de \dot{f} (supposé ici seulement connu sur $[-T, T]$ puisque l'on ne dispose que de sa projection orthogonale sur H^T) à \mathbb{R} tout entier. Ce procédé algorithmique, introduit dans les années 1970, nommé du fait de ses inventeurs procédé de Gerchberg-Papoulis⁷⁰, même si bien sûr il est très difficile à réaliser de manière stable numériquement (les signaux à spectre borné relevant de l'utopie car tout signal est inévitablement bruité et le bruit ne saurait être à spectre borné), s'avère une bonne illustration du profit que l'on a à coupler les outils Fourier du chapitre 2 avec les notions d'analyse hilbertienne présentées au chapitre 1.

La présentation de ce dernier exemple, fédérant les deux chapitres de ce cours, le conclut tout naturellement. Elle souligne aussi combien les outils de l'algorithmique pythagoricienne et ceux de l'analyse de Fourier sont intimement complémentaires, le meilleur cadre pour travailler étant sans aucun doute celui des espaces de Hilbert, c'est-à-dire le cadre l^2 ou L^2 .

FIN

70. A. Papoulis (1921-2002) est un théoricien du signal américain d'origine grecque contemporain ; ses ouvrages d'enseignement en analyse de Fourier, traitement du signal et processus stochastiques sont largement utilisés tant par la communauté mathématique que celle des ingénieurs ; ils ont inspiré la présentation du chapitre 2 de ce cours.

Quelques exercices (chapitre 2)

EXERCICE 1 (transformée de Fourier sur $l^1(\mathbb{Z})$ et $l^2(\mathbb{Z})$).

- (1) Soit $(h(0), \dots, h(M))$ une suite de nombres réels (que l'on prolonge par 0 pour en faire une suite indexée par \mathbb{Z}) et

$$m_0 : \omega \mapsto \sum_{k=0}^M h(k) e^{-ik\omega}$$

le polynôme trigonométrique correspondant (m_0 est donc la transformée de Fourier du filtre digital de réponse impulsionnelle la suite indexée par \mathbb{Z}

$$(\dots, 0, \dots, 0, h(0), \dots, h(M), 0, \dots).$$

L'opération R qui à un signal d'entrée $(e(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ associe le signal $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ défini par

$$s(k) = \sum_l h(l - 2k)e(l), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(vous vérifierez pourquoi la suite $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est bien dans $l^2(\mathbb{Z})$) est-elle un filtre stationnaire (c'est-à-dire un opérateur linéaire continu de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même invariant par translation)? Décrivez explicitement l'opération R^* adjointe de l'opération R .

- (2) Exprimez, $e = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ étant un élément de $l^2(\mathbb{Z})$, en fonction de m_0 et de \widehat{e} (transformée de Fourier de la suite $e = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$) la transformée de Fourier de la suite $R^*[e]$.
- (3) Calculez en utilisant la formule d'adjonction la transformée de Fourier de la suite $R[e]$ lorsque $e \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

EXERCICE 2 (transformée de Fourier dans $l^1(\mathbb{Z})$ et noyau de Dirichlet¹).

- (1) Vérifiez qu'il existe une constante positive K_1 telle que

$$\forall \omega \in [0, \pi], \forall k \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^\omega \frac{\sin(ku)}{u} du \right| \leq K_1$$

(pensez au changement de variables $v = ku$ et à la semi-convergence de l'intégrale impropre de la fonction $v \mapsto \sin v/v$ sur $[0, \infty[$ ²) puis qu'il

1. Cet exercice consiste en une version détaillée de la Remarque 2.1 du polycopié.
2. À propos, que vaut son intégrale sur $[0, \infty[$?

existe une constante positive K_2 telle que

$$\forall \omega \in [0, \pi], \forall k \in \mathbb{N}^*, \\ \left| \int_0^\omega \left(\frac{\sin[(k+1/2)u]}{2 \sin(u/2)} - \frac{\sin(ku)}{u} \right) du \right| \leq K_2$$

(utilisez pour cela un peu de trigonométrie ainsi que les développements limités des fonctions sin et cos au voisinage de $u = 0$). Déduisez en (en utilisant l'expression "close" du noyau de Dirichlet donnée en cours suite aux égalités de la chaîne (2.21)³), l'existence d'une constante positive K telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} \left| \sum_{l=1}^k \frac{\sin(l\omega)}{l} \right| \leq K.$$

- (2) Montrez que, si $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ est une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, alors, pour tout $\eta > 0$, il existe un seuil $N(\eta) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall p > n \geq N(\eta), \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} \right| \leq \eta$$

(écrivez pour ce faire

$$\sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} = \sum_{k=n+1}^p \epsilon_k (S_{k+1}(\omega) - S_k(\omega)),$$

où, pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$S_k(\omega) := \sum_{l=1}^k \frac{\sin(l\omega)}{l}$$

et utilisez la règle d'Abel d'"intégration par parties discrète" vue en Analyse 3 (L2), puis le dernier résultat établi dans la question précédente). Déduisez en que la suite de fonctions 2π -périodiques

$$\left(\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} \right)_{n \geq 1}$$

converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction 2π -périodique f .

- (3) Vérifiez que la série de terme général

$$\rho_k := \frac{1}{k \log(k+1)}, \quad k \geq 1$$

est une série à termes positifs divergente. Calculez les coefficients de Fourier complexes de la classe de fonction continue 2π -périodique \tilde{f} construite à la question 2 à partir de la suite $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$, où précisément

$$\epsilon_k := \frac{1}{\log(k+1)}, \quad k \geq 1.$$

Vérifiez que la fonction f ne saurait être la transformée de Fourier d'une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ (bien qu'étant une fonction continue 2π -périodique sur \mathbb{R}).

3. Vous pouvez d'ailleurs en profiter ici pour refaire soigneusement ces calculs!

EXERCICE 3 (Transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et noyau de Fejér). Soit P un polynôme trigonométrique

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^N c_k e^{ik\theta},$$

où $N \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Calculez (en exprimant dans un premier temps sa série de Fourier) la convolée $K_N \overset{\text{per}}{*} Q$, où Q est la fonction 2π -périodique

$$Q : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{-iN\theta} P(\theta)$$

et K_N le noyau de Fejér.

- (2) Déduisez du calcul précédent l'inégalité de Bernstein :

$$\sup_{\mathbb{R}} |P'| \leq N \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

EXERCICE 4 (transformée de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et théorème de Fejér⁴).

- (1) Soit \hat{f} un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et $(c_k(\hat{f}))_{k \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier complexes. On considère la fonction F définie sur $[0, 2\pi[$ par

$$F(\theta) := \int_0^\theta f(u) du$$

et prolongée ensuite à \mathbb{R} en une fonction 2π -périodique. Pourquoi F définit-elle un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$? Calculez le spectre de \hat{F} en fonction de celui de \hat{f} . À quelle condition la fonction F est-elle une fonction continue 2π -périodique?

- (2) En utilisant l'identité remarquable

$$X^{2N} - 1 = (X^2 - 1) \times \sum_{k=0}^{N-1} X^{2k},$$

vérifiez que, pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$,

$$\left(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2 = e^{-(N-1)\theta} \times \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta} \right)^2$$

et déduisez-en, pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, la formule

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2 = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N} \right) e^{ik\theta}.$$

Que valent les coefficients de Fourier complexes de \hat{K}_N , où \hat{K}_N est la classe de la fonction 2π -périodique (de θ) ainsi définie? Pourquoi la suite $(\hat{K}_N)_{N \geq 1}$ réalise-t-elle une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$?

- (3) Reprenez l'élément \hat{f} de la question 1 ainsi que la fonction F correspondante et sa classe. On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N = \sum_{k=-N}^N c_k(\hat{F}).$$

4. Voir la Remarque 2.6 du polycopié.

Vérifiez que

$$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(u) F(u) du$$

(vous calculerez pour cela en vous servant de la Proposition 2.5 du cours la suite des coefficients de Fourier de $\dot{K}_N \overset{\text{per}}{*} \dot{F}$) et déduisez en (en exploitant le fait que $(\dot{K}_N)_{N \geq 1}$ soit une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, établi à la question 2) que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{u_0 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \frac{F(0^+) + F(0^-)}{2} = \pi c_0(\dot{f}).$$

Est-il possible que la suite $(\operatorname{Re}(u_k))_{k \geq 0}$ tende vers $+\infty$? vers $-\infty$?

- (4) On suppose que \dot{f} est un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier $c_k(\dot{f})$ valent 0 si $k = -1, 0, 1$, $1/i \log k$ si $k \geq 2$ et $-1/i \log |k|$ si $k \leq -2$. Calculez les coefficients de Fourier $c_k(\dot{F})$ de la classe \dot{F} associée à \dot{f} par la question 1. Vérifiez que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la question 3 est alors une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$. Déduisez de la question 3 qu'une telle classe \dot{f} ne saurait exister.

EXERCICE 5 (Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$). Soient \dot{f} et \dot{g} deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et f un représentant de \dot{f} . Pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto f(n\theta)$$

est-elle bien le représentant d'un élément \dot{f}_n de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$? Que vaut la norme de \dot{f}_n en fonction de la norme de \dot{f} ? En utilisant la formule de Parseval, vérifiez la propriété ergodique suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \dot{f}_n, \dot{g} \rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, 2\pi[} f(\theta) d\theta \times \int_{[0, 2\pi[} \overline{g(\theta)} d\theta.$$

EXERCICE 6 (Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$). En utilisant la transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, montrez que l'opération de convolution entre éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ ne saurait admettre d'élément neutre.

EXERCICE 7 (Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$). Considérez la fonction (intégrable sur \mathbb{R}) $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Delta(t) = \max(0, 1 - |t|).$$

Vérifiez que la transformée de Fourier de $\dot{\Delta}$ est la fonction

$$\widehat{\Delta} : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2.$$

(avec la convention $\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = 1$ si $\omega = 0$).

EXERCICE 8 (Équation de la chaleur, transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$).

- (1) Soit $t > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe une fonction

$$x \mapsto E(t, \omega_0, x),$$

intégrable sur \mathbb{R} dont la transformée de Fourier est la fonction

$$\omega \mapsto e^{-t(\omega - \omega_0)^2}$$

(on pourra dans un premier temps supposer $\omega_0 = 0$). Si $\omega_0 = 0$, vérifiez que la fonction

$$(t, x) \mapsto E(t, 0, x)$$

est de classe C^∞ dans $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ et vérifie l'équation aux dérivées partielles dite *de la chaleur* :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] (E(t, 0, x)) \equiv 0. \quad (*)$$

- (2) Soit φ une fonction intégrable sur \mathbb{R} , nulle presque partout hors d'un segment $[-R, R]$. Montrez que l'on peut, pour tout $t > 0$, définir la convolée de φ et de

$$x \mapsto E(t, 0, x)$$

et que la fonction

$$(x, t) \mapsto \int_{\mathbb{R}} E(t, 0, x - u) \varphi(u) du = \varphi_t(x)$$

est une fonction de classe C^∞ dans $]0, \infty[\times \mathbb{R}$, solution de l'équation de la chaleur (*) et telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\dot{\varphi}_t - \dot{\varphi}\|_1 = 0.$$

EXERCICE 9 (transformée de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, transformée de Radon).

- (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^3 , identiquement nulle hors d'un pavé $[-R, R]^2$ du plan. Vérifiez que f définit un élément \hat{f} de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ et que la transformée de Fourier de \hat{f} est intégrable sur \mathbb{R}^2 (on pensera à de judicieuses intégrations par parties). Déduisez en, pour tout (x, y) de \mathbb{R}^2 , la formule

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{]0, \infty[} \int_{]0, 2\pi[} \hat{f}(re^{i\theta}) e^{ir(\cos \theta x + \sin \theta y)} r dr d\theta.$$

- (2) On reprend f comme à la question précédente. Pour tout $p \in \mathbb{R}$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, on pose

$$R[f](p, \theta) := \int_{\mathbb{R}} f(p \cos \theta - t \sin \theta, p \sin \theta + t \cos \theta) dt ;$$

cette intégrale correspond à l'intégrale de la fonction f sur la droite d'équation cartésienne

$$\langle (x, y), (\cos \theta, \sin \theta) \rangle = p.$$

Calculez, θ étant fixé dans $[0, 2\pi[$, la transformée de Fourier de la classe dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ de la fonction

$$p \in \mathbb{R} \mapsto R[f](p, \theta)$$

(après avoir montré que cette fonction était bien intégrable sur \mathbb{R} relativement à la mesure de Lebesgue) et déduisez de la question précédente un moyen de calculer f à partir de la connaissance de la fonction

$$R[f] : \mathbb{R} \times [0, 2\pi[\mapsto \mathbb{C}.$$

EXERCICE 10 (la transformée de Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$).

- (1) Calculez la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de l'intervalle $[-T, T]$ de \mathbb{R} , c'est-à-dire de la fonction

$$t \mapsto \chi_{[-T, T]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

lorsque T est un nombre strictement positif.

- (2) Soit $\Omega > 0$; la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f_\Omega(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\Omega t)}{t}$$

et $f_\Omega(0) = 0$ est elle un représentant d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$?

Montrez que la fonction f_Ω est un représentant d'un élément d'une classe $\dot{f}_\Omega \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et que la transformée de Fourier de \dot{f}_Ω a pour représentant la fonction caractéristique de $[-\Omega, \Omega]$, c'est-à-dire la fonction

$$\omega \mapsto \chi_{[-\Omega, \Omega]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [-\Omega, \Omega] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(pensez à utiliser le Théorème 2.6 du cours et en particulier la formule d'inversion pour la transformée de Fourier L^2 , ainsi que le résultat établi à la question 1.).

EXERCICE 11 (la transformée de Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$). Calculez l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$$

en pensant à utiliser la formule de Plancherel dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

EXERCICE 12 (la transformée de Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$).

- (1) Soit $\dot{\psi}$ un élément de $L^2(\mathbb{R}, dt)$ (de représentant la fonction $t \mapsto \psi(t)$). Soient $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Calculez en fonction de $a, b, \widehat{\psi}$ la transformée de Fourier de la classe $\dot{\psi}_{a,b}$ dont un représentant est

$$t \mapsto \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(on montrera d'abord que cette fonction définit bien un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$).

- (2) On considère $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et on note, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$F(a, b) := \langle \dot{f}, \dot{\psi}_{a,b} \rangle.$$

Montrez que, si $a > 0$ est fixé, on a

$$\lim_{b \rightarrow \pm\infty} F(a, b) = 0$$

(pensez à utiliser la formule de Plancherel dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$).

- (3) On suppose de plus que ψ vérifie de plus

$$\int_{]0, \infty[} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_{]0, \infty[} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = C \in]0, +\infty[$$

et que $|\widehat{\psi}|$ est bornée sur \mathbb{R} . Vérifiez que, si \dot{f}_1 et \dot{f}_2 sont deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, les fonctions

$$F_j : (a, b) \in]0, \infty[\times \mathbb{R} \mapsto \langle \dot{f}_j, \dot{\psi}_{a,b} \rangle, \quad j = 1, 2,$$

sont dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2([0, \infty[\times \mathbb{R}, da db/a)$ et que l'on a, si

$$H := L_{\mathbb{C}}^2\left([0, \infty[\times \mathbb{R}, \frac{dadb}{a}\right),$$

la formule

$$\langle \dot{F}_1, \dot{F}_2 \rangle_H = 2\pi C \langle \dot{f}_1, \dot{f}_2 \rangle$$

(pensez à utiliser deux fois la formule de Plancherel dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$).

EXERCICE 13 (la transformée de Fourier sur $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^n)$, la transformation de Hilbert). On rappelle dans cet exercice la formule de Dirichlet :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du := \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

- (1) Soit $\epsilon \in]0, 1[$. Montrez que la transformée de Fourier de l'élément \dot{h}_{ϵ} de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, dt)$ dont un représentant est défini par

$$h_{\epsilon}(t) := \frac{i}{\pi t} \chi_{\{|t| \in [\epsilon, 1/\epsilon]\}}(t)$$

vérifie, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \widehat{h}_{\epsilon}(\omega) = \text{signe}(\omega)$$

(utilisez la formule de Dirichlet rappelée dans l'en-tête de l'exercice).

- (2) Vérifiez qu'il existe un opérateur linéaire continu H de $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$ dans lui-même tel que

$$\mathcal{F}(H(\dot{f})) = \text{signe}(\cdot) \times \mathcal{F}(\dot{f})$$

(\mathcal{F} désigne la transformation de Fourier sur $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$) et que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|\dot{h}_{\epsilon} * \dot{f} - H(\dot{f})\|_2 = 0$$

pour tout $\dot{f} \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$ (vous justifierez aussi pourquoi la convolution $\dot{h}_{\epsilon} * \dot{f}$ est licite et définit un élément de $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$ lorsque $\dot{f} \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$).

Corrigés

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1.

- (1) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le théorème de Fubini-Tonelli et l'invariance de la mesure de décompte par translation, on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l| |h(l-2k)| \right)^2 \\
 & \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_l |h(l-2k)| \times \sum_l |h(l-2k)| |e_l|^2 \right) \\
 & \leq \|h\|_1 \times \sum_k \left(\sum_l |h(l-2k)| |e_l|^2 \right) \\
 & \leq \|h\|_1 \times \sum_l \left(\sum_k |h(l-2k)| |e_l|^2 \right) \\
 & \leq \|h\|_1^2 \times \|e\|_2^2.
 \end{aligned}$$

L'opérateur R est donc bien linéaire continu de $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même, de norme au plus

$$\|h\|_1 = \sum_{k=0}^N |h(k)|.$$

La réponse à suite $(\delta_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est la suite $(h(-2k))_k$; la réponse à la suite $(\delta_{1,k})_k$ est la suite $(h(1-2k))_k$, qui est différente de la suite $(h(-2k))_k$ décalée d'une unité vers la droite, en l'occurrence la suite

$$(h(-2(k-1)))_k = (h(2-2k))_k.$$

L'opérateur linéaire continu R n'est donc pas un filtre stationnaire (au sens de la définition introduite dans la Proposition 2.4). Son adjoint se calcule immédiatement en utilisant la formule d'adjonction

$$\langle R[(e_k)_k], (f_k)_k \rangle = \langle (e_k)_k, R^*[(f_k)_k] \rangle$$

On trouve, en utilisant le théorème de Fubini,

$$R^*[(f_k)_k] = \left(\sum_l f_l h(k-2l) \right)_k.$$

- (2) La transformée de Fourier de $R^*[e]$ est la limite dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})$ de la suite des classes de fonctions

$$\omega \mapsto \sum_{k=-N}^N (R^*[e])_k e^{-ik\omega}.$$

Or, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de Fubini, la propriété d'homomorphisme de l'exponentielle et l'invariance de la mesure de décompte par translation, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-N}^N (R^*[e])_k e^{-ik\omega} = \\
&= \sum_{k=-N}^N \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h(k-2l) \right) e^{-ik\omega} \\
&= \sum_{k=-N}^N \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h(k-2l) e^{-i(k-2l)\omega} \times e^{-2il\omega} \right) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l e^{-2il\omega} \left(\sum_{k=-N}^N h(k-2l) e^{-i(k-2l)\omega} \right).
\end{aligned}$$

Lorsque N tend vers l'infini, on a convergence ponctuelle de la suite de fonctions

$$\left(\omega \mapsto \sum_{k=-N}^N h(k-2l) e^{-i(k-2l)\omega} \right)_N$$

vers la fonction

$$\omega \mapsto \sum_{k=0}^M h(k) e^{-ik\omega} = m_0(\omega).$$

La convergence est même une convergence dominée sur $[0, 2\pi[$ (par la fonction constante $\|h\|_1$). La limite dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ de la suite des classes de fonctions

$$\left(\omega \mapsto \sum_{k=-N}^N (R^*[e])_k e^{-ik\omega} \right)_N$$

est donc

$$\dot{m}_0 \times \lim_{L^2(\mathbb{T})} \left(\sum_{k=-N}^N e_l e^{-2il(\cdot)} \right).$$

Comme la transformée de Fourier de e est la limite dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ de la suite des classes de fonctions

$$\left(\omega \mapsto \sum_{k=-N}^N e_l e^{-il\omega} \right)_N,$$

on a au final la relation

$$\widehat{R^*[e]} = \dot{m}_0 \times \widehat{e}(2(\cdot)).$$

- (3) On a, d'après la formule d'adjonction et la formule de Parseval (voir la Remarque 2.2 du cours), pour tout e, f dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} \langle R[e], f \rangle &= \langle e, R^*[f] \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} \widehat{e}(\omega) \overline{m_0(\omega)} \widehat{f}(2\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 4\pi[} \widehat{e}(\omega/2) \overline{m_0(\omega/2)} \widehat{f}(\omega) \frac{d\omega}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} \widetilde{e}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega)} \frac{d\omega}{2} \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{e}(\omega) = \widehat{e}(\omega/2) \overline{m_0(\omega/2)} + \widehat{e}(\omega/2 + \pi) \overline{m_0(\omega/2 + \pi)}.$$

On a donc

$$\widehat{R[e]}(2\omega) = \frac{\widehat{e}(\omega) \overline{m_0(\omega)} + \widehat{e}(\omega + \pi) \overline{m_0(\omega + \pi)}}{2}$$

d'après la formule de Plancherel.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2.

- (1) Si l'on effectue le changement de variables proposé, on trouve que, pour $\omega \in [0, \pi]$, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\omega \frac{\sin ku}{u} du = \int_0^{k\omega} \frac{\sin v}{v} dv;$$

or l'on sait (vous avez sûrement vu ce résultat en L2) que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \frac{\sin v}{v} dv \right) = \frac{\pi}{2},$$

ce qui prouve que la fonction continue

$$x \in [0, \infty[\mapsto \int_0^x \frac{\sin v}{v} dv$$

est bornée en valeur absolue par une constante positive K_1 sur $[0, \infty[$, ce qui prouve donc la première inégalité demandée. Pour la seconde inégalité, on remarque (en utilisant les formules de trigonométrie donnant l'expression de $\sin(a+b)$) que, sur $]0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin[(k+1/2)u]}{2 \sin(u/2)} &= \frac{\sin(ku) \cos(u/2)}{2 \sin(u/2)} + \frac{\cos(ku)}{2} \\ &= \frac{\sin(ku)}{u} + \frac{\sin(ku)}{u} \left(\frac{u \cos(u/2)}{2 \sin(u/2)} - 1 \right) + \frac{\cos(ku)}{2} \\ &= \frac{\sin(ku)}{u} + \sin(ku) \varphi(u) + \frac{\cos(ku)}{2} \end{aligned}$$

avec, pour $u \in]0, \pi]$.

$$\varphi(u) := \frac{u \cos(u/2) - 2 \sin(u/2)}{2u \sin(u/2)};$$

or un développement limité du numérateur montre qu'au voisinage de $u = 0$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \frac{u - \frac{u^3}{8} + o(u^3) - 2\left(\frac{u}{2} - \frac{u^3}{48} + o(u^3)\right)}{2u \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \\ &= \frac{-\frac{u^3}{8} + o(u^3)}{2u \sin\left(\frac{u}{2}\right)} = -\frac{u}{8} + o(u),\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction φ se prolonge en une fonction continue, donc bornée en valeur absolue par une constante M sur $[0, \omega]$. On a donc, sur $[0, \omega]$, l'inégalité

$$\left| \frac{\sin[(k+1/2)u]}{2 \sin(u/2)} - \frac{\sin(ku)}{u} \right| \leq M + 1/2.$$

En intégrant sur $[0, \pi]$, on trouve donc la seconde inégalité demandée avec $K_2 := \pi(M + 1/2)$. D'après l'expression du noyau de Dirichlet (chaîne d'égalités (2.21) du cours), on a

$$\frac{1}{2} \sum_{l=-k}^k e^{il\omega} = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^k \cos(l\omega) = \frac{\sin[(k+1/2)\omega]}{2 \sin(\omega/2)}.$$

En intégrant entre 0 et ω , il vient

$$\int_0^\omega \frac{\sin[(k+1/2)u]}{2 \sin(u/2)} du = \frac{\omega}{2} + \sum_{l=1}^k \frac{\sin(l\omega)}{l}.$$

Utilisant les deux inégalités établies précédemment, on en déduit que pour tout ω dans $[0, \pi]$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \sum_{l=1}^k \frac{\sin(l\omega)}{l} \right| \leq K_1 + K_2 + \frac{\pi}{2} = K;$$

cette inégalité reste vraie par parité pour $\omega \in [-\pi, 0]$ et la dernière inégalité demandée est ainsi prouvée.

- (2) Grâce à la méthode d'Abel (qui n'est rien d'autre en fait que le mécanisme de l'intégration par parties, mais développé dans le cadre discret et non plus continu), on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} &= \sum_{k=n+1}^p \epsilon_k (S_k(\omega) - S_{k-1}(\omega)) \\ &= -S_n(\omega)\epsilon_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (\epsilon_k - \epsilon_{k+1})S_k(\omega) \\ &\quad + \epsilon_p S_p(\omega),\end{aligned}$$

et par conséquent, pour tout $\omega \in [-\pi, \pi]$, en utilisant la dernière inégalité établie à la question 1 et la décroissance de la suite $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$, l'estimation

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} \right| \\ & \leq K \left(\epsilon_{n+1} + \sum_{k=n+1}^p (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) + \epsilon_p \right) \\ & \leq 2K \epsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Pour $\eta > 0$ donné, il existe $N(\eta)$ tel que $n > N(\eta)$ implique $\epsilon_n < \eta/2K$; on a donc bien

$$\forall p > n \geq N(\eta), \quad \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} \right| \leq \eta.$$

La suite de fonctions 2π -périodiques

$$\left(\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} \right)_{n \geq 1}$$

vérifie donc le critère de Cauchy uniforme sur \mathbb{R} et converge donc uniformément (voir le cours d'Analyse 3) vers une fonction f (nécessairement 2π -périodique par passage à la limite uniforme comme toutes les fonctions en jeu ici).

(3) La fonction

$$t \in [2, \infty[\mapsto \frac{1}{t \log t}$$

a pour primitive sur $[2, +\infty[$ la fonction

$$F : t \mapsto \log(\log t)$$

qui admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$; le critère de confrontation séries/intégrales (voir le cours d'Analyse 3) implique donc la divergence de la série de Bertrand $[1/(k \log k)]_{k \geq 2}$; la règle des équivalents permet de conclure à la divergence de la série $[\rho_k]_{k \geq 1}$.

Le coefficient de Fourier complexe $c_k(f)$ vaut par définition

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) e^{-ik\omega} d\omega.$$

Puisque f est limite uniforme sur \mathbb{R} (donc sur $[0, 2\pi]$) de la suite de fonctions

$$\left(\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^n \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} \right)_{n \geq 1},$$

on a (intervertion de limite et de prise d'intégrale lorsque la limite est uniforme, voir le cours d'Analyse 3),

$$c_k(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^N \epsilon_l \frac{\sin(l\omega)}{l} \right) e^{-ik\omega} d\omega.$$

On constate alors, en utilisant le fait que (\dot{e}_k) est une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, que

$$c_k(\dot{f}) = \frac{\epsilon_k}{2ik} = \frac{\rho_k}{2i}$$

si $k \geq 1$, $c_0(\dot{f})$, $c_{-k}(\dot{f}) = -c_k(\dot{f})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Si la fonction f était la transformée de Fourier d'une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, on aurait $s_{-k} = c_k(\dot{f})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; ceci est impossible car alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |s_k| = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\dot{f})| = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = +\infty,$$

ce qui contredit le fait que $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1) La fonction 2π -périodique Q s'écrit :

$$Q(\theta) = \sum_{k=0}^N c_k e^{i(k-N)\theta} = \sum_{k=-N}^0 c_{k+N} e^{ik\theta}.$$

La convolée de cette fonction avec K_N s'écrit donc

$$\begin{aligned} Q \overset{\text{per}}{*} K_N(\theta) &= \sum_{k=-N}^N c_k(\dot{Q}) c_k(\dot{K}_N) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-N}^0 c_{k+N}(\dot{P}) (1 + k/N) e^{ik\theta} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N k c_k(\dot{P}) e^{i(k-N)\theta} \\ &= \frac{1}{N} e^{-iN\theta} P'(\theta). \end{aligned}$$

(2) Comme le noyau de Fejér K_N a pour intégrale 2π sur $[0, 2\pi]$, on déduit de la question 1 que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{|P'(\theta)|}{N} = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} K_N(u) Q(\theta - u) du \right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |Q| = \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

Cela donne l'inégalité demandée.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

(1) Si \dot{f} est dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, f est intégrable sur $[0, 2\pi[$ et la fonction F définie sur $[0, 2\pi[$ par

$$F(\theta) := \int_{[0, \theta]} f(u) du$$

est continue sur $[0, 2\pi[$ (il suffit d'invoquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour affirmer que si $(\theta_n)_n$ est une suite convergeant vers $\theta_{\infty} \in [0, 2\pi[$, alors la suite $(F(\theta_n))_n$ converge vers $F(\theta_{\infty})$); de plus, cette fonction est bornée sur $[0, 2\pi[$ par $2\pi \|\dot{f}\|_{\mathbb{T}, 1}$ et se prolonge donc en une fonction mesurable bornée 2π -périodique F , fonction définissant donc une classe \dot{F} de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.

Concernant le calcul des coefficients de Fourier, on a (en utilisant au final Fubini)

$$\begin{aligned}
 c_0(\dot{F}) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(u) du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\theta f(u) du \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \left(\int_u^{2\pi} d\theta \right) du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u)(2\pi - u) du.
 \end{aligned}$$

Si f était continue, on pourrait affirmer, par intégration par parties, que, pour $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned}
 c_k(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[F(\theta) \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} c_k(\dot{f}) \\
 &= \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta}{2i\pi k} + \frac{1}{ik} c_k(\dot{f}).
 \end{aligned}$$

Ce résultat subsiste même lorsque f cesse d'être continue : il suffit pour cela d'approcher $f|_{[0,2\pi]}$ dans $\mathcal{L}_C^1([0, 2\pi], d\theta)$ par une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ (au sens de la semi-norme $\|\cdot\|_1$ sur $[0, 2\pi]$), d'appliquer la formule précédente pour chaque f_n , puis de passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour que F soit continue 2π -périodique, il faut et il suffit que $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$, c'est-à-dire que $c_0(\dot{f}) = 0$, auquel cas

$$c_0(\dot{F}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u f(u) du.$$

- (2) La première formule trigonométrique à vérifier est immédiate : il suffit en effet de remarquer que si l'on pose $X_\theta = e^{i\theta/2}$, alors on a

$$\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{X_\theta^N - X_\theta^{-N}}{X_\theta - X_\theta^{-1}} = \frac{1}{X_\theta^{N-1}} \frac{X_\theta^{2N} - 1}{X_\theta^2 - 1}$$

et d'appliquer l'identité remarquable proposée, puis d'élever le tout au carré. Pour obtenir la seconde formule, il suffit juste de diviser par N et de calculer le carré

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta} \right)$$

en développant, ce qui donne (pour l'expression de ce carré) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{2(N-1)} \left(\sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ 0 \leq k_1, k_2 \leq N-1}} e^{i(k_1+k_2)\theta} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{2(N-1)} \left(\sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ 0 \leq k_1, k_2 \leq N-1}} 1 \right) e^{ik\theta} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) e^{ik\theta} + \sum_{k=N}^{2(N-1)} (2N-1-k) e^{ik\theta};
\end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à multiplier les deux membres par $e^{-i(N-1)\theta}$ et à effectuer les changements d'indexation nécessaires.

Les coefficients de Fourier complexes de \dot{K}_N se calculent par simple identification, sont nuls si $|k| \leq N$ et valent

$$c_k(\dot{K}_N) = \frac{N - |k|}{N}$$

pour $|k| \leq N - 1$.

Comme $c_0(\dot{K}_N) = 1$ et que K_N est positive, on a $\|\dot{K}_N\|_{\mathbb{T},1} = 1$ pour tout $N \geq 1$. D'autre part, si $\delta > 0$

$$\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} K_N(\theta) d\theta \leq \frac{2\pi}{N \sin^2(\delta/2)}$$

puisque $|\sin(N\theta/2)|^2 \leq 1$, ce qui implique

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} K_N(\theta) d\theta \right) = 0;$$

la suite $(\dot{K}_N)_{N \geq 1}$ réalise donc bien une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ au sens de la Définition 1.10 du cours.

(3) On voit que l'on peut réécrire

$$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \sum_{k=-N-1}^{N-1} \frac{N - |k|}{N} c_k(\dot{F})$$

en utilisant le fait que, pour tout k entre 0 et $N - 1$, $u_k = \sum_{l=-k}^k c_l(\dot{F})$. En

utilisant ce qui a été établi à la question **2**, on a donc

$$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{F}) c_k(\dot{K}_N).$$

En utilisant la Proposition 2.5, on constate que ceci s'écrit aussi

$$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{F} \overset{\text{per}}{*} \dot{K}_N).$$

La fonction 2π -périodique $\theta \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{F} \overset{\text{per}}{*} \dot{K}_N) e^{ik\theta}$ (qui d'ailleurs est un polynôme trigonométrique) est un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ ayant pour spectre complexe la suite $(c_k(\dot{F} \overset{\text{per}}{*} \dot{K}_N))_{k \in \mathbb{Z}}$, donc même spectre complexe que

la classe $\dot{f} \stackrel{\text{per}}{*} \dot{K}_N$. Comme la transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ est injective (voir la Proposition 2.6 ou la méthode de restitution d'un élément depuis sa transformée de Fourier vue en cours), on a égalité de ces deux classes et donc de leurs représentants continus en tout point, en particulier en $\theta = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{N} &= (F \stackrel{\text{per}}{*} K_N)(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(-\theta) F(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta) F(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Si l est un nombre complexe, on peut écrire

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta) F(\theta) d\theta - l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(\theta) - l) K_N(\theta) d\theta.$$

Si $l = \frac{F(0^+) + F(0^-)}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \pi c_0(\dot{f})$, on sait que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\delta_\epsilon \in]0, \pi[$ tel que $|\theta| \leq \delta_\epsilon$ implique $|F(\theta) - l| \leq \epsilon$. On a donc, pour ce choix de δ_ϵ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\theta| \leq \delta_\epsilon} |F(\theta) - l| K_N(\theta) d\theta \leq \epsilon \|\dot{K}_N\|_{\mathbb{T},1} = \epsilon;$$

d'autre part, d'après la question **2**, on sait que pour N assez grand

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\delta_\epsilon \leq |\theta| \leq \pi} |F(\theta) - l| K_N(\theta) d\theta \\ &\leq \frac{\sup |F|}{\pi} \times \int_{\delta_\epsilon \leq |\theta| \leq \pi} K_N(\theta) d\theta \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Au final, on a, pour N assez grand

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(\theta) - l) K_N(\theta) d\theta \right| \leq 2\epsilon,$$

et, comme ϵ est arbitraire, il en résulte bien

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{u_0 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \frac{F(0^+) + F(0^-)}{2} = \pi c_0(\dot{f}).$$

Si la suite $(\operatorname{Re} u_k)_{k \geq 0}$ tendait vers $+\infty$, alors, pour tout $A > 0$, il y aurait un seuil N_A tel que $k \geq N_A$ implique $\operatorname{Re} u_k > A$. Mais alors

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{u_0 + \cdots + u_{N_A} + \cdots + u_N}{N} \right] \\ &\geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{(N - N_A)A}{N} \right] = A, \end{aligned}$$

ce qui, comme A est arbitrairement grand, contredit le fait que cette limite est finie (elle vaut $\pi \operatorname{Re}[c_0(\dot{f})]$). Ceci est donc impossible. Le même raisonnement vaut dans le cas où la suite $(\operatorname{Re} u_k)_{k \geq 0}$ tendrait vers $-\infty$.

- (4) On applique le résultat de la question 1 pour calculer le spectre de \dot{F} .
Pour $k = \pm 1$, on a $c_{\pm 1}(\dot{F}) = 0$ tandis que, pour $k \geq 2$,

$$c_k(\dot{F}) = \frac{c_k(\dot{f})}{ik} = -\frac{1}{k \log k}$$

et que, si $k \leq -2$,

$$c_k(\dot{F}) = \frac{c_k(\dot{f})}{ik} = \frac{1}{k \log |k|} = -\frac{1}{|k| \log |k|}.$$

Comme $c_0(\dot{f}) = 0$, on a

$$c_0(\dot{F}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta f(\theta) d\theta.$$

La suite $(u_k)_{k \geq 0}$ de la question 3 a donc pour terme général, pour $k \geq 2$,

$$u_k = \sum_{l=-k}^k c_l(\dot{F}) = c_0(\dot{F}) - 2 \sum_{l=2}^k \frac{1}{|k| \log |k|}.$$

Comme la série de Bertrand $[1/(p \log p)]_{p \geq 2}$ est divergente (d'après la confrontation séries/intégrales et le fait que la primitive de $t \mapsto 1/(t \log t)$, soit la fonction $t \mapsto \log | \log t |$, tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est une suite de nombres réels tendant vers $-\infty$. D'après la question 3, il est impossible que la suite de terme général

$$\frac{u_0 + \dots + u_k}{N}$$

converge vers une limite finie (à savoir ici $\pi c_0(\dot{f}) = 0$). L'existence de $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ ayant pour spectre le spectre prescrit (qui pourtant tend vers 0 lorsque k tend vers $\pm\infty$) est donc impossible.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5. La fonction f_n est évidemment périodique de période 2π comme f . D'autre part

$$\begin{aligned} \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} |f(n\theta)|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2n\pi[} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times n \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},2}^2 = \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},2}^2. \end{aligned}$$

D'après la formule de Parseval, on a

$$\langle \dot{f}_n, \dot{g} \rangle_{\mathbb{T}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{f}_n) \overline{c_k(\dot{g})},$$

Or, puisque, dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$,

$$\dot{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{f}) \dot{e}_k,$$

où

$$e_k : \theta \mapsto \exp(ik\theta),$$

on a par identification en remplaçant θ par $n\theta$ dans l'expression d'un représentant,

$$c_k(\dot{f}_n) = c_{k/n}(\dot{f})$$

si n divise k et $c_k(\dot{f}_n) = 0$ sinon. Donc

$$\langle \dot{f}_n, \dot{g} \rangle_{\mathbb{T}} = c_0(\dot{f})\overline{c_0(\dot{g})} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_{nk}(\dot{f})\overline{c_{nk}(\dot{g})}.$$

Or

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_{nk}(\dot{f})\overline{c_{nk}(\dot{g})} \right| \leq \sqrt{\sum_{|k| \geq n} |c_k(\dot{f})|^2} \times \sqrt{\sum_{|k| \geq n} |c_k(\dot{g})|^2}$$

par Cauchy-Schwarz ; cette quantité tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini puisque l'on a sous chaque radical de droite le reste d'une série convergente. On a donc bien le résultat demandé.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6. Si l'opération de convolution entre éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ admettait un élément neutre \dot{e} , on aurait, pour tout $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, $\dot{f} * \dot{e} = \dot{f}$. En prenant la transformée de Fourier des deux membres et en appliquant la Proposition 2.8, on aurait, au niveau des spectres, la formule

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^n, \widehat{f}(\omega) \times \widehat{e}(\omega) = \widehat{f}(\omega).$$

Si l'on prend pour f la gaussienne

$$x \mapsto \exp(-\|x\|^2/2)$$

dont le spectre est

$$\omega \mapsto (2\pi)^{n/2} \exp(-\|\omega\|^2/2)$$

(et en particulier ne s'annule pas), on trouve donc

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^n, \widehat{e}(\omega) = 1.$$

Mais ceci est en contradiction avec le lemme de Riemann-Lebesgue (voir la Proposition 2.7) qui assure que le spectre d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^n , tendant vers 0 lorsque $\|\omega\|$ tend vers l'infini. L'existence de \dot{e} est donc impossible et l'opération de convolution sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ ne saurait admettre d'élément neutre.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7. On a, par définition de la transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(\omega) &:= \int_{\mathbb{R}} \Delta(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 \Delta(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1}^1 (1 - |t|)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1}^0 (1 + t)e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 (1 - t)e^{-i\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^1 (1 - t) \cos(\omega t) dt \\ &= 2 \left[(1 - t) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt \\ &= \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega)) = \frac{4 \sin^2(\omega/2)}{\omega^2} \\ &= \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2. \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de la classe de fonction intégrable $\hat{\Delta}$ étant une fonction continue de ω , on a aussi

$$\hat{\Delta}(0) = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 = 1$$

et le résultat voulu est bien démontré.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 8.

(1) Supposons d'abord $\omega_0 = 0$. La fonction

$$\omega \mapsto e^{-t\omega^2}$$

est une fonction intégrable sur \mathbb{R} dont la transformée de Fourier est la fonction

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-t\omega^2} e^{-ix\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} e^{-ixu/\sqrt{2t}} du \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4t)}. \end{aligned}$$

Comme cette fonction est aussi intégrable, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier (Théorème 2.4 du cours) et en déduire donc que la fonction

$$\omega \mapsto e^{-t\omega^2}$$

est la transformée de Fourier de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} = E(t, 0, x).$$

La fonction

$$\omega \mapsto e^{-t(\omega-\omega_0)^2}$$

est donc la transformée de Fourier de la fonction modulée

$$x \mapsto \frac{e^{i\omega_0 x}}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}.$$

Le fait que

$$(t, x) \mapsto E(t, 0, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}$$

soit de classe C^∞ dans $]0, \infty[\times \mathbb{R}$ est immédiat ; que cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles de la chaleur relève juste d'un calcul élémentaire.

(2) On peut définir la convolée de φ et de $x \mapsto E(t, 0, x)$ car il s'agit de deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} ; du fait que la fonction $x \mapsto E(t, 0, x)$ est bornée sur \mathbb{R} , on peut même assurer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} E(t, 0, x-u) \varphi(u) du$$

est convergente pour tout $t > 0$. Le fait que la fonction

$$(t, x) \mapsto \int_{-R}^R E(t, 0, x-u) \varphi(u) du$$

soit C^∞ dans $]0, \infty[$ et solution de l'équation de la chaleur dans cet ouvert résulte de l'application du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. La propriété

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\dot{\varphi}_t - \dot{\varphi}\|_1 = 0$$

résulte du fait que si t_n est une suite de nombres positifs tendant vers 0, la suite $(E(t_n, 0, x))_n$ réalise une approximation de la masse de Dirac (voir le cours de *Théorie de l'intégration*, Proposition 4.10 dans le polycopié de ce cours).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 9.

- (1) La fonction f étant continue et à support compact, donc aussi bornée et à support compact, elle est donc bien intégrable dans le plan. En utilisant le théorème de Fubini et en intégrant deux fois par parties, on voit que, pour $\omega_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega_1, \omega_2) &= \iint_{[-R, R]^2} f(x, y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \\ &= \int_{-R}^R \left[\int_{-R}^R f(x, y) e^{-i\omega_1 x} dx \right] e^{-i\omega_2 y} dy \\ &= \frac{1}{(i\omega_1)^3} \int_{-R}^R \left[\int_{-R}^R \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} e^{-i\omega_1 x} dx \right] e^{-i\omega_2 y} dy \\ &= \frac{1}{(i\omega_1)^3} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \end{aligned}$$

et que, si $\omega_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega_1, \omega_2) &= \iint_{[-R, R]^2} f(x, y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \\ &= \int_{-R}^R \left[\int_{-R}^R f(x, y) e^{-i\omega_2 y} dy \right] e^{-i\omega_1 x} dx \\ &= \frac{1}{(i\omega_2)^3} \int_{-R}^R \left[\int_{-R}^R \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} e^{-i\omega_2 y} dy \right] e^{-i\omega_1 x} dx \\ &= \frac{1}{(i\omega_2)^3} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy. \end{aligned}$$

Si

$$Q[f] := \left| \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} \right| + \left| \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} \right|$$

(c'est une fonction continue, nulle hors de $[-R, R]^2$ et bornée dans ce pavé), il en résulte, pour tout (ω_1, ω_2) dans \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} (|\omega_1|^3 + |\omega_2|^3) |\widehat{f}(\omega)| &\leq \iint_{[-R, R]^2} |Q[f](x, y)| dx dy \\ &\leq 4R^2 \sup_{[-R, R]^2} |Q[f]| \end{aligned}$$

et, par conséquent, que \widehat{f} est intégrable sur \mathbb{R}^3 puisque la fonction

$$\omega \longmapsto \frac{1}{\|\omega\|^3}$$

est intégrable dans la couronne $\{\|\omega\| \geq 1\}$. C'est donc le Théorème d'Inversion 2.4 (et le recours au changement de variables consistant à passer en coordonnées polaires) qui assure la formule demandée exprimant $f(x, y)$ en termes de la transformée de Fourier de \hat{f} .

(2) Posons $\xi := (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\xi^\perp := (-\sin \theta, \cos \theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |R[f](p, \theta)| dp &\leq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(p\xi + t\xi^\perp)| dt \right] dp \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(p\xi + t\xi^\perp)| dp dt \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dx dy < \infty \end{aligned}$$

grâce au théorème de Fubini-Tonelli et à la formule de changement de variables dans les intégrales doubles, appliqué à la transformation orthogonale du plan

$$(p, t) \mapsto (x, y) = p\xi + t\xi^\perp$$

(il s'agit de la rotation de centre l'origine et d'angle θ). La fonction

$$p \mapsto R[f](p, \theta)$$

est donc bien intégrable sur \mathbb{R} . En appliquant maintenant le théorème de Fubini (la clause de sécurité étant validée grâce au théorème de Fubini-Tonelli), on a, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} R[f](p, \theta) e^{-i\eta p} dp \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(p\xi + t\xi^\perp) dt \right] e^{-i\eta p} dp \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(p\xi + t\xi^\perp) e^{-i\eta p} dp dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i\eta(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \\ &= \hat{f}(\eta \cos \theta, \eta \sin \theta). \end{aligned}$$

En utilisant la formule établie à la question précédente, on voit donc que, pour tout (x, y) dans \mathbb{R}^2 , on a

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\int_{\mathbb{R}} R[f](p, \theta) e^{-i\eta p} dp \right] \times e^{i\eta(x \cos \theta + y \sin \theta)} \eta d\eta d\theta.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 10.

(1) Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{\chi}_{[-T, T]}(\omega) = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega}.$$

(2) L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt$$

est divergente car

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t} dt &\geq \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\ &\geq \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)\pi} \right) \int_0^\pi |\sin t| dt \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

La fonction f_Ω n'est donc pas une fonction intégrable sur \mathbb{R} (sinon par le changement de variable $u = \Omega t$, f_1 le serait, ce qui est impossible d'après ce qui précède); ce n'est donc pas un représentant d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$.

La fonction f_Ω est bien dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ puisque la fonction $t \mapsto \frac{|\sin \Omega t|}{t}$ est bornée par Ω sur \mathbb{R} ($|\sin u| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$), en particulier sur $[-1, 1]$, et que l'intégrale impropre

$$\int_{|u| \geq 1} \frac{du}{u^2}$$

converge du fait du critère de Riemann. La transformée de Fourier inverse (au sens L^2 , voir le Théorème 2.6 du cours) de l'élément de $L^2(\mathbb{R}, d\omega)$ dont un représentant est

$$\omega \mapsto f_\Omega(\omega)$$

est la classe de $\frac{1}{2\pi} \chi_{[-\Omega, \Omega]}$ dans $L^2(\mathbb{R}, dt)$; on a donc, d'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier L^2 (encore le Théorème 2.6) :

$$\frac{1}{2\pi} \dot{\chi}_{[-\Omega, \Omega]} = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ L^2}} \left[t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N f_\Omega(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right].$$

Du fait de la parité des fonctions de la variable t figurant aux deux membres de cette égalité, on a aussi

$$\frac{1}{2\pi} \dot{\chi}_{[-\Omega, \Omega]} = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ L^2}} \left[t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N f_\Omega(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right].$$

En renversant les rôles de l'espace des temps et de celui des fréquences (c'est-à-dire en échangeant les variables t et ω), on constate que la transformée de Fourier au sens L^2 de $\dot{f}_\Omega \in L^2(\mathbb{R}, dt)$ est $\dot{\chi}_{[-\Omega, \Omega]} \in L^2(\mathbb{R}, d\omega)$ (on utilise pour cela la définition de la transformation de Fourier au sens L^2).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 11. D'après le résultat de la question 2 de l'exercice 10, la transformée de Fourier de la classe de

$$t \mapsto \frac{\sin t}{t} = \pi f_1(t)$$

dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ est la classe dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, d\omega)$ de la fonction

$$\omega \mapsto \pi \chi_{[-1, 1]}(\omega).$$

D'après la formule de Plancherel (formule (2.43) du polycopié), on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi^2}{2\pi} \int_{-1}^1 d\omega = \pi.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 12.

- (1) C'est la formule de changement de variables du cours d'intégration qui assure que $\dot{\psi}_{a,b}$ est dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et que l'on a d'ailleurs

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt.$$

Si $\dot{\psi} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, on vérifie (toujours grâce à la formule de changement de variables, c'est d'ailleurs un cas particulier de la formule (2.28) établie dans la Proposition 2.7) que

$$\widehat{\psi}_{a,b}(\omega) = e^{-ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega).$$

Si $(\dot{\psi}_k)_k$ est une suite d'éléments de \mathcal{G} convergeant (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$) vers un élément $\dot{\psi}$, la suite des classes de fonctions

$$\omega \mapsto e^{-ib\omega} \widehat{\psi}_k(a\omega)$$

converge dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, d\omega)$ vers la classe de la fonction

$$\omega \mapsto e^{-ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega),$$

où $\widehat{\psi}$ est un représentant de la transformée de Fourier de $\dot{\psi}$; cela vient du fait que, grâce à la formule de Plancherel, la transformée de Fourier de $\dot{\psi}_k$ converge vers celle de $\dot{\psi}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, d\omega)$ (on fait ensuite le changement de variables $\omega \mapsto a\omega$; la multiplication par la fonction de module 1 qui à ω associe $e^{-ib\omega}$ n'enraye pas cette convergence. La transformée de Fourier de $\psi_{a,b}$ a donc pour représentant

$$\omega \mapsto e^{-ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega),$$

où $\widehat{\psi}$ est un représentant de la transformée de Fourier de $\dot{\psi}$.

- (2) En utilisant la formule de Plancherel (formule (2.43) dans l'énoncé du Théorème 2.6), on a

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}_{a,b}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} e^{ib\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Comme la fonction

$$\omega \mapsto \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)}$$

est intégrable sur \mathbb{R} , le lemme de Riemann-Lebesgue (une des assertions de la Proposition 2.7) permet de conclure au fait que

$$\lim_{b \rightarrow \pm\infty} F(a, b) = 0.$$

- (3) D'après la formule de Plancherel appliquée dans l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, on a, pour $j = 1, 2$,

$$\langle \dot{f}_j, \dot{\psi}_{a,b} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_j(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} e^{ib\omega} d\omega.$$

Si $a > 0$ est fixé, on peut, puisque les fonctions

$$\omega \mapsto \widehat{f}_j(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)}, \quad j = 1, 2,$$

sont dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_{\omega}, d\omega)$ (en effet les \widehat{f}_j le sont et la fonction $|\widehat{\psi}|$ est bornée), utiliser dans $L^2_{\mathbb{R}}(b, db)$ cette fois à nouveau la formule de Plancherel pour assurer que

$$\begin{aligned} & \int_{b \in \mathbb{R}} F_1(a, b) \overline{F_2(a, b)} db \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} f_1(\omega) \overline{f_2(\omega)} |\widehat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à la mesure da/a , on constate (en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et l'hypothèse sur $\widehat{\psi}$) que

$$\begin{aligned} & \int_{a>0} \int_{b \in \mathbb{R}} |F_1(a, b)| |F_2(a, b)| \frac{da db}{a} \\ &\leq 2\pi \int_{\omega} |f_1 f_2(\omega)| \left(\int_{a>0} \frac{|\widehat{\psi}(a\omega)|^2}{a} da \right) d\omega \\ &= 2\pi C \int_{\mathbb{R}} |f_1 f_2(\omega)| d\omega < +\infty \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder. D'une part, ceci implique (en prenant $\dot{f}_1 = \dot{f}_2$) que chaque \dot{F}_j est dans H . D'autre part, cela nous met en situation favorable pour appliquer le théorème de Fubini (la clause de sécurité étant vérifiée) et conclure que

$$\langle \dot{F}_1, \dot{F}_2 \rangle_H = 2\pi C \times \langle \dot{f}_1, \dot{f}_2 \rangle.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 13.

- (1) On a, par définition de la transformée de Fourier,

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{\epsilon}(\omega) &:= \frac{i}{\pi} \left(\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt + \int_{-1/\epsilon}^{-\epsilon} \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{\sin(\omega t)}{t} dt \end{aligned}$$

(on effectue le changement de variables $t \mapsto -t$ dans la seconde intégrale). Si $\omega \in \mathbb{R}$, on voit (par exemple en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue) que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sin(\omega t)}{t} dt.$$

D'autre part, si $\omega \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_1^{1/\epsilon} \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \int_1^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{t} dt$$

(l'intégrale au second membre est ici semi-convergente au sens de Riemann). Finalement, on voit donc que pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{h}_\epsilon(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\omega t)}{t} dt.$$

Si $\omega > 0$, on voit (en faisant dans l'intégrale semi-convergente le changement de variables $t \mapsto \omega t$) que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Il résulte de la formule de Dirichlet (rappelée dans l'en-tête de l'exercice) que, si $\omega > 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{h}_\epsilon(\omega) = 1.$$

Puisque \widehat{h}_ϵ est impaire, on a, pour tout $\omega < 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{h}_\epsilon(\omega) = -1.$$

- (2) La fonction signe est une fonction de module 1, ce qui implique que la multiplication par cette fonction définit une isométrie T de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega)$ dans lui-même. Si l'on définit, pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$,

$$H(\dot{f}) = \mathcal{F}^{-1} \left[T(\mathcal{F}(\dot{f})) \right],$$

on définit l'action sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ d'un opérateur linéaire continu

$$H = \mathcal{F}^{-1} \circ T \circ \mathcal{F}.$$

La convolution d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ avec un élément $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ est licite (d'après les inégalités de Young vues dans le cours de *Théorie de l'Intégration* (Théorème 4.2 de ce cours) et définit un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$. On remarque d'autre part que, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{h}_\epsilon(\omega)| = \frac{2}{\pi} \left| \int_{|\omega|\epsilon}^{|\omega|/\epsilon} \frac{\sin u}{u} du \right| \leq C$$

où

$$C = \frac{2}{\pi} \times \sup_{0 < x < y < +\infty} \left| \int_x^y \frac{\sin u}{u} du \right| < +\infty$$

puisque l'intégrale de $u \mapsto \sin u/u$ sur $[0, +\infty[$ est semi-convergente (ce qui implique que les primitives de cette fonction sur $[0, +\infty[$ sont bornées en valeur absolue). Si \dot{f} était dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$, on aurait, d'après la Proposition 2.8 du cours,

$$\widehat{h_\epsilon * \dot{f}} = \widehat{h}_\epsilon \times \mathcal{F}(\dot{f});$$

puisque $|\widehat{h}_\epsilon|$ est bornée par C , on a aussi, en utilisant la densité de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ et la continuité de \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F}(\widehat{h_\epsilon * \dot{f}}) = \widehat{h}_\epsilon \times (\dot{f}).$$

Grâce à la formule de Plancherel (formule (2.43) du cours), il vient donc

$$\begin{aligned} & \|\dot{h}_\epsilon * \dot{f} - H(\dot{f})\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}_\epsilon(\omega) - \text{signe}(\omega)|^2 |\mathcal{F}[\dot{f}](\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

C'est donc le théorème de convergence dominée (qui s'applique ici, au second membre de cette égalité, car la majoration de $|\widehat{h}_\epsilon|$ par C est uniforme en ϵ) qui implique

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|\dot{h}_\epsilon * \dot{f} - H(\dot{f})\|_2^2 = 0.$$

EXERCICE (bases hilbertiennes, opérateurs, adjonction, Fourier)

1. Soit $h = (h_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ une suite de $l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ et $N \in \mathbb{N}^*$. En utilisant judicieusement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, vérifier, pour tout $e = (e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ dans $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, l'inégalité :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| |e_l| \right)^2 \leq \|h\|_1^2 \times \|e\|_2^2$$

(on pensera à exprimer $|h_{l-Nk}|$ sous la forme factorisée $\sqrt{|h_{l-Nk}|} \times \sqrt{|h_{l-Nk}|}$). En déduire que l'on définit un opérateur linéaire continu $R_N : l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ de norme inférieure ou égale à $\|h\|_1$, en posant

$$R_N(e) := \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h_{l-Nk} \right)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

En utilisant l'indication proposée, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| |e_l| \right)^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| |e_l|^2 \right).$$

Si l'on utilise maintenant le théorème de Fubini-Tonelli, on observe que le membre de droite de l'inégalité s'écrit aussi :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} |h_{\lambda-Nk}| \right) \right).$$

En utilisant finalement l'invariance par translation de la mesure de décompte sur \mathbb{Z} , on note que :

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} |h_{\lambda-Nk}| \right) \right) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \|h\|_1 \right) \\ &= \|h\|_1 \times \sum_{l \in \mathbb{Z}} |e_l|^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| \right) \\ &\leq \|e\|_2^2 \times \|h\|_1^2. \end{aligned}$$

C'est bien l'inégalité demandée. Puisque

$$\left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-Nk} e_l \right| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |h_{l-Nk}| |e_l| \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

il en résulte que la suite

$$\left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h_{l-Nk} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

est bien dans $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, de norme au plus égale à $\|h\|_1 \times \|e\|_2$. L'application

$$e \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) \mapsto \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h_{l-Nk} \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$$

est donc bien un opérateur linéaire continu de norme au plus égale à $\|h\|_1$.

2. *Étant donnés deux suites $e = (e_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ et $f = (f_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ dans $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, écrire la formule d'adjonction pour l'opérateur R_N (impliquant ces deux suites) et en déduire l'expression du terme général de la suite $R_N^*(f)$.*

La formule d'adjonction s'écrit (cf. la Proposition 1.14 du cours) :

$$\forall e \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}), \forall f \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}), \langle R_N(e), f \rangle = \langle e, R_N^*(f) \rangle.$$

En utilisant le théorème de Fubini (on vérifie qu'il s'applique grâce encore à l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on observe que :

$$\begin{aligned} \langle R_N(e), f \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (R_N(e))_k \overline{f_k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-Nk} e_l \right) \overline{f_k} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{l-Nk} \overline{f_k} \right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l \overline{(R_N^*(f))_l}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$R_N^*(f) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{l-Nk} f_k} \right)_{l \in \mathbb{Z}}.$$

3. *Pourquoi, lorsque $f = (f_l)_{l \in \mathbb{Z}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$, les deux séries (bilatères) de (classes de) fonctions (de $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ dans \mathbb{C})*

$$\theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} f_l e^{-il\theta}, \quad \theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} (R_N^*(f))_l e^{-il\theta}$$

convergent-t-elles toutes les deux dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, d\theta)$? On note \widehat{f} et $\widehat{R_N^(f)}$ leurs sommes respectives dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, d\theta)$. Vérifier que l'on a, dans $L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, d\theta)$, l'égalité :*

$$\widehat{R_N^*(f)}(\theta) = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_l} e^{-il\theta} \right) \times \widehat{f}(N\theta).$$

La famille de (classes de) fonctions 2π -périodiques $\theta \mapsto e^{-il\theta}$, $l \in \mathbb{Z}$, constitue une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$, équipé du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \overline{\psi(\theta)} d\theta.$$

Les deux suites $(f_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ et $((R_N^*(f))_l)_{l \in \mathbb{Z}}$, toutes les deux dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, peuvent donc s'interpréter comme les listes des coordonnées dans cette base hilbertienne de deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ notés respectivement \widehat{f} et $\widehat{R_N^*(f)}$. La Proposition 1.9 du cours assure que les séries de fonctions

$$\theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} f_l e^{-il\theta}, \quad \theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} (R_N^*(f))_l e^{-il\theta}$$

convergent respectivement vers ces éléments \widehat{f} et $\widehat{R_N^*(f)}$ dans le \mathbb{C} -espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. La (classe de) fonction $\theta \mapsto \widehat{f}(N\theta)$ s'exprime dans la base hilbertienne comme

$$\widehat{f}(N\theta) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_k e^{-ikN\theta},$$

la convergence de la série à droite ayant lieu dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ et étant entendue au sens de la norme sur cet espace de Hilbert. Comme la suite $(h_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ est dans $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, la série de fonctions

$$\theta \mapsto \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \overline{h_l} e^{-il\theta}$$

est normalement convergente sur \mathbb{R} (pour la norme uniforme) et sa somme définit une fonction 2π -périodique continue (donc bornée) sur \mathbb{R} . La classe de fonction

$$\theta \mapsto \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_l} e^{-il\theta} \right) \widehat{f}(N\theta)$$

définit donc un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$. Pour vérifier la formule demandée, il suffit de calculer la suite des coordonnées $(c_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}}$ de cet élément dans la base hilbertienne définie par les $\theta \mapsto e^{-i\lambda\theta}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$,

$$c_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \overline{h_l} e^{-il\theta} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_k e^{-ikN\theta} \right) e^{i\lambda\theta} d\theta.$$

Si l'on développe le produit sous l'intégrale (et que l'on utilise la convergence dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ des deux séries qui figurent sous l'intégrale), on observe que les seuls coefficients contribuant à une contribution non nulle dans l'expression de c_{λ} sont les coefficients $\overline{h_l} f_k$, avec $l + kN = \lambda$, *i.e.* $l = \lambda - kN$ (cela résulte de l'orthogonalité entre elles des classes de fonctions $\theta \mapsto e^{i\nu\theta}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$). Il en résulte

$$c_{\lambda} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{\lambda - kN}} f_k = (R_N^*(f))_{\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}.$$

L'égalité demandée en résulte.

4. Calculer, si $e \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, le coefficient de Fourier complexe $c_0[\dot{\varphi}_{e,h}]$ de la classe de fonction 2π -périodique

$$\dot{\varphi}_{e,h} : \theta \mapsto \widehat{e}(\theta) \times \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{il\theta} = \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l e^{-il\theta} \right) \times \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} h_{\lambda} e^{i\lambda\theta} \right).$$

En utilisant le résultat établi à la question **3**, prouver que, pour tout élément $e = (e_l)_{l \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, pour tout élément $f = (f_l)_{l \in \mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \langle R_N(e), f \rangle = \langle e, \overline{h} \rangle \times \overline{f_0}.$$

Comme la classe de fonction $\dot{\varphi}_{e,h}$ se factorise en

$$\dot{\varphi}_{e,h}(\theta) = \left(\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} e_l e^{-il\theta} \right) \times \left(\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} h_{\lambda} e^{i\lambda\theta} \right),$$

on observe qu'une fois le produit effectué (les convergences des séries de fonctions impliquées étant entendues dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ pour la première, normalement pour la norme uniforme pour la seconde), le coefficient de Fourier $c_0[\dot{\varphi}_{e,h}]$ s'obtient comme la somme des seules contributions des produits de coefficients $e_l \times h_{\lambda}$ avec $\lambda - l = 0$, *i.e.* $\lambda = l$. Ce coefficient de Fourier vaut donc

$$c_0[\dot{\varphi}_{e,h}] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e_l h_l = \langle e, \overline{h} \rangle.$$

On a, d'après la formule d'adjonction, si e et f sont deux éléments de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$,

$$\langle R_N(e), f \rangle = \langle e, R_N^*(f) \rangle \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Il résulte de la formule de Plancherel, combinée avec le résultat établi à la question **3**, que :

$$\begin{aligned}\langle R_N(e), f \rangle = \langle e, R_N^*(f) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{e}(\theta) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{il\theta} \right) \overline{\widehat{f}(N\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{e,h}(\theta) \overline{\widehat{f}(N\theta)} d\theta \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Plancherel à nouveau (mais dans l'autre sens cette fois), on trouve :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{e,h}(\theta) \overline{\widehat{f}(N\theta)} d\theta = c_0(\dot{\varphi}_{e,h}) \overline{c_0(\widehat{f})} + \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^*; N \text{ divise } k\}} c_k(\dot{\varphi}_{e,h}) \overline{c_k(\widehat{f})}.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^*; N \text{ divise } k\}} |c_k(\widehat{f})|^2 = 0$$

(car $\widehat{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$) et que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\dot{\varphi}_{e,h})|^2 = \|\dot{\varphi}_{e,h}\|^2 < +\infty$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\{k \in \mathbb{Z}^*; N \text{ divise } k\}} c_k(\dot{\varphi}_{e,h}) \overline{c_k(\widehat{f})} \right) = 0.$$

Cela conclut à la preuve du résultat demandé.

PROBLEME (Fourier)

Partie I

I.1. Soit a un nombre réel strictement positif et f_a la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f_a(t) = \exp(-a|t|)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que f_a représente un élément \dot{f}_a de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ et calculer la transformée de Fourier de \dot{f}_a .

L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a|t|} dt = 2 \int_{[0, \infty[} e^{-at} dt = 2/a$$

est convergente, donc f_a représente un élément \dot{f}_a de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$. La transformée de Fourier est définie par :

$$\begin{aligned}\widehat{\dot{f}_a}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{[0, \infty[} \left(e^{-(a+i\omega)t} + e^{-(a-i\omega)t} \right) dt \\ &= \left(\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

I.2. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Dédurre du résultat établi à la question **1** le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + a^2} dt.$$

On constate (d'après le résultat obtenu à la question **1**) que la transformée de Fourier de \dot{f}_a est une fonction intégrable sur \mathbb{R} (car il y a intégrabilité en $\pm\infty$ en vertu du critère de Riemann). On peut donc appliquer la formule d'inversion de Fourier dans le cadre L^1 (théorème 2.4 du cours). Un représentant continu de \dot{f}_a est donc donné par la fonction :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\dot{f}_a}(\omega) e^{it\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + \omega^2} e^{it\omega} d\omega.$$

Comme f_a est un autre représentant continu de \dot{f}_a , les deux représentants continus de la même classe \dot{f}_a coïncident et on a donc l'identité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-a|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + \omega^2} e^{it\omega} d\omega.$$

En échangeant les notations t et ω , il vient :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{t^2 + a^2} dt.$$

L'intégrale à calculer vaut donc $(\pi/a) e^{-a|\omega|}$.

I.3. Montrer que $\dot{f}_a * \dot{f}_a$ admet un représentant continu que l'on calculera.

La convolée de \dot{f}_a par elle-même définit (puisque la convolution est une opération interne de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$) un élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ dont un représentant est donné presque partout par

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-a|s|} e^{-a|t-s|} dt.$$

Or, il se trouve qu'en fait, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a|s|} e^{-a|t-s|} dt$$

converge et que la fonction

$$F : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-a|s|} e^{-a|t-s|} dt$$

est une fonction continue (d'après le théorème de Lebesgue de continuité des intégrales fonctions d'un paramètre : en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $s \mapsto e^{-a|t-s|}e^{-a|s|}$, qui dépend continument du paramètre t , est dominée par la fonction intégrable $s \mapsto e^{-a|s|}$). La fonction F définit donc un représentant continu de $\dot{f}_a * \dot{f}_a$. Pour calculer F , on remarque qu'il s'agit d'une fonction paire (convolée de deux fonctions paires) et l'on peut se contenter de calculer $F(t)$ pour $t \geq 0$. On a pour un tel $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^0 e^{as-a(t-s)} ds + \int_0^t e^{-as-a(t-s)} ds + \int_t^{+\infty} e^{-as-a(s-t)} ds \\ &= e^{-at} \int_{-\infty}^0 e^{2as} ds + te^{-at} + e^{at} \int_t^{+\infty} e^{-2as} ds \\ &= \frac{e^{-at}}{2a} + te^{-at} + \frac{e^{-at}}{2a} = e^{-at} \left(\frac{at+1}{a} \right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = e^{-a|t|} \left(\frac{a|t|+1}{a} \right).$$

I.4. Dédurre du calcul effectué à la question 3 la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{(t^2 + a^2)^2} dt \quad \text{lorsque } \omega \in \mathbb{R}.$$

Puisque la transformée de Fourier de $\dot{f}_a * \dot{f}_a$ est égale au produit $\widehat{\dot{f}_a} \times \widehat{\dot{f}_a}$ (d'après la Proposition 2.8 du cours), on a :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} F(t) e^{-i\omega t} dt = \left(\frac{2a}{a^2 + \omega^2} \right)^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2}.$$

Comme \widehat{F} est (comme F) intégrable, la formule d'inversion de Fourier dans le cadre L^1 s'applique une nouvelle fois. Puisque F est continue, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega) e^{it\omega} d\omega = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\omega}}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega.$$

En échangeant les notations t et ω , on en déduit :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{(a^2 + t^2)^2} dt = \frac{F(\omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} e^{-a|\omega|} \left(\frac{a|\omega|+1}{a} \right).$$

5. Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions continues et intégrables g de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = e^{-a|t|+b} \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-s|} g(s) ds \quad (\text{discuter suivant la valeur de } b).$$

Puisque g est supposée intégrable et que $f_a : t \mapsto e^{-a|t|}$ l'est aussi, on peut, si g est solution de

$$g(t) = e^{-a|t|} + \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-s|} g(s) ds = f_a(t) + (g * f_a)(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

prendre la transformée de Fourier des deux membres (considérés comme représentants de fonctions intégrables), ce qui donne :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\omega) = \widehat{f}_a(\omega) + b \widehat{f}_a(\omega) \widehat{g}(\omega).$$

On en déduit :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\omega) \left(1 - \frac{2ab}{a^2 + \omega^2}\right) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

soit

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\omega) (a(1 - 2b) + \omega^2) = 2a.$$

On doit ici discuter suivant les valeurs de b .

- Si $a(1 - 2b) = \tau_b^2 > 0$ (*i.e.* $b < 1/2$), on en déduit que

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{2a}{\tau_b^2 + \omega^2},$$

ce qui donne (d'après le résultat établi à la question 1) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = g_b(t) = \frac{a}{\tau_b} e^{-\tau_b|t|}.$$

La fonction g_b est donc l'unique fonction solution du problème puisque la transformation de Fourier est injective sur $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ (d'après la formule d'inversion dans le cadre L^1).

- Si $a(1 - 2b) = -\tau_b^2 \leq 0$ (*i.e.* $b \geq 1/2$), on trouve que, si g est solution du problème posé, alors nécessairement

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{g}(\omega) (\omega^2 - \tau_b^2) = 2.$$

Mais la fonction

$$\omega \in \mathbb{R} \setminus \{\pm a\} \mapsto \frac{2}{\omega^2 - \tau_b^2}$$

ne représente pas dans ce cas une classe de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, dt)$ car elle n'est pas intégrable au voisinage de $\pm \tau_b$ (en vertu du critère de Riemann). Le problème posé n'admet alors pas de solution.

Partie II

II.1. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, tel que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, d\omega)$. Pourquoi existe-t-il un unique représentant continu de f ? Que vaut $f(t)$ en fonction de \widehat{f} ? On notera f ce représentant.

D'après la formule d'inversion de Fourier dans le cadre L^1 (théorème 2.4 du cours), la fonction

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega$$

est un représentant continu de f . Ce représentant continu est unique car deux fonctions continues sur \mathbb{R} égales dt -presque partout sont égales partout.

II.2. Montrer que la série (bilatère) de fonctions

$$\theta \in [-\pi, \pi] \mapsto \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \widehat{f}(\theta + 2j\pi)$$

est normalement convergente dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ si $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ (c'est-à-dire que $\sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \|\widehat{f}(\cdot + 2j\pi)\|_{L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)} < +\infty$). On note par la suite Ψ l'élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$ défini comme la somme de cette série de fonctions dans l'espace de Banach $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$.

On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} |\widehat{f}(\theta + 2j\pi)| d\theta = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \int_{(2j-1)\pi}^{(2j+1)\pi} |\widehat{f}(\theta)| d\theta = \|\widehat{f}\|_{L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, d\omega)} < +\infty.$$

Ceci prouve la convergence normale de la série (bilatère) de fonctions

$$\theta \in [-\pi, \pi] \mapsto \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \widehat{f}(\theta + 2j\pi)$$

dans l'espace normé complet $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}, d\theta)$.

II.3. Donner, pour $N \in \mathbb{N}^*$, les définitions des noyaux de Dirichlet D_N et de Fejér F_N , leurs expressions analytiques « simplifiées », et l'allure (sur une même figure, et pour la même valeur de N) de leurs graphes au dessus de $[-\pi, \pi]$. Pointer ce qui différencie ces deux graphes. Vérifier que l'on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=-N}^N f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) D_N(\theta) d\theta$$

$$\sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) F_N(\theta) d\theta.$$

Le noyau de Dirichlet est la fonction polynomiale trigonométrique définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, D_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N e^{ik\theta}.$$

La forme « simplifiée » est :

$$D_N(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{(2N+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \not\equiv 0 \text{ modulo } 2\pi \\ 2N + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau de Fejér est la fonction polynomiale trigonométrique définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, F_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ik\theta}.$$

La forme « simplifiée » est :

$$F_N(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{N\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)^2 & \text{si } \theta \not\equiv 0 \text{ modulo } 2\pi \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a représenté les deux graphes sur la figure suivante (rapporter l'intervalle des abscisses à l'échelle $1 = 2\pi$) : Le noyau de Fejér est positif, le noyau de Dirichlet ne l'est pas. Les deux noyaux sont d'intégrale 2π sur $[-\pi, \pi]$, mais le lobe central du noyau de Fejér est (approximativement deux fois) plus tassé (et en conséquence plus d'autant plus « élargi ») que ne l'est celui du noyau de Dirichlet. On note aussi la présence du facteur $1/N$ dans l'expression analytique simplifiée du noyau de Fejér, ce qui explique pourquoi le graphe de F_N s'écrase (hors de l'origine) de manière uniforme sur l'axe des abscisses lorsque N tend vers $+\infty$. En ce qui concerne le noyau de Dirichlet, ceci est moins net et se fait en tout cas de manière oscillante.

Grâce à la formule d'inversion de Fourier, appliquée à $k = -N, \dots, N$, on a,

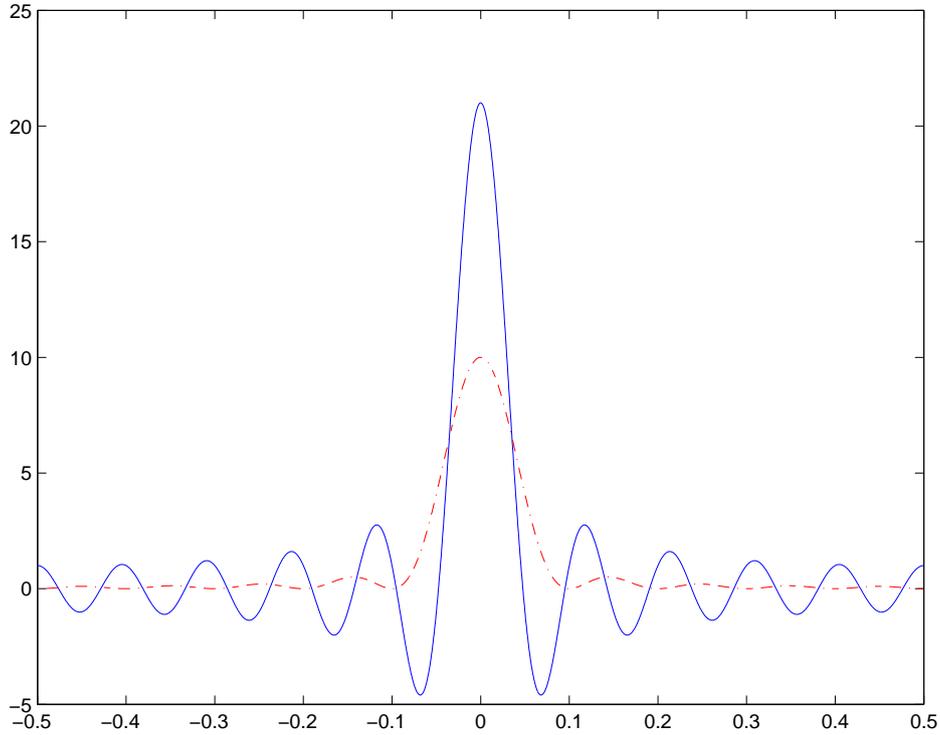


FIGURE 1 – Les graphes des noyaux de Dirichlet et Fejér ($N = 20$)

en ajoutant :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-N}^N f(k) &= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{ik\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) D_N(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{(2j-1)\pi}^{(2j+1)\pi} \widehat{f}(\omega) D_N(\omega) d\omega \quad (\text{invariance de } d\omega \text{ par translation}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\theta + 2j\pi) D_N(\theta) d\theta \quad (D_N \text{ est } 2\pi\text{-périodique}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(\theta) D_N(\theta) d\theta \quad (\text{par Fubini}).
 \end{aligned}$$

On répète exactement le même raisonnement pour l'autre formule impliquant le noyau de Fejér (on pourrait tout aussi bien exploiter le fait que $F_N = (D_0 + \dots + D_{N-1})/N$) et déduire ainsi la seconde formule de la première en sommant au sens de Cesàro).

II.4. On suppose que $\dot{\Psi}$ admet un représentant 2π -périodique $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

continu en $\theta = 0$ et admettant une dérivée à gauche et une dérivée à droite en ce point. Vérifier (en citant précisément le théorème invoqué) que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N f(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) f(k) = \Psi(0).$$

Que subsiste-t-il du résultat ci-dessus lorsque Ψ est seulement supposée continue en 0, sans être cette fois dérivable à gauche et à droite en ce point ?

Lorsque $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π -périodique, intégrable sur $[-\pi, \pi]$, continue en 0 et ayant une dérivée à gauche et à droite en 0, on est dans les conditions d'application du théorème de Jordan-Dirichlet (théorème 2.1 du cours). On a donc ici :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(\theta) D_N(\theta) d\theta \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N[\psi](0) = \Psi(0).$$

Comme

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \left(D_0(\theta) + \dots + D_{N-1}(\theta) \right)$$

et que la convergence d'une suite de nombres complexes vers une limite finie $l \in \mathbb{C}$ implique sa convergence au sens de Cesàro vers la même limite, on a aussi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) f(k) = \Psi(0).$$

On déduit donc de la question **II.3** le résultat voulu. Si Ψ est seulement supposée continue en $\theta = 0$, seul subsiste le résultat :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) f(k) = \Psi(0).$$

Ceci résulte du fait que la suite $(F_N/2\pi)_{N \geq 1}$ réalise une approximation de la masse de Dirac, ce que ne réalise pas la suite $(D_N/2\pi)_{N \geq 1}$ (c'est le théorème de Fejér dans sa version locale, théorème 2.3 du cours, et non plus celui de Jordan-Dirichlet qu'il faut alors invoquer).

II.5. Soit $a > 0$, comme dans la partie **I**. En appliquant le résultat établi à la question **II.3**, montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-a|k|} = 2a \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 j^2}. \quad (*)$$

Laquelle de ces deux séries numériques converge-t-elle le plus rapidement ?
Dédurre de l'identité (*) l'identité :

$$\forall a > 0, \quad \frac{a^2}{2\pi^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} = a \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}}. \quad (*)$$

Effectuer un développement limité à l'ordre 4 des deux membres de l'identité (*) en $a = 0_+$ et prouver les égalités :

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Suggérer enfin (sans toutefois la mettre en route) une méthode permettant de calculer explicitement les sommes $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^{2p}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

La classe \hat{f}_a vérifie les hypothèses de la question **II.1** car on a

$$\hat{f}_a : \omega \mapsto \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, d\omega).$$

De plus, il se trouve dans ce cas que la série de fonctions

$$\theta \mapsto \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \hat{f}_a(\theta + 2\pi j)$$

converge normalement dans $C^0(\mathbb{T})$ (équipé de la norme de la convergence uniforme). On peut donc poser, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\theta) := \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \hat{f}_a(\theta + 2j\pi) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \frac{2a}{a^2 + (\theta + 2\pi j)^2}.$$

La fonction définie ainsi est non seulement continue, mais aussi de classe C^1 , comme on le voit en utilisant le théorème de dérivation des intégrales (ici c'est l'intégration discrète sur \mathbb{Z} à laquelle nous avons affaire) dépendant d'un paramètre de Lebesgue. D'après le résultat établi à la question **II.4**, on a donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-a|k|} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N e^{-a|k|} = \Psi(0) = 2a \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 j^2}. \quad (*)$$

C'est évidemment la série numérique figurant au membre de gauche qui converge le plus rapidement (convergence exponentielle *versus* convergence en $O(1/j^2)$). Le membre de gauche de cette formule s'exprime comme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-a|k|} = 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} \right) - 1 = \frac{2}{1 - e^{-a}} - 1 = \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}}.$$

En multipliant par a les deux membres de la formule (*), on obtient l'identité (*) voulue (pour tout $a > 0$). Le DL à l'ordre 4 du second membre de (*) (au voisinage de $a = 0_+$) s'écrit :

$$a \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} = 2 + \frac{a^2}{6} - \frac{a^4}{360} + o(a^4) \quad (\dagger)$$

On a d'autre part

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} = 2 \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} + \frac{4\pi^2}{a^2}.$$

En utilisant le fait que

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2 + \lambda} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} - \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda}{j^2(j^2 + \lambda)}$$

si $\lambda = a^2/4\pi^2$, on voit que

$$\frac{a^2}{2\pi^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{j^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} = 2 + \frac{a^2}{\pi^2} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} \right) - \frac{a^2}{\pi^2} \times \frac{a^2}{4\pi^2} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^4} \right) + o(|a|^4). \quad (\dagger\dagger)$$

En identifiant les deux développements limités (\dagger) et ($\dagger\dagger$), on trouve bien

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

FIN

EXERCICE (transformation de Fourier)

1. *Rappeler (sans démonstration) quelle est la transformée de Fourier de la gaussienne centrée réduite*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2).$$

On a, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2) e^{-i\omega t} dt = \exp(-\omega^2/2)$$

car l'on sait (voir l'exemple 2.4 du cours) que la gaussienne centrée réduite est vecteur propre de la transformation de Fourier, associé à la valeur propre $\sqrt{2\pi}$.

2. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Dédurre de la question 1 l'expression de la transformée de Fourier de la fonction*

$$g_{m,\sigma} : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Il s'agit juste ici d'effectuer un changement de variables dans l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) e^{-i\omega t} dt.$$

On pose

$$u = \frac{t-m}{\sigma} \iff t = \sigma u + m,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) e^{-i\omega t} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\omega} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} e^{-i\omega\sigma u} du \\ &= e^{-im\omega} \exp(-\sigma^2\omega^2/2) \end{aligned}$$

si l'on utilise le résultat rappelé à la question 1.

3. En utilisant le résultat établi à la question **2**, montrer que la convolée $g_{m_1, \sigma_1} * g_{m_2, \sigma_2}$ (lorsque $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 > 0$) est une fonction du type $g_{m, \sigma}$ pour des constantes m et σ que l'on exprimera en fonction de $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$.

D'après la Proposition 2.8 du cours, la transformation de Fourier transforme l'opération de convolution entre fonctions intégrables en l'opération de multiplication au niveau des spectres. La transformée de Fourier de $g_{m_1, \sigma_1} * g_{m_2, \sigma_2}$ est donc, d'après le résultat établi à la question **2** :

$$\omega \longmapsto e^{-im_1\omega} e^{-\sigma_1^2\omega^2/2} \times e^{-im_2\omega} e^{-\sigma_2^2\omega^2/2} = e^{-i(m_1+m_2)\omega} e^{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\omega^2/2}.$$

On reconnaît la transformée de Fourier de $g_{m, \sigma}$, où $m = m_1 + m_2$ et $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. On a donc

$$g_{m_1, \sigma_1} * g_{m_2, \sigma_2} = g_{m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}.$$

4. Soit $t > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique fonction

$$U_{\omega_0, t} : x \in \mathbb{R} \mapsto U_{\omega_0, t}(x) \in \mathbb{C},$$

intégrable sur \mathbb{R} , et dont la transformée de Fourier est la fonction :

$$\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(-t(\omega - \omega_0)^2).$$

Vérifier que la fonction $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \mapsto U_{0, t}(x) \in \mathbb{C}$ est une fonction réelle, C^∞ en les deux variables t et x , et solution de l'équation aux dérivées partielles (dite de la chaleur)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) [U_{0, t}(x)] \equiv 0$$

dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. D'après le résultat établi à la question 2, si l'on pose $t = \sigma^2/2$, on voit que la fonction

$$\omega \mapsto \exp(-t\omega^2) = \exp(-\sigma^2\omega^2/2)$$

est la transformée de la gaussienne $g_{0, \sigma}$, avec $\sigma = \sqrt{2t}$. Pour obtenir après transformation de Fourier la fonction translatée

$$\omega \mapsto \exp(-t(\omega - \omega_0)^2),$$

il convient de multiplier l'antécédent $g_{0, \sqrt{2t}}$ par la fonction oscillante $x \mapsto e^{i\omega_0 x}$ (voir la formule (2.34) du cours). L'antécédent demandé est donc la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{i\omega_0 x} g_{0, \sqrt{2t}}(x) = e^{i\omega_0 x} \times \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

On a donc

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, U_{0,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Cette fonction est bien réelle, C^∞ comme fonction composée de fonctions C^∞ (ici $t \neq 0$). Qu'elle vérifie l'équation aux dérivées partielles de la chaleur relève d'un calcul immédiat.

EXERCICE II (séries de Fourier)

Soit N un entier strictement positif.

1. Rappeler la définition des noyaux de Dirichlet D_N et de Fejér F_N sur $[-\pi, \pi]$ en donnant les expressions développées ainsi que les expressions simplifiées de ces deux noyaux. Représenter sommairement les graphes de D_N et F_N sur $[-\pi, \pi]$ (pour une même valeur de N) et lister ce qui les différencie. Le noyau de Dirichlet D_N est la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$D_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N e^{ik\theta} = \begin{cases} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \neq 0 \\ 2N+1 & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

Le noyau de Fejér F_N est la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$F_N(\theta) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ik\theta} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\frac{N\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 & \text{si } \theta \neq 0 \\ N & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

Les graphes de D_N et F_N sont représentés ci-dessous. Voici ce qui les différencie :

- le noyau de Fejér est positif, le noyau de Dirichlet ne l'est pas ;
- les deux noyaux sont d'intégrale 2π sur $[-\pi, \pi]$, mais le lobe central du noyau de Fejér est (approximativement deux fois) plus tassé (et en conséquence plus d'autant plus « élargi ») que ne l'est celui du noyau de Dirichlet ;
- on note enfin la présence du facteur $1/N$ dans l'expression analytique simplifiée du noyau de Fejér, ce qui explique pourquoi le graphe de F_N s'écrase (hors de l'origine) de manière uniforme sur l'axe des abscisses lorsque N tend vers $+\infty$; en ce qui concerne le noyau de Dirichlet, ceci est moins net et se fait en tout cas de manière oscillante.

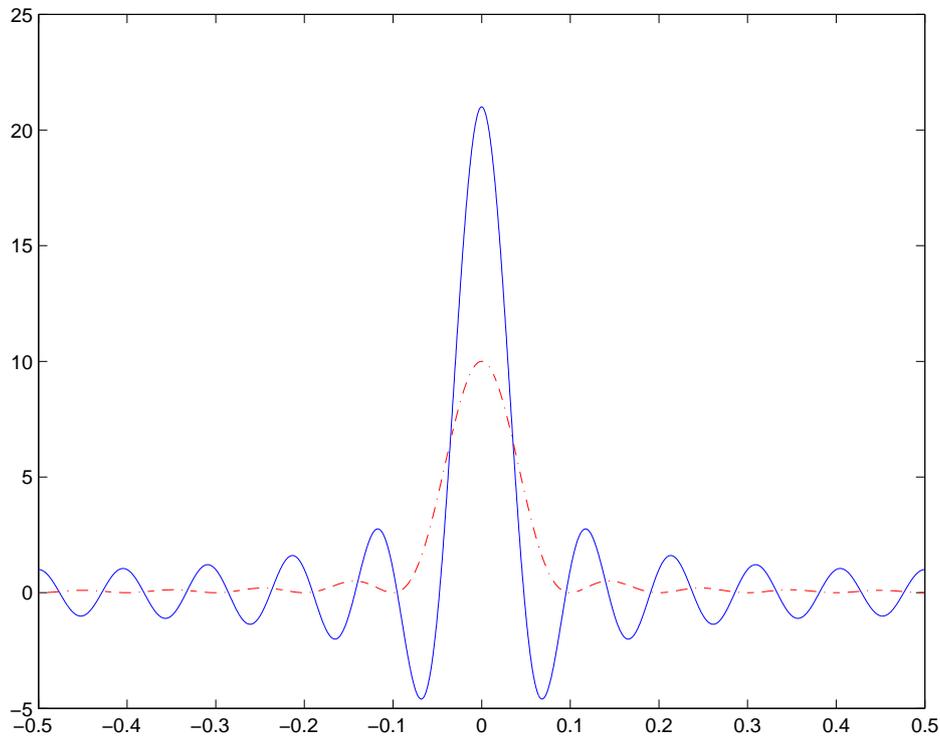


FIGURE 1 – Les graphes des noyaux de Dirichlet [en trait plein] et Fejér [en traits pointillés] pour $N = 20$

2. Soit P un polynôme trigonométrique

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^N c_k e^{ik\theta},$$

Calculer (en exprimant dans un premier temps sa série de Fourier) la convolée $F_N^{\text{per}} * Q$, où Q est la fonction 2π -périodique

$$Q : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{-iN\theta} P(\theta)$$

et exprimer cette convolée en termes de la fonction dérivée P' . La fonction 2π -périodique Q s'écrit :

$$Q(\theta) = \sum_{k=0}^N c_k e^{i(k-N)\theta} = \sum_{k=-N}^0 c_{k+N} e^{ik\theta}.$$

La convolée de cette fonction avec F_N s'écrit donc

$$\begin{aligned}
Q \overset{\text{per}}{*} F_N(\theta) &= \sum_{k=-N}^N c_k(\dot{Q}) c_k(\dot{K}_N) e^{ik\theta} \\
&= \sum_{k=-N}^0 c_{k+N}(\dot{P}) (1 + k/N) e^{ik\theta} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N k c_k(\dot{P}) e^{i(k-N)\theta} \\
&= \frac{1}{N} e^{-iN\theta} P'(\theta).
\end{aligned}$$

3. *Prouver l'inégalité*

$$\sup_{\mathbb{R}} |F_N \overset{\text{per}}{*} Q| \leq \sup_{\mathbb{R}} |P|$$

et déduire du résultat établi à la question **2** l'inégalité de Bernstein :

$$\sup_{\mathbb{R}} |P'| \leq N \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$F_N \overset{\text{per}}{*} Q(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(\tau) Q(\theta - \tau) d\tau.$$

Comme $F_N \geq 0$, on a (en prenant les valeurs absolues) :

$$\begin{aligned}
\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |F_N \overset{\text{per}}{*} Q(\theta)| &\leq \sup_{\mathbb{R}} |Q| \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(\tau) d\tau \right) \\
&= \sup_{\mathbb{R}} |Q| = \sup_{\mathbb{R}} |P|
\end{aligned}$$

puisque F_N est d'intégrale 2π sur $[0, 2\pi]$. En tenant compte du résultat établi à la question **2**, on a donc :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |P'(\theta)| = N |F_N \overset{\text{per}}{*} Q(\theta)| \leq N \sup_{\mathbb{R}} |P|,$$

d'où le résultat demandé.

PROBLEME (Fourier-Hilbert)

Soit $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tels que $\omega_k - \omega_l \notin \mathbb{Z}$ lorsque $k \neq l$ et

$$\mu = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |k - \omega_k| < +\infty.$$

On note e_k la fonction 2π -périodique $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e_k(\theta) = e^{ik\theta}$ et f_k la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} obtenue en périodisant (avec période 2π) la fonction $\theta \in [-\pi, \pi[\mapsto f_k(\theta) = e^{i\omega_k \theta}$.

1. Calculer, si $k_0 \in \mathbb{Z}$, la suite $(c_{k_0, k})_{k \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier complexes de la fonction f_{k_0} , puis la valeur de la somme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(\pi(\omega_{k_0} - k))}{\pi(\omega_{k_0} - k)} \right)^2.$$

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Que vaut

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=-N}^N c_{k_0, k} e^{ik\theta} \right) ?$$

On discutera si nécessaire suivant la valeur de θ . On a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_{k_0, k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{k_0}(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega_{k_0} - k)\theta} d\theta = \frac{\sin(\pi(\omega_{k_0} - k))}{\pi(\omega_{k_0} - k)}.$$

Compte-tenu de la formule de Plancherel (formule (2.15), remarque 2.5 du cours), on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(\pi(\omega_{k_0} - k))}{\pi(\omega_{k_0} - k)} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{k_0}(\theta)|^2 d\theta = 1.$$

La fonction f_{k_0} est une fonction C^∞ sur $] -\pi, \pi[$. Au points $-\pi$ et π , cette fonction est dérivable à gauche et à droite. D'après le théorème de Jordan-Dirichlet (Théorème 2.1 du cours et remarque 2.7), on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=-N}^N c_{k_0, k} e^{ik\theta} \right) = \frac{f_{k_0}(\theta_-) + f_{k_0}(\theta_+)}{2} = \begin{cases} e^{i\omega_{k_0} \theta} & \text{si } \theta \in] -\pi, \pi[\\ \cos(\omega_{k_0} \pi) & \text{si } \theta = \pm\pi. \end{cases}$$

2. On introduit le \mathbb{C} -espace de Hilbert $H = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ des classes \dot{h} de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodiques et telles que $|h|^2$ soit intégrable sur $[-\pi, \pi]$, le produit scalaire étant

$$\langle \dot{h}_1, \dot{h}_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_1(\theta) \overline{h_2(\theta)} d\theta,$$

et l'on note $\| \cdot \|$ la norme associée. Les $(\dot{e}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ constituent-ils une base hilbertienne de H ? Même question en ce qui concerne les $(\dot{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Le

système $(\dot{e}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H (exemples 1.4 et 1.4 revisité du cours). Par contre, le système $(\dot{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas orthogonal en général car, si $k \neq l$,

$$\langle \dot{f}_k, \dot{f}_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega_k - \omega_l)\theta} d\theta = \frac{\sin(\pi(\omega_k - \omega_l))}{\pi(\omega_k - \omega_l)} \neq 0$$

(puisque $\omega_k - \omega_l \notin \mathbb{Z}$ lorsque $k \neq l$).

3. *En utilisant le développement en série de la fonction exponentielle et l'inégalité de Minkowski pour la norme $\| \cdot \|$, vérifier, pour toute partie finie F de \mathbb{Z} , pour toute collection de nombres complexes $(\lambda_k)_{k \in F}$:*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in F} \lambda_k (\dot{e}_k - \dot{f}_k) \right\| &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k \in F} \lambda_k (1 - e^{i(\omega_k - k)\theta}) e^{ik\theta} \right|^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\pi^\ell}{\ell!} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k \in F} \lambda_k (i(\omega_k - k))^\ell e^{ik\theta} \right|^2 d\theta \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La première formule est juste une réécriture utilisant la définition de la norme $\| \cdot \|$, une fois que l'on a noté que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi[, \quad \sum_{k \in F} \lambda_k (e_k(\theta) - f_k(\theta)) = \sum_{k \in F} \lambda_k e^{ik\theta} (1 - e^{i(\omega_k - k)\theta}).$$

Pour la seconde formule, on utilise le fait que

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi[, \quad 1 - e^{i(\omega_k - k)\theta} = - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{i^\ell (\omega_k - k)^\ell \theta^\ell}{\ell!}$$

et que, par conséquent, pour tout $\theta \in [-\pi, \pi[$,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in F} \lambda_k (e_k(\theta) - f_k(\theta)) &= - \sum_{k \in F} \lambda_k e^{ik\theta} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{i^\ell \theta^\ell}{\ell!} (\omega_k - k)^\ell \right) \\ &= - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\theta^\ell}{\ell!} \left(\sum_{k \in F} \lambda_k (i(\omega_k - k))^\ell e^{ik\theta} \right) \\ &= - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\theta^\ell}{\ell!} \varphi_\ell(\theta) \end{aligned}$$

si l'on pose

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi[, \quad \varphi_\ell(\theta) = \sum_{k \in F} \lambda_k (i(\omega_k - k))^\ell e^{ik\theta}.$$

L'inégalité de Minkowski permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\cdot)^\ell}{\ell!} \varphi_\ell(\cdot) \right\| &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\| \frac{(\cdot)^\ell}{\ell!} \varphi_\ell(\cdot) \right\| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\pi^\ell}{\ell!} \|\varphi_\ell\|. \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité demandée.

4. *En utilisant la formule de Plancherel, déduire de l'inégalité établie à la question 3 que pour toute partie finie F de \mathbb{Z} , pour toute collection de nombres complexes $(\lambda_k)_{k \in F}$, on a l'inégalité :*

$$\left\| \sum_{k \in F} \lambda_k (\dot{e}_k - \dot{f}_k) \right\| \leq (e^{\mu\pi} - 1) \sqrt{\sum_{k \in F} |\lambda_k|^2}.$$

On pourra éventuellement admettre cette inégalité et continuer ainsi le problème. D'après la formule de Plancherel, on a

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \|\varphi_\ell\|^2 = \sum_{k \in F} |\lambda_k|^2 |\omega_k - k|^{2\ell} \leq \mu^{2\ell} \sum_{k \in F} |\lambda_k|^2$$

d'après la définition de μ . On a donc, en injectant ces inégalités dans l'inégalité établie à la question 3 :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in F} \lambda_k (\dot{e}_k - \dot{f}_k) \right\| &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\pi^\ell}{\ell!} \mu^\ell \sqrt{\sum_{k \in F} |\lambda_k|^2} \\ &\leq (e^{\mu\pi} - 1) \sqrt{\sum_{k \in F} |\lambda_k|^2}, \end{aligned}$$

ce qui fournit l'inégalité requise.

5. *Montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire continu T de H dans lui-même tel que $T(\dot{e}_k) = \dot{e}_k - \dot{f}_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (on construira d'abord T sur le sous-espace vectoriel engendré par les \dot{e}_k , $k \in \mathbb{Z}$, puis on expliquera comment cet opérateur se prolonge de manière unique à l'espace de Hilbert H tout entier). L'action de T sur le sous-espace vectoriel engendré par les \dot{e}_k (au sens algébrique du terme, *i.e.* l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des \dot{e}_k) est définie par*

$$T\left(\sum_{k \in F} \lambda_k \dot{e}_k\right) = \sum_{k \in F} \lambda_k (\dot{e}_k - \dot{f}_k)$$

pour toute partie finie F de \mathbb{Z} , pour toute collection de nombres complexes $(\lambda_k)_{k \in F}$. Soit maintenant $\dot{h} \in H$. On a

$$\dot{h} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=-N}^N \langle \dot{h}, \dot{e}_k \rangle \dot{e}_k \right).$$

Mais on a, pour tout $p > q > 0$,

$$\begin{aligned} & \left\| T \left(\sum_{p \leq |k| \leq q} \langle \dot{h}, \dot{e}_k \rangle \dot{e}_k \right) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{p \leq |k| \leq q} \langle \dot{h}, \dot{e}_k \rangle T(\dot{e}_k) \right\| = \left\| \sum_{p \leq |k| \leq q} \langle \dot{h}, \dot{e}_k \rangle (\dot{e}_k - \dot{f}_k) \right\| \\ &\leq (e^{\mu\pi} - 1) \sqrt{\sum_{p \leq |k| \leq q} |\langle \dot{h}, \dot{e}_k \rangle|^2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité établie à la question 5. La suite

$$\left(T \left(\sum_{k=-N}^{k=N} \langle \dot{h}, \dot{e}_k \rangle \dot{e}_k \right) \right)_{N \geq 1}$$

est donc de Cauchy dans H , donc convergente vers une limite que l'on définit comme $T(\dot{h})$. Si l'on prend une autre suite

$$\left(\sum_{k \in F_N} \langle \dot{h}, \dot{e}_k \rangle \dot{e}_k \right)_{N \geq 1}$$

convergeant aussi vers \dot{h} , on constate que la suite

$$\left(T \left(\sum_{k \in F_N} \langle \dot{h}, \dot{e}_k \rangle \dot{e}_k \right) \right)_{N \geq 1}$$

est aussi convergente vers la même limite $T(\dot{h})$, ce qui rend la définition de $T(\dot{h})$ licite. L'inégalité établie à la question 5 implique aussi

$$\|T(\dot{h})\| \leq (e^{\mu\pi} - 1) \|\dot{h}\|,$$

ce qui montre que l'application linéaire T , ainsi prolongée à H , est un opérateur continu, de norme au plus égale à $e^{\mu\pi} - 1$.

6. On suppose $\mu < (\log 2)/\pi$. Vérifier que T est un opérateur continu de norme $\|T\| = \tau$ strictement inférieure à 1, puis que $S = \text{Id}_H - T$ est

un opérateur continu inversible dont l'inverse S^{-1} est aussi continu et donné par :

$$S^{-1}(\dot{h}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n T^k(\dot{h}) \right)$$

(T^k désignant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'itéré de T un nombre k de fois, $T^0 = \text{Id}_H$). Vérifier les inégalités

$$\|S\| \leq 1 + \tau, \quad \|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tau}.$$

Si $\mu < (\ln(2))/\pi$, on a $e^{\pi\mu} < 2$, soit $e^{\pi\mu} - 1 < 1$. On a donc bien $\|T\| = \tau \leq e^{\pi\mu} - 1 < 1$. Pour tout $\dot{h} \in H$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a (par une récurrence immédiate), $\|T^k(\dot{h})\| \leq \tau^k \|\dot{h}\|$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k(\dot{h})\| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \right) \|\dot{h}\| = \frac{1}{1 - \tau} \|\dot{h}\|. \quad (\dagger)$$

Comme H est complet, la série absolument convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k(\dot{h})$$

est donc convergente dans H . L'application

$$\dot{h} \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} T^k(\dot{h}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n T^k(\dot{h}) \right)$$

définit de plus (d'après l'inégalité (\dagger) établie ci dessus) un opérateur linéaire continu

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

de norme au plus $1/(1 - \tau)$. D'autre part

$$(\text{Id}_H - T) \circ \sum_{k=0}^n T^k = \left(\sum_{k=0}^n T^k \right) \circ (\text{Id}_H - T) = \text{Id}_H - T^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\dagger\dagger)$$

Comme

$$\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} = \tau^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et que la suite géométrique $(\tau^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on obtient bien, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(\dagger\dagger)$,

$$(\text{Id}_H - T) \circ U = U \circ (\text{Id}_H - T) = \text{Id}_H,$$

ce qui montre que $S = \text{Id}_H - T$ est inversible, d'inverse $U = S^{-1}$, ce qu'il s'agissait de montrer. Comme

$$\|S(\dot{h})\| = \|\dot{h} - T(\dot{h})\| \leq \|\dot{h}\| + \|T(\dot{h})\| \leq (1 + \tau) \|\dot{h}\|,$$

on a bien sûr $\|S\| \leq 1 + \tau$.

7. On désigne par S^* l'adjoint de S . Montrer que S^* est aussi inversible et d'inverse continu et que l'on a $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$. Vérifier les inégalités

$$\|S^*\| \leq 1 + \tau, \quad \|(S^*)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tau}.$$

Comme $S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S = \text{Id}_H$, on a, en prenant les adjoints

$$(S^{-1})^* \circ S^* = S^* \circ (S^{-1})^* = \text{Id}_H^* = \text{Id}_H.$$

Ceci montre que S^* est inversible, d'inverse $(S^{-1})^*$. Comme la norme d'un opérateur est égale à celle de son adjoint (Proposition 1.14 du cours), les inégalités

$$\|S\| \leq 1 + \tau, \quad \|S^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tau}$$

établies à la question 6 impliquent aussi les inégalités

$$\|S^*\| \leq 1 + \tau, \quad \|(S^*)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tau}.$$

demandées ici.

8. On pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\dot{g}_k = (S^*)^{-1}(\dot{e}_k)$. Vérifier (en utilisant la formule d'adjonction) que l'on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall l \in \mathbb{Z}, \langle \dot{f}_k, \dot{g}_l \rangle = \langle \dot{e}_k, \dot{e}_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formule d'adjonction (formule (1.33) du cours) implique :

$$\begin{aligned} \langle \dot{f}_k, \dot{g}_l \rangle &= \langle \dot{f}_k, (S^*)^{-1}(\dot{e}_l) \rangle = \langle \dot{f}_k, (S^{-1})^*(\dot{e}_l) \rangle \\ &= \langle S^{-1}(\dot{f}_k), \dot{e}_l \rangle = \langle S^{-1}(\dot{e}_k - T(\dot{e}_k)), \dot{e}_l \rangle \\ &= \langle S^{-1}(S(\dot{e}_k)), \dot{e}_l \rangle = \langle \dot{e}_k, \dot{e}_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

9. En utilisant le fait que tout élément \dot{h} de H s'écrit $\dot{h} = S(S^{-1}(\dot{h}))$, montrer que

$$\forall \dot{h} \in H, \quad \dot{h} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \dot{h}, \dot{g}_k \rangle \dot{f}_k,$$

la série (bilatère) au second membre convergeant dans H . Vérifier que l'on a aussi, en partant cette fois de $\dot{h} = (S^*)^{-1}(S^*(\dot{h}))$,

$$\forall \dot{h} \in H, \quad \dot{h} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \dot{h}, \dot{f}_k \rangle \dot{g}_k,$$

la série (bilatère) au second membre convergeant dans H . On a, pour tout $\dot{h} \in H$,

$$S^{-1}(\dot{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^{-1}(\dot{h}), \dot{e}_k \rangle \dot{e}_k$$

(en vertu de la décomposition d'un élément dans une base hilbertienne, la convergence de la série ayant lieu dans H). On a donc, puisque S est linéaire et continu (et en invoquant la formule d'adjonction) :

$$\begin{aligned} S(S^{-1}(\dot{h})) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^{-1}(\dot{h}), \dot{e}_k \rangle S(\dot{e}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^{-1}(\dot{h}), \dot{e}_k \rangle \dot{f}_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \dot{h}, (S^{-1})^*(\dot{e}_k) \rangle \dot{f}_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \dot{h}, \dot{g}_k \rangle \dot{f}_k. \end{aligned}$$

On a de même, pour tout \dot{h} dans H :

$$S^*(\dot{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^*(\dot{h}), \dot{e}_k \rangle \dot{e}_k$$

(toujours en invoquant la décomposition d'un élément dans une base hilbertienne, la convergence de la série ayant lieu dans H). On a donc, puisque $(S^*)^{-1}$ est linéaire et continu (et en invoquant encore la formule d'adjonction) :

$$\begin{aligned} (S^*)^{-1}(S^*(\dot{h})) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle S^*(\dot{h}), \dot{e}_k \rangle (S^*)^{-1}(\dot{e}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \dot{h}, S(\dot{e}_k) \rangle \dot{g}_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \dot{h}, \dot{f}_k \rangle \dot{g}_k \end{aligned}$$