Distributions

Alain Yger

Institut de Mathématiques, Université Bordeaux 1, Talence 33405, France

E-mail address: `Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr`

Résumé. Ce cours, à l'interface des mathématiques fondamentales et appliquées, correspond à l'enseignement dispensé en 2010-2011 dans l'UE optionnelle MHT836 ≪ Distributions ≫. Les prérequis sont les cours de master d'≪ Analyse Complexe ≫ (MHT734, [**Charp**]) et d'≪ Analyse fonctionnelle ≫ (MHT733), les cours de Licence de ≪ Théorie de l'Intégration ≫ (MHT512, [**Y1**]) et d'≪ Analyse de Fourier et Espaces de Hilbert ≫ (MHT613, [**Y2**]). Les aspects géométriques (sous-variétés de $\mathbb{R}^N$, espaces de formes différentielles) sont empruntés au bagage de la Géométrie différentielle (MHT612, MHT615). La trame de l'ouvrage [**Y0**] (pour sa partie ≪ distributions ≫, Chapitre 3) a également servi à l'élaboration de ce cours. Les divers points relatifs à la théorie des distributions et figurant depuis 2011 dans le programme de l'agrégation de mathématiques ont naturellement été intégrés dans son contenu. Le cours rédigé à Lyon par Cédric Villani [**Vil**], ainsi que celui rédigé pour cette UE par Eric Amar, m'ont aussi été d'une aide précieuse. Le cours de C. Villani présente également un panorama de l'approche ≪ historique ≫ (en même temps que des approches parallèles, abouties ou non) à la théorie des distributions.

Table des matières

CHAPITRE 1

Espaces de fonctions-test et notion de distribution

Le concept de *distribution* puise ses origines dans la modélisation des phénomènes physiques (en particulier des chocs et impulsions) initiée par des physiciens tels les anglais Oliver Heaviside (1850-1925) (équations de Maxwell) puis Paul Dirac (1902-1984) dans la première moitié du XX-ième siècle. La formalisation mathématique de ce concept s'est ensuite élaborée tout au long du siècle, au travers des travaux de l'école soviétique et en particulier de Serguei Sobolev (1908-1989), ainsi que du mathématicien français Laurent Schwartz (1915-2002). Laurent Schwartz, membre du groupe Bourbaki, fut, précisément pour ses ses travaux en relation avec la théorie des distributions (on disait aussi « *fonctions généralisées* » dans l'école de Saint Petersbourg), le premier mathématicien français en 1950 à recevoir la médaille Fields[1]. La notion de *distribution*, en prise avec l'important concept mathématique de *dualité*, puis celle de *courant*, son pendant dans le contexte géométrique, seront introduites dans ce premier chapitre.

1.1. L'évaluation « ponctuelle » des fonctions mesurables

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou, plus généralement, un ouvert d'une sous-variété différentiable $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$.

Si x_0 est un point fixé dans Ω et si f est une fonction $\Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) mesurable (par rapport à la tribu de Lebesgue à la source et au but), il est clair que la notion d'« *évaluation de f au point x_0* » (*i.e.* « $f(x_0)$ ») ne saurait avoir de signification pratique. Il est en effet impossible d'appréhender avec exactitude le point x_0 car ceci présuppose connaitre dans leur totalité les développements décimaux des nombres réels x_{0j}, $j = 1, ..., n$ (coordonnées de ce point dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^N$), ce qui est en général hors de portée, car on ne peut connaitre ces développements que jusqu'à un seuil fini. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle un phénomène physique modélisable comme une « fonction » mesurable $f \ : \Omega \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est souvent pensé du point de vue mathématique, lorsqu'il est quantifiable (en termes de masse locale, d'énergie locale, *etc.*), comme un élément de l'espace $L^p_{\rm loc}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), dx)$[2] défini comme le quotient du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}^p_{\rm loc}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), dx)$

1. Pour une présentation de l'historique du concept de « fonction généralisée » qui allait devenir celui de « *distribution* » (et des rôles et influences des écoles soviétique et française), on pourra se reporter à l'article de Jean-Michel Kantor dans la Gazette des Mathématiciens [**Kant**]. Il faut noter l'influence importante des idées de Jacques Hadamard (1865-1963) dans ce long cheminement scientifique fait d'échanges croisés.

2. Dans le cas où Ω désigne un ouvert d'une sous-variété $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$, $dx = dX_{\mathcal{X}}$ est la mesure induite sur $\mathcal{X}$ par la mesure de Lebesgue usuelle sur l'espace ambiant $\mathbb{R}^N$ (correspondant à la métrique euclidienne sur cet espace, *i.e.* à la forme volume canonique $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$) ; par mesure induite $dX_{\mathcal{X}}$, on entend donc ici la mesure euclidienne définie dans l'Annexe B1 (Définition B.1.1) du cours de MHT734 [**Charp**]. La forme volume $\pm\omega_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$ correspondante est l'unique n-forme différentielle sur $\mathcal{X}$ telle qu'en tout point $x \in \mathcal{X}$, $\omega_{\mathcal{X}}(\xi_1, ..., \xi_n) = 1$ si $(\xi_1, ..., \xi_n)$

des fonctions mesurables $f\ :\Omega\to\mathbb{R}^m$ telles que

$$\int_K |f(x)|^p\,dx<\infty \quad \forall\ K \text{ compact } \subset\subset \Omega$$

par la relation d'équivalence $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f=g\ dx$ p.p. Le premier reflexe du physicien consistera à interpréter ≪ $f(x_0)$ ≫ comme

$$f(x_0)\simeq \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega f(y)\varphi_\epsilon(y-x_0)\,dy, \tag{1.1}$$

où

$$\varphi_\epsilon(x):=\frac{\chi_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1)}(x/\epsilon)}{\epsilon^n V_n},$$

$B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ désignant la boule unité de $\mathbb{R}^n$, $V_n=\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ son volume. Dans le contexte géométrique où $\mathcal{X}$ est paramétrée de manière C^∞ au voisinage de $x_0\in\Omega$ par $\theta_{x_0}\ :0\in B_{x_0}\subset\mathbb{R}^n\to\mathcal{X}$, avec $\theta_{x_0}(0)=x_0$, l'évaluation ≪ $f(x_0)$ ≫ devient (par exemple)

$$f(x_0)\simeq \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_{\theta_{x_0}(B_{x_0})} f(y)\,\chi_{B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)}(\theta_{x_0}^{-1}(y))\,dy_{\mathcal{X}}}{\int_{\theta_{x_0}(B_{x_0})} \chi_{B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)}(\theta_{x_0}^{-1}(y))\,dy_{\mathcal{X}}}, \tag{1.2}$$

$dy_{\mathcal{X}}$ correspondant à la mesure de Lebesgue euclidienne sur $\mathcal{X}$ (voir la note en bas de page précédente). Pour éviter que la discontinuité de la fonction $\chi_{B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)}$ ne crée des artefacts (ce qui est de nature à induire un biais dans le rendu de f, ce d'autant plus que f est irrégulière[3]), on préfère dans (1.1) à la fonction φ_ϵ la fonction cette fois beaucoup plus lisse

$$\psi_\epsilon : x\in\mathbb{R}^n \longmapsto \frac{1}{\epsilon^n}\,\frac{\chi_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1)}(x/\epsilon)\exp\big(-1/(1-\|x/\epsilon\|^2)\big)}{\int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1)}\exp\big(-1/(1-\|y\|^2)\big)\,dy}, \tag{1.3}$$

qui a le mérite (par rapport à la fonction φ_ϵ) d'être une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$ (de support la boule fermée $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)}$), radiale, positive et d'intégrale égale à 1 (voir Exercice 1.1). On interprète alors ≪ $f(x_0)$ ≫ comme

$$f(x_0)\simeq \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega f(y)\psi_\epsilon(y-x_0)\,dy, \tag{1.4}$$

ou, dans le contexte géométrique, comme (par exemple)

$$f(x_0)\simeq \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_{\theta_{x_0}(B_{x_0})} f(y)\,\chi_{B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)}(\theta_{x_0}^{-1}(y))\exp(-1/(1-\|\theta_{x_0}^{-1}(y)/\epsilon\|^2)\ dy_{\mathcal{X}}}{\int_{\theta_{x_0}(B_{x_0})} \chi_{B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)}(\theta_{x_0}^{-1}(y))\exp(-1/(1-\|\theta_{x_0}^{-1}(y)/\epsilon\|^2)\,dy_{\mathcal{X}}}, \tag{1.5}$$

en reprenant les notations utilisées dans (1.2).

---

est un système orthonormé direct (pour le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$) de l'espace tangent $T_x\mathcal{X}$ (à $\mathcal{X}$ au point x), une fois choisie une orientation sur $\mathcal{X}$ (il y a deux orientations possibles). Le cas $p=1$ correspond à la quantification en termes de masse, le cas $p=2$ (plus fréquent) est particulièrement important car correspondant à la quantification en termes du concept physique d'énergie. On rappelle que les espaces de Minkowski $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),dx)$ sont emboités en

$$L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),dx)\subset\cdots\subset L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),dx)\subset\cdots\subset L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),dx)\subset\cdots\subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),dx)$$

pour les $p\in[1,\infty]$.

3. Voir par exemple le problème lié au phénomène de Gibbs en analyse de Fourier, *i.e.* l'apparition de phénomènes d'*aliasing* lorsque l'on coupe ≪ brutalement ≫ les hautes fréquences d'un signal ou d'une image analogique (*cf.* cours de MHT613 [**Y2**], section 2.3.3).

Exercice 1.1. Vérifier que la fonction $\theta\ : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ définie par

$$\theta(t) = \chi_{]-1,1[}(t) \exp\Big(-\frac{1}{1-t^2}\Big)$$

est une fonction paire, positive, C^∞ sur $\mathbb{R}$, puis que la fonction $\psi_\epsilon\ : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ définie en (1.3) est une fonction radiale, positive, d'intégrale 1, de support la boule $B_{\mathbb{R}^n}(0, \epsilon)$.

1.2. Chocs, impulsions, mesures

Dans les phénomènes de *choc* ou d'*impulsion ponctuelle*, le principe physique de conservation de masse (ici supposée égale à 1, entièrement concentrée en un point $\{x_0\}$) est une contrainte majeure. Étant donnée une impulsion ponctuelle (normalisée à 1 en terme de masse), localisée en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la « fonction » δ_{x_0} censée la modéliser étant positive, de « support » $\{x_0\}$ et d'intégrale 1, il est impossible, puisque la mesure de Lebesgue de $\{x_0\}$ est égale à 0 et que la règle $0 \times \infty = 0$ prime en théorie de l'intégration, que δ_{x_0} corresponde à une fonction mesurable f. On constate donc que l'idée d'« évaluation approchée » d'une fonction mesurable $f\ : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) en un point x_0 de Ω (en la « testant », comme dans (1.1) ou (1.4), contre des fonctions φ localisées près ce point) nous invite à dépasser le cadre des fonctions. Mais plutôt que de ne retenir que les limites (lorsque ϵ tend vers 0) dans (1.1) ou (1.4) pour tous les points x_0, on enregistre l'information fournie par la liste de tous les tests $\langle f, \varphi\rangle$ lorsque φ est une fonction-test ajustée à la zone d'intérêt où vit le phénomène physique étudié f, ces fonctions-test étant assujetties à être prises au moins continues, voire même C^∞, sur le modèle des fonctions ψ_ϵ. Ce nouveau cadre (où l'on peut rendre compte des chocs et des impulsions ponctuelles) est celui de la théorie de la mesure, vue sous l'angle fonctionnel [4].

Définition 1.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou d'une sous-variété $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$. On note $\mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{K}(\Omega, \mathbb{C})$) le $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$) -espace vectoriel des fonctions continues sur Ω, à valeurs réelles (*resp.* complexes), et *à support compact dans* Ω (*i.e.* l'ensemble des points $x \in \Omega$ où $\varphi(x) \neq 0$ est relativement compact [5] dans Ω). On note $\mathcal{K}_K(\Omega, \mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{K}_K(\Omega, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues dans Ω, à valeurs réelles (*resp.* complexes) et à support compact inclus dans K. On équipe ce sous-espace de la norme uniforme $\|\varphi\|_K = \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$. On appelle *mesure de Radon réelle* (*resp.* complexe) sur Ω toute application linéaire μ de $\mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (*resp.* de $\mathcal{K}(\Omega, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$) continue au sens suivant : si $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{K}(\Omega, \mathbb{C})$) dont les supports sont, pour k assez grand, tous dans le même compact K_0, alors

$$\Big(\lim_{k\to+\infty} \|\varphi_k\|_{K_0} = 0\Big) \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \langle \mu, \varphi_k\rangle = 0.$$

Le critère quantitatif suivant permet de caractériser les mesures de Radon réelles ou complexes.

Proposition 1.1. *Une application $\mathbb{K}$-linéaire $\mu\ : \mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (*resp. *une application $\mathbb{K}$-linéaire $\mu\ : \mathcal{K}(\Omega, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$) est une mesure de Radon réelle (resp.*

4. Et non plus ensembliste, comme vous l'avez approché dans les cours de Licence, en théorie de l'intégration (MHT512) ou en probabilités (MHT601).

5. L'adhérence de cet ensemble dans Ω est appelé *support de φ relativement à Ω*.

complexe) si et seulement si, pour chaque compact $K \subset\subset \Omega$, il existe une constante positive $C(K)$ telle que

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{K}_K(\Omega, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \quad |\langle \mu, \varphi\rangle| \leq C(K)\, \|\varphi\|_K$$

Le « pont » entre les points de vue ensembliste et fonctionnel concernant la théorie de l'intégration est assuré par le théorème très important suivant.

Theorème 1.3 (Théorème de représentation de F. Riesz [**Rud**]). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ une mesure de Radon réelle sur Ω ayant la propriété de positivité suivante :*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R}), \quad \Big(\varphi(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega\Big) \Longrightarrow \langle \mu, \varphi\rangle \geq 0 \tag{1.6}$$

(on dit que μ est une mesure de Radon positive sur Ω). Il existe une tribu $\mathfrak{M}$ contenant la tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ et une unique mesure positive (notée aussi μ par souci de simplification) sur $(\Omega, \mathfrak{M})$ telle que

— *pour tout K compact $\subset\subset \Omega$, $\mu(K) < +\infty$;*
— *pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R})$, $\langle \mu, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi\, d\mu$;*
— *pour tout $E \in \mathfrak{M}$, on ait*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U)\, ;\, U \text{ ouvert},\ E \subset U\}\ ;$$

— *pour tout $E \in \mathfrak{M}$ tel que $\mu(E) < +\infty$, on ait*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K)\, ;\, K \text{ compact},\ K \subset\subset E\}.$$

Inversement, si $\mu\ : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, \infty]$ est une mesure positive telle que $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset\subset \Omega$,

$$\varphi \in \mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R}) \longmapsto \langle \mu, \varphi\rangle := \int_K \varphi\, d\mu$$

définit une mesure de Radon positive sur Ω.

Remarque 1.4. Ce qu'implique le théorème de représentation de F. Riesz est que, si K est un compact de Ω, le $\mathbb{R}$-espace $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ des différences de deux mesures positives sur la tribu borélienne et de masse finie sur les compacts [6] s'identifie au dual du $\mathbb{R}$-espace de Banach $(C(K, \mathbb{R}), \|\ \|_K)$ des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{C}$-espace $\mathcal{M}(K, \mathbb{C})$ des combinaisons complexes $\mu^+ - \mu^- + i\,(\nu^+ - \nu^-)$ de quatre telles mesures positives s'identifie, lui, au dual du $\mathbb{C}$-espace de Banach $(C(K, \mathbb{C}), \|\ \|_K)$. Une mesure de Radon réelle (*resp.* une mesure de Radon complexe) est la différence $\mu^+ - \mu^-$ (*resp.* la combinaison linéaire $\mu^+ - \mu^- + i\,(\nu^+ - \nu^-)$) de deux (*resp.* quatre) mesures positives sur la tribu borélienne de masse finie sur tout compact. L'espace $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ des combinaisons $\mu^+ - \mu^-$ de mesures de Borel sur Ω telles que $\mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) < +\infty$ s'identifie au dual de l'espace de Banach $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'infini dans Ω (considéré dans $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$), équipé de la norme uniforme. L'espace $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{C})$ des combinaisons $\mu^+ - \mu^- + i\,(\nu^+ - \nu^-)$ de mesures de Borel sur Ω telles que la « masse totale » $\mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) + \nu^+(\Omega) + \nu^-(\Omega)$ soit finie s'identifie au dual de l'espace de Banach $C_0(\Omega, \mathbb{C})$ des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{C}$ tendant vers 0 à l'infini dans Ω, équipé de la norme uniforme.

6. Pour une telle mesure positive, il se trouve que la propriété de régularité, correspondant aux items 3 et 4 dans la proposition, est automatiquement vérifiée.

DÉMONSTRATION. On admettra ici ce théorème en indiquant juste une trame de preuve. C'est la partie directe qui est la plus difficile (le volet réciproque énoncé en fin de théorème étant immédiat). Pour construire la tribu $\mathfrak{M}$, voici comment procéder. Le principe est calqué sur celui guidant la construction des mesures extérieure et intérieure dans le schéma ensembliste (schéma de construction inspiré du théorème de Carathéodory, voir par exemple [**Marc**], chapitre 12, Section III.1). Pour tout ouvert $U \subset \Omega$, on pose d'abord

$$\mu(U) := \sup\{\langle \mu, \varphi\rangle \,;\, \varphi \in \mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R})\,,\ \mathrm{Supp}\,\varphi \subset U\}.$$

On définit ensuite la mesure extérieure $\mu^*(E)$ d'une partie E de Ω en posant

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu(U)\,;\, U \text{ ouvert},\ E \subset U\}.$$

La tribu $\mathfrak{M}$ est alors définie comme la famille des parties E de Ω telles que, pour tout compact $K \subset\subset \Omega$,

$$\mu^*(E \cap K) = \sup\{\mu^*(K')\,;\, K' \text{ compact},\ K' \subset\subset E \cap K\}.$$

Il reste à vérifier que $\mathfrak{M}$ est une tribu, contenant la tribu borélienne, et que la restriction $\mu^*_{|\mathfrak{M}}$ de μ^* à $\mathfrak{M}$ est bien une mesure positive (au sens ensembliste) sur cette tribu. □

1.3. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ et la « souplesse » du cadre C^∞

Les êtres qui ont été introduits dans le cours d'Analyse Complexe (MHT734) partagent tous en commun une extrême « rigidité » : polynômes, fonctions holomorphes, fonctions harmoniques,... Le principe des zéros isolés, le principe du prolongement analytique, le principe du maximum, *etc.*, sont autant d'indicateurs de cette rigidité [7].

À l'opposé, le fait que l'on puisse construire dans $\mathbb{R}^n$ des fonctions C^∞ à support compact de support arbitrairement petit localisées n'importe où (sur le modèle de la fonction $x \mapsto \psi_\epsilon(x - x_0)$, où ψ_ϵ est définie en (1.4) lorsque $\epsilon > 0$ est arbitrairement petit et x_0 est un point quelconque de $\mathbb{R}^n$), implique une extrême souplesse du cadre C^∞, souplesse dont on n'aura de cesse de profiter tout au long de ce cours. Puisque le leitmotiv de ce cours sera de tester les phénomènes irréguliers contre des êtres aussi réguliers que possible, le fait de disposer de pareille souplesse sera pour nous essentiel.

Le lemme de partition de l'unité a été vu dans le cours d'Analyse complexe [**Charp**], section IV.2. Nous le reformulons ici (dans un cadre un peu plus géométrique) et en rappelons sa preuve.

LEMME 1.5 (partitionnement de l'unité). *Soit Ω un ouvert d'une sous-variété $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension n et $(\Omega_\iota)_\iota$ une collection d'ouverts de cette sous-variété telle que*

$$\Omega \subset \bigcup_\iota \Omega_\iota. \tag{1.7}$$

Il existe une famille dénombrable $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions C^∞ à support compact [8] dans Ω, à valeurs dans $[0,1]$, telle que :

7. Le *principe de moindre action* soutend le fait que les transformations de nature physique soient souvent modélisables par de tels êtres mathématiques.

8. Dire qu'une fonction ψ définie au voisinage d'un point x_0 d'une sous-variété $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$ est C^∞ au voisinage de ce point signifie que la fonction $\psi \circ \theta_{x_0}$, où θ_{x_0} : $(t_1, ..., t_n) \in$

— *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe un indice* $\iota(k)$ *tel que* $\operatorname{Supp}\psi_k \subset \Omega_{\iota(k)}$;
— *pour tout compact* $K \subset\subset \Omega$, *l'ensemble* $\{k \in \mathbb{N}\,; \operatorname{Supp}\psi_k \cap K \neq \emptyset\}$ *est fini et l'on a*

$$\forall\, x \in \Omega,\ \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k(x) = 1. \tag{1.8}$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in \Omega$ (au voisinage duquel la sous-variété $\mathcal{X}$ est paramétrée par $(t_1, ..., t_n) \in B_x \mapsto \theta_x(t)$, B_x étant une boule n-dimensionnelle de rayon $r(x)$ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, avec $\theta_x(0) = x$), il existe (du fait de (1.7)) un indice ι_x et un rayon $\rho(x) \in]0, 1[$ tel que, pour tout $\rho < \rho(x)$, $\theta_x(\rho B_x) \subset \Omega_{\iota_x}$. On dispose d'autre part d'une exhaustion de Ω par des compacts K_l de Ω (*i.e.* des fermés bornés de Ω), $l \in \mathbb{N}$ (il suffit par exemple de choisir $K_l = \Omega \cap \overline{B_{\mathbb{R}^N}(0, l+1)}$, $l = 0, 1, ...$). On a, avec cette exhaustion,

$$\Omega = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} K_l$$

avec $K_l \subset K^\circ_{l+1}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Pour tout $l \in \mathbb{Z}$ avec $l \geq -1$, on introduit l'ouvert

$$V_l = K^\circ_{l+2} \setminus K_{l-1}$$

avec la convention que $K_l = \emptyset$ si $l < 0$, ainsi que le compact $C_l = K_{l+1} \setminus K^\circ_l$. On note que, pour tout $l \geq -1$, V_l est un voisinage ouvert du compact C_l. Chaque compact C_l (pour $l \geq -1$) peut donc être recouvert (propriété du recouvrement fini) par un nombre fini d'ensembles de la forme $\theta_{x_{l,j}}(\rho_{l,j} B_{x_{l,j}})$ avec $\rho_{l,j} < \rho(x_{l,j})$, tels que, pour chaque l, j, $\theta_{x_{l,j}}(\rho_{l,j} B_{x_{l,j}}) \subset V_l$. Comme chaque compact de Ω ne rencontre qu'au plus un nombre fini d'ouverts V_l, $l \geq -1$, la collection de tous les ouverts $\theta_{x_{l,j}}(\rho_{l,j} B_{x_{l,j}})$ ainsi introduits est une famille dénombrable. À chacun de ces ouverts de $\mathcal{X}$ ainsi indexés par l et j (par exemple $U_x = \theta_x(\rho B_x)$), on associe une fonction C^∞ dans Ω et à support compact dans $\overline{U}_x$, à savoir la fonction

$$\varphi_x\ : y \in \Omega \mapsto \chi_{U_x}(y)\, \psi_{\rho r(x)}(\theta_x^{-1}(y)),$$

où la fonction ψ_ϵ, pour $\epsilon > 0$, est définie en (1.4). On dispose ainsi d'une collection dénombrable $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions C^∞ à support compact dans Ω, telle que tout compact ne puisse rencontrer qu'un nombre fini de supports de telles fonctions φ_k (puisqu'un compact ne rencontre qu'au plus un nombre fini d'ouverts V_l). Il ne reste plus qu'à poser

$$\psi_k(x) := \frac{\varphi_k(x)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(x)}$$

(on note que la somme au dénominateur est finie pour x fixé et ne s'annule jamais). On réalise ainsi la partition de l'unité demandée. □

Un corollaire important de ce lemme est celui assurant l'existence de « fonctions plateau » subordonnées à un compact K donné, dans un ouvert Ω précisé.

COROLLAIRE 1.6. *Soit* $K \subset\subset \Omega$ *un compact et un ouvert d'une sous-variété* $\mathcal{X}$ *de dimension* n *de* $\mathbb{R}^N$. *Il existe une fonction* $\varphi \in C^\infty(\Omega, [0, 1])$, *à support compact inclus dans* Ω, *identiquement égale à* 1 *dans un voisinage ouvert de* K *dans* Ω.

$B_{x_0} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \theta_{x_0}(t)$ est un paramétrage C^∞ de $\mathcal{X}$ au voisinage de x_0, est C^∞ dans l'ouvert $B_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ homéomorphe à un voisinage $x_0 \in U_{x_0} \subset \Omega$ (U_{x_0} est dit « ouvert de carte ») *via* θ_{x_0}.

DÉMONSTRATION. On choisit ϵ tel que, pour tout point x_0 du compact K, $B_{\mathbb{R}^N}(x_0, 2\epsilon) \cap \mathcal{X} \subset \Omega$. On recouvre alors Ω avec les deux ouverts

$$\Omega_1 = \bigcup_{x \in K} (B_{\mathbb{R}^N}(x,\epsilon) \cap \mathcal{X}) \qquad \Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\bigcup_{x \in K} (B_{\mathbb{R}^N}(x,\epsilon) \cap \mathcal{X})}.$$

On introduit la partition $(\psi_k)_k$ de l'unité attachée à ce recouvrement de Ω par le lemme 1.5 (on en adopte les notations). On pose

$$\varphi(x) := \sum_{\{k\,;\,\iota(k)=0\}} \psi_k(x)$$

(on note que cette somme est bien définie car, pour chaque x, il y a au plus un nombre fini de $\psi_k(x)$ non nuls). La fonction φ ainsi construite convient. □

EXERCICE 1.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ une application R-linéaire de $\mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, positive au sens suivant :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{K}(\Omega,\mathbb{R}), \quad \Big(\varphi(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega\Big) \Longrightarrow \langle \mu, \varphi \rangle \geq 0.$$

Alors μ est une mesure de Radon positive.

EXERCICE 1.8. Montrer (en utilisant le corollaire 1.6) qu'il existe une fonction $\varphi \ : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$, de support inclus dans $[-1/3, 4/3]$, identiquement égale à 1 sur $[1/3, 2/3]$ et telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t-k) = 1.$$

EXERCICE 1.9. Soit A un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ et $\epsilon > 0$. Pour tout $\eta > 0$, on note A_η le compact

$$A_\eta := \bigcup_{x \in A} \overline{B(x,\eta)}.$$

Si ψ_η est la fonction définie en (1.4), montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction

$$\psi_{\epsilon/3} * \chi_{A_{2\epsilon/3}} \ : x \mapsto \int_{A_{2\epsilon/3}} \psi_{\epsilon/3}(x-y)\, dy$$

est identiquement égale à 1 sur $A_{\epsilon/3}$ et de support inclus dans A_ϵ. Déduire de cette construction l'existence d'une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions de classe C^∞ à support compact, telles que $\mathrm{Supp}\, \varphi_k \subset A_{1/k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que φ_k vaille identiquement 1 au voisinage de A, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout multi-indice $(l_1, ..., l_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \Big| \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x^{l_j}} \Big)[\varphi_k] \Big) \Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial y^{l_j}} \Big)[\psi_1] \Big)(y) \Big|\, dy \times (3k)^{l_1 + \cdots + l_n}.$$

Le lemme 1.5 de partitionnement de l'unité induit la construction de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espaces de fonctions suffisamment riches pour être considérés comme *espaces de fonctions-test*; ce sera « contre » cet éventail d'objets test que nous seront amenés à « tester » les phénomènes physiques T, ce qui nous conduira naturellement à la possibilité d'élargir le champ des phénomènes représentables par un élément de $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), dx)$ (les « fonctions ») ou par une mesure de Radon réelle ou complexe (les « mesures »).

Définition 1.10 (fonctions-test). Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et Ω un ouvert d'une sous variété différentiable $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$. Le $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ des fonctions-test [9] à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact dans Ω. Si $K \subset\subset \Omega$ est un compact précisé de Ω, on note

$$\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})\,;\, \operatorname{Supp}\varphi \subset K\}.$$

On a donc $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}) = \bigcup_{K\subset\subset\Omega} \mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K})$.

Étant donné un compact K de Ω, il est utile d'introduire sur chaque $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K})$ une collection dénombrable de semi-normes [10] (sur $\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K})$, il s'agit en fait de normes car $N_{K,0} = \|\ \|_K \leq N_{K,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$). Pour simplifier, on se place dans un premier temps dans le cadre d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et l'on pose, pour tout $K \subset\subset \Omega$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$N_{K,p}(\varphi) := \sup_{\substack{l\in\mathbb{N}^n \\ l_1+\cdots+l_n\leq p}} \sup_{x\in K} \Big|\Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x^{l_j}}\Big)[\varphi](x)\Big|. \tag{1.9}$$

Lorsque Ω est un ouvert d'une sous-variété $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$, la situation est plus délicate à cause du fait que l'on ne puisse donner de sens (autrement qu'en utilisant des cartes locales) aux fonctions dérivées partielles

$$x \mapsto \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x^{l_j}}\Big)[\varphi](x)$$

lorsque $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K})$. Pour pallier à ce problème, on introduit un recouvrement $\mathcal{R}_K$ de K par un nombre fini de cartes locales $(B_{x_\iota}, \theta_{x_\iota}(B_{x_\iota}))$, où B_{x_ι} est une boule de centre l'origine et de rayon $r_{x_\iota} > 0$ dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\theta_{x_\iota} \;:\, (t_1, ..., t_n) \in B_{x_\iota} \mapsto \theta_{x_\iota}(t) \in \Omega \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$$

est une application C^∞ telle que $\theta_{x_\iota}(0) = x_\iota$ réalisant un homéomorphisme entre B_{x_ι} et son image (la carte locale U_{x_ι} correspondante) ; on pose alors

$$N_{K,p,\mathcal{R}_K}(\varphi) := \sup_\iota \Big[\sup_{\substack{l\in\mathbb{N}^n \\ l_1+\cdots+l_n\leq p}} \sup_{t\in B_{x_\iota}} \Big|\Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial t^{l_j}}\Big)[\varphi\circ\theta_{x_\iota}](t)\Big|\Big] < +\infty \tag{1.10}$$

(c'est le fait que $\operatorname{Supp}\varphi \subset K$ et que K soit compact qui impose au second membre d'être fini). Cette définition (1.10) dépend évidemment du choix des cartes locales $(B_{x_\iota}, \theta_{x_\iota}(B_{x_\iota}))$ utilisées pour recouvrir K, mais il est aisé de constater (en utilisant les changements de carte et la règle de Leibniz) que deux semi-normes ainsi définies (pour K et p fixés) à partir de deux recouvrements différents $\mathcal{R}_K$ et $\widetilde{\mathcal{R}}_K$ de K sont équivalentes en temps que semi-normes [11]. Le choix du recouvrement étant indifférent (rapport à l'équivalence des semi-normes), on ne le fait plus apparaitre par la suite.

---

9. Cette terminologie ≪ fonction-test ≫ vient du fait que ce sera contre ces êtres que seront ≪ testées ≫ ultérieurement les distributions (*via* le crochet de dualité $\langle\ ,\ \rangle$).

10. On rappelle qu'une semi-norme N sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $N\ :\ E \to [0, \infty[$ telle que $N(\lambda\varphi) = |\lambda| N(\varphi)$ et $N(\varphi_1 + \varphi_2) \leq N(\varphi_1) + N(\varphi_2)$ pour tout $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

11. Deux semi-normes N_1 et N_2 sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dites équivalentes si et seulement si il existe deux constantes strictement positives κ_1 et κ_2 telles que $\kappa_1 N_1 \leq N_2 \leq \kappa_2 N_1$.

Chaque $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$, $K \subset\subset \Omega$ hérite d'une topologie ainsi définie. Comme $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, se donner une topologie sur cet espace revient à se donner un système fondamental $\mathcal{V}_{\mathbb{K},K}(0)$ de voisinages de la fonction identiquement nulle ; un système fondamental de voisinages $\mathcal{V}_{\mathbb{K},K}(\varphi_0)$ de $\varphi_0 \in \mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ s'en déduit par translation (de φ_0). Les ouverts pour la topologie sont les sous-ensembles $U \subset \mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ tels que

$$\forall\, \varphi_0 \in U,\ \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K},K}(\varphi_0),\ \varphi_0 \in V \subset U.$$

On pose ici

$$\mathcal{V}_{\mathbb{K},K}(0) := \Big\{\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})\,;\, N_{K,p}(\varphi) < \epsilon\},\ p \in \mathbb{N}\,,\ \epsilon > 0\Big\}. \tag{1.11}$$

Équipé de cette topologie (définie par une famille dénombrable de semi-normes, ici en fait de normes), $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ est un espace métrisable : on peut par exemple choisir comme distance

$$\delta_K(\varphi,\psi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{N_{K,p}(\varphi-\psi)}{1+N_{K,p}(\varphi-\psi)}\,. \tag{1.12}$$

De plus (voir l'Exercice 1.12), il s'agit d'un espace métrique complet. Un tel $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique dont la topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes et qui est de plus métrisable complet est dit *espace de Fréchet.*

Puisque chaque $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$, $K \subset\subset \Omega$, est équipé d'une topologie, il reste à équiper d'une topologie le $\mathbb{K}$-espace vectoriel union

$$\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K}) = \bigcup_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K}).$$

La topologie que l'on définit est dite *topologie limite inductive* sur l'union des topologies définies sur chacun des sous-espaces $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$. Nous ne définirons pas ici cette topologie [12], mais nous contenterons de « faire comme si » elle était métrisable (ce n'est malheureusement pas le cas, nous l'admettrons ici, voir l'exercice 1.12 plus loin) et non nous contenterons, aux fins de l'exploiter, d'énoncer un « principe de convergence des suites » dans $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$. Ce principe est le suivant :

DÉFINITION 1.11 (principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou d'une sous-variété différentiable $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ est dite *converger vers la fonction nulle dans* $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ si et seulement si :

— il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que toutes les fonctions φ_k pour $k \geq k_0$ ont leur support inclus dans un même compact $K_0 \subset\subset \Omega$;

12. On se contente d'indiquer qu'il s'agit de la plus fine (*i.e* celle pour laquelle la collection d'ouverts est la plus riche) pour laquelle toutes les injections $\iota_K\ : \mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K}) \to \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ sont continues. Pour plus de détails concernant cette topologie (et en particulier le pourquoi du principe de convergence des suites), on pourra se reporter à la section 5.2 du cours de C. Villani [**Vil**], Théorème III.16. Une des propriétés essentielles du $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ est que toute partie bornée de cet espace (*i.e* incluse, à homothétie près, dans n'importe quel voisinage de la fonction identiquement nulle) doit nécessairement être incluse dans un $\mathbb{R}$-sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ pour un certain compact K de Ω ; ainsi en particulier, toute suite de Cauchy de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ doit avoir tous ses termes dans un même $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$; tous ces sous-espaces étant complets (voir l'exercice 1.12), il en est de même de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$.

— la suite $(\varphi_k)_{k\geq k_0}$, considérée comme une suite d'éléments de $\mathcal{D}_{K_0}(\Omega,\mathbb{K})$, converge vers la fonction nulle dans cet espace, *i.e*

$$\forall\, p\in\mathbb{N},\quad \lim_{k\to\infty} N_{K_0,p}(\varphi_k)=0. \tag{1.13}$$

Exercice 1.12 (pourquoi $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ ne saurait être métrisable). En utilisant le principe de convergence des suites de la Définition 1.11, montrer que $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ est un espace topologique complet (toute suite de Cauchy est convergente). Montrer que si K est un compact de Ω, $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace fermé de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$. En approchant tout élément $\varphi\in\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ dans $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ par la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, où $\varphi_k=\varphi+\psi/k$, $\psi\in\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})\setminus\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$, montrer que $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$. En utilisant enfin le fait qu'un espace métrique complet possède la *propriété de Baire* (l'union d'une famille dénombrable de fermés sans point intérieur est sans point intérieur), conclure que $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ ne saurait être muni d'une métrique compatible avec la topologie dont on l'a équipé.

1.4. Distributions dans $\Omega\subset\mathbb{R}^n$: définition, critère, premiers exemples

Dans cette section, on se restreint au cadre où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Comme précédemment, dans toute cette section, le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.13 (notion de distribution). On appelle *distribution sur Ω, à valeurs dans* $\mathbb{K}$ toute application $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi\mapsto\langle T,\varphi\rangle$ [13] de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, telle que, si $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ est une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ tendant vers la fonction nulle au sens du principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ (Définition 1.11), on a

$$\lim_{k\to+\infty}\langle T,\varphi_k\rangle=0.$$

Dire qu'une application $\mathbb{K}$-linéaire $T\ :\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ est une distribution sur Ω revient à dire que sa restriction $T_{|\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})}$ à tout sous-espace $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$, $K\subset\subset\Omega$, est une application $\mathbb{K}$-linéaire continue de $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, la topologie du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ ayant été définie par la donnée du système fondamental $\mathcal{V}_{\mathbb{K},K}(0)$ (voir (1.11) dans la section précédente). On peut donc énoncer le critère quantitatif suivant caractérisant le fait qu'une application $\mathbb{K}$-linéaire de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ soit une distribution.

Proposition 1.2 (critère quantitatif caractérisant les distributions). *Soit T : $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. Dire que T est une distribution équivaut à dire que, pour tout compact K de Ω, il existe un entier $p(K)\in\mathbb{N}$ et une constante positive $C(K)$ telles que*

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K}),\ \ |\langle T,\varphi\rangle|\leq C(K)\,N_{K,p(K)}(\varphi). \tag{1.14}$$

Démonstration. Soit T une application $\mathbb{K}$-linéaire sur le $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$. Si T est continue sur $\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})$ (K étant un compact de Ω), l'image réciproque par $T_{|\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K})}$ de la boule unité de $\mathbb{K}$ (pour la valeur absolue usuelle) est un voisinage ouvert de 0, donc contient un sous-ensemble appartenant à $\mathcal{V}_{\mathbb{K},K}(0)$. D'après (1.11), il existe donc $\epsilon>0$ et $p(K)\in\mathbb{N}$ tels que

$$\Big(N_{K,p(K)}(\varphi)<\epsilon\Big)\Longrightarrow\Big(|\langle T,\varphi\rangle|<1\Big)\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{K}).$$

13. On convient d'utiliser dans la notation le *crochet de dualité* car le principe mathématique de *dualité* est le principe clef en théorie des distributions.

Ceci implique (1.14) en prenant $C(K) = 1/\epsilon(K)$. Réciproquement, si une condition du type (1.14) est remplie pour chaque K, la restriction de T à $\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K})$ est bien continue (pour la topologie définie à la section précédente sur $\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K})$) pour chaque compact K de Ω et T est donc une distribution. □

Exercice 1.14. Soient $1/2 < \alpha < \beta < 1$ et $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction plateau identiquement égale à 1 au voisinage de $[0,1]$, avec $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset]1/2, 1[$. Soit $T : \mathcal{D}(]0,\infty[, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la distribution réelle sur $]0,\infty[$ définie par

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(]0,\infty[, \mathbb{R}),\ \langle T, \varphi\rangle := \int_{]0,\infty[} \exp(1/t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Si $\varphi_k : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(kt)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, vérifier que l'on a $\langle T, \varphi_k\rangle \geq (\beta - \alpha) \exp(k/\beta)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la Proposition 1.2 qu'il ne peut exister de distribution réelle $\widetilde{T}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{T}_{|]0,\infty[} = T$, *i.e*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(]0,\infty[, \mathbb{R}), \quad \langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Le critère donné par la Proposition 1.2 s'accompagne d'une définition, celle de la notion d'*ordre* d'une distribution sur un ouvert Ω.

Définition 1.15. Soit T une distribution à valeurs réelles ou complexes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}$. On dit que la distribution T est d'ordre fini, inférieur ou égal à p sur Ω, si l'entier $p(K)$ dans (1.14) peut, pour chaque compact $K \subset\subset \Omega$, être pris inférieur ou égal à p. Dans ce cas, le plus petit entier naturel ayant cette propriété est appelé *ordre de la distribution T sur l'ouvert Ω*.

Exercice 1.16. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par

$$T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{d^k}{dt^k}[\varphi](k).$$

Montrer que T est une distribution réelle sur $\mathbb{R}$. Est-elle d'ordre fini ? Même question pour l'application T_p $(p \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$T_p : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{d^p}{dt^p}[\varphi](k).$$

Exercice 1.17. Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que l'on ait $|c_k| = O(|k|^p)$ pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$ lorsque $|k|$ tend vers l'infini. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 2\pi[, \mathbb{R})$. Déduire de la formule de Plancherel l'existence de la limite, lorsque $N \to +\infty$

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{N \to +\infty} \int_{]0,2\pi[} \varphi(\theta) \Big(\sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ik\theta} \Big)\, d\theta$$

et prouver l'existence d'une constante C telle que $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C N_{[0,2\pi],p+2}(\varphi)$. En utilisant le lemme de partition de l'unité (Lemme 1.5, adapter par exemple la construction de l'exercice 1.8), montrer que l'on définit une distribution complexe T d'ordre au plus $p+2$ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ \langle T, \varphi\rangle := \lim_{N \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \Big(\sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ikt} \Big)\, dt.$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des distributions à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sur l'ouvert Ω sera noté par la suite $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$.

Si $\Omega' \subset \Omega$ et si T est une distribution (réelle ou complexe) dans Ω, on définit la *restriction* de T à l'ouvert Ω' comme l'application $\mathbb{K}$-linéaire :

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega', \mathbb{K}) \subset \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}) \longmapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{K}.$$

C'est le fait que tout élément de $\mathcal{D}(\Omega', \mathbb{K})$ puisse être (une fois prolongé par 0 sur $\Omega \setminus \Omega'$) considéré comme un élément de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ qui justifie cette opération de restriction.

1.4.1. Les classes de fonctions localement intégrables s'interprètent comme des distributions. Soit $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{K},\mathrm{loc}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), dx)$ une classe de fonction localement intégrable (à valeurs dans $\mathbb{K}$) sur Ω (par rapport à la mesure de Lebesgue dx sur la tribu de Lebesgue). L'application

$$T_{\dot{f}} \ : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}) \to \int_\Omega f(y)\, \varphi(y)\, d\mu(y)$$

est une distribution (à valeurs dans $\mathbb{K}$) d'ordre $p = 0$ sur Ω, puisque l'on a, pour tout compact $K \subset\subset \Omega$,

$$\Big| \int_\Omega f(y)\varphi(y)\, dy \Big| \leq N_{K,0}(\varphi) \times \int_K |f(y)|\, dy$$

et que le représentant f de $\dot{f}$ est intégrable sur K puisque localement intégrable sur Ω. Par souci de commodité, la distribution $T_{\dot{f}}$ est notée $\dot{f}$ ou f (mais il faut se souvenir que $\dot{f}$ ou son représentant f sont ici interprétés au sens des distributions).

Exemple 1.18. La classe de la fonction d'Heaviside $H \ : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ définit l'une des distributions les plus importantes sur la droite réelle. Cette classe de fonction $\dot{H}$ (avec la « fonction » de Dirac, qui d'ailleurs est une mesure et non une fonction, voir l'exemple 1.19) constitue un des modèles de référence.

1.4.2. Les mesures de Radon (réelles ou complexes) sur Ω s'interprètent comme des distributions. Si $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est une mesure de Radon réelle sur Ω (s'exprimant donc, d'après le théorème 1.3 de représentation de F. Riesz, comme différence de deux mesures positives régulières et de masse finie sur tout compact), on peut associer à μ la distribution réelle T_μ sur Ω définie par

$$\begin{aligned}\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}), \quad \langle T_\mu, \varphi \rangle := \langle \mu, \varphi \rangle &= \int_\Omega \varphi(y)\, d\mu(y) \\ &= \int_\Omega \varphi(y)\, d\mu^+(y) - \int_\Omega \varphi(y)\, d\mu^-(y).\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{R}) \subset \mathcal{K}_K(\Omega, \mathbb{R})$ pour tout compact $K \subset\subset \Omega$, on a bien, étant donné un tel compact K, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{R})$, l'inégalité

$$|\langle T_\mu, \varphi \rangle| \leq \|\mu\|_{\mathcal{K}^*_K(\Omega,\mathbb{R})}\, N_{K,0}(\varphi) = (\mu^+(K) + \mu^-(K))\, N_{K,0}(\varphi)$$

et la distribution réelle T_μ ainsi associée à la mesure de Radon réelle μ est une distribution réelle d'ordre 0 sur Ω. Par souci de commodité, la distribution T_μ est notée μ (mais il faut se souvenir que μ est ici interprétée non comme une application $\mathbb{K}$-linéaire continue sur $\mathcal{K}(\Omega, \mathbb{R})$, mais au sens des distributions, c'est-à-dire comme une forme linéaire continue cette fois sur le sous-espace $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, avec la nouvelle topologie dont on vient de l'équiper).

Exemple 1.19. L'exemple de distribution-mesure le plus célèbre, à la genèse même de l'invention du concept de distribution, est celui de la distribution δ_{x_0} introduite par le physicien Paul Dirac au début du XX-ième siècle :

$$\delta_{x_0} : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) \mapsto \varphi(x_0), \quad x_0 \in \Omega.$$

Si $\varpi = \mu^+ - \mu^- + i(\nu^+ - \nu^-)$ est une mesure de Radon complexe sur Ω (s'exprimant donc comme indiqué, d'après le théorème 1.3 de représentation de F. Riesz, comme combinaison linéaire complexe de quatre mesures positives régulières et de masse finie sur tout compact), on peut associer à ϖ la distribution complexe T_ϖ sur Ω définie par

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}), \quad \langle T_\varpi, \varphi \rangle &:= \langle \varpi, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi(y)\, d\varpi(y) \\ &= \int_\Omega \varphi(y)\, d\mu^+(y) - \int_\Omega \varphi(y)\, d\mu^-(y) + i\Big(\int_\Omega \varphi(y) d\nu^+(y) - \int_\Omega \varphi(y)\, d\nu^-(y)\Big).\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{C}) \subset \mathcal{K}_K(\Omega, \mathbb{C})$ pour tout compact $K \subset\subset \Omega$, on a bien, étant donné un tel compact K, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{C})$, l'inégalité

$$|\langle T_\varpi, \varphi \rangle| \leq \|\varpi\|_{\mathcal{K}^*_K(\Omega,\mathbb{C})}\, N_{K,0}(\varphi) = (\mu^+(K) + \mu^-(K) + \nu^+(K) + \nu^-(K))\, N_{K,0}(\varphi)$$

et la distribution complexe T_ϖ ainsi associée à la mesure de Radon complexe ϖ est une distribution complexe d'ordre 0 sur Ω. Comme dans le cas réel, on note T_ϖ sous la forme ϖ avec les mêmes précautions d'usage que précédemment.

Remarque 1.20. Les distributions-mesure dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ sont d'ordre 0 dans cet ouvert. Réciproquement, étant donné un compact K de Ω, on peut, si T est une distribution d'ordre 0 dans Ω, définir une action de T sur $\mathcal{K}_K(\Omega, \mathbb{K})$ qui prolonge la restriction de T à $\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K})$. Il suffit d'introduire un voisinage compact K' de K et d'utiliser le fait que tout élément de $\mathcal{K}_K(\Omega, \mathbb{K})$ s'approche uniformément sur tout compact de Ω, donc en particulier K', par une suite d'éléments $(\varphi_k)_k$ de $\mathcal{D}_{K'}(\Omega, K)$ [14]. La suite $(\langle T, \varphi_k \rangle)_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ si T est d'ordre 0 et converge donc vers un élément du corps complet $\mathbb{K}$. Après avoir prouvé l'indépendance de cet élément vis a vis du choix de la suite approximante $(\varphi_k)_k$, on définit ainsi $\langle T, \varphi \rangle$ comme cet élément, ce qui permet de prolonger T à $\mathcal{K}_K(\Omega, \mathbb{K})$ en une application $\mathbb{K}$-linéaire continue (pour la norme uniforme $\|\ \|_K$ sur cet espace). La distribution T est ainsi prolongée en une mesure de Radon. *Les distributions d'ordre* 0 *dans un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *sont donc exactement les distributions-mesure dans cet ouvert.*

1.4.3. La distribution $\mathrm{VP}[1/x]$ **sur** $\mathbb{R}$ **et les distributions afférentes.** La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 1/x$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle ne l'est pas au voisinage de $x = 0$ si l'on invoque le critère de Riemann). Il est donc impossible de donner un sens (même le sens distribution) à $x \mapsto 1/x$. Nous pouvons cependant contourner ce problème et définir une distribution sur $\mathbb{R}$, que nous noterons $\mathrm{VP}[\frac{1}{x}]$. La formule de Taylor avec reste intégral (écrite à l'ordre 0 au voisinage de 0) nous assure que, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \int_{[0,1]} \varphi'(\tau x)\, d\tau = \varphi(0) + x\theta_1[\varphi](x),$$

14. Par exemple $\varphi * \psi_{1/k} \to \varphi$, voir le cours de MHT512, Section 4.7.

où la fonction $\theta[\varphi]$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ du fait du théorème élémentaire des intégrales dépendant d'un paramètre. On remarque que, pour tout $\epsilon > 0$, l'intégrale « équilibrée » $\int_{|x|>\epsilon} \varphi(y)/y\, dy$ s'ecrit, si $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subset [-R, R]$,

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy = \int_{R>|x|>\epsilon} \varphi(0)\, \frac{dy}{y} + \int_{R>|y|>\epsilon} \theta_1[\varphi](y)\, dy = \int_{R>|y|>\epsilon} \theta_1[\varphi](y)\, dy$$

et converge donc, lorsque ϵ tend vers 0, vers

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{R>|y|>\epsilon} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy = \int_{[-R,R]} \theta_1[\varphi](y)\, dy$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue. L'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longmapsto \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\varphi(y)}{y}\, dy = \int_{[-R,R]} \theta_1[\varphi](y)\, dy\,, \quad \mathrm{supp}\, \varphi \subset [-R, R], \tag{1.15}$$

définit une distribution d'ordre 1 [15] sur $\mathbb{R}$, dite *Valeur Principale* $\mathrm{VP}[1/x]$.

Si maintenant on écrit la formule de Taylor à l'ordre $N - 1 \geq 1$ au voisinage de 0 pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (de support par exemple dans $[-R, R]$), on obtient

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{k!}\, x^k + \frac{x^N}{(N-1)!} \int_{[0,1]} (1-\tau)^{N-1} \frac{d^N}{dx^N}[\varphi](\tau x)\, d\tau \\ &= \quad \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{k!}\, x^k + x^N \theta_N[\varphi](x), \end{aligned} \tag{1.16}$$

où la fonction

$$\theta_N[\varphi] \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{(N-1)!} \int_{[0,1]} (1-\tau)^{N-1} \frac{d^N}{dx^N}[\varphi](\tau x)\, d\tau$$

est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ (toujours en appliquant le théorème élémentaire de Licence 2 sur la différentiabilité des intégrales dépendant d'un paramètre) qui n'est plus, cette fois, à support compact. Si $0 < \epsilon < R$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon<|y|<R} \frac{\varphi(y)}{y^N}\, dy \quad &= \quad \sum_{k\leq N-2} \frac{\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{k!} \Big(\Big[\frac{y^{k-N+1}}{k-N+1} \Big]_{-R}^{-\epsilon} + \Big[\frac{y^{k-N+1}}{k-N+1} \Big]_{\epsilon}^{R} \Big) \\ &\qquad + \frac{\frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}}[\varphi](0)}{(N-1)!} \Big(\Big[\log|y| \Big]_{\epsilon}^{R} + \Big[\log|y| \Big]_{-R}^{-\epsilon} \Big) \\ &\qquad + \int_{\epsilon<|y|<R} \theta_N[\varphi](y)\, dy. \end{aligned}$$

Il en résulte donc que la limite, lorsque ϵ tend vers 0, de

$$\int_{|y|>\epsilon} \frac{\varphi(y)}{y^N}\, dy - \sum_{\substack{k<N-1 \\ k\equiv N \pmod 2}} \frac{2\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{(N-k-1)k!} \frac{1}{\epsilon^{N-k-1}}$$

15. Que l'ordre soit exactement 1 résulte du fait que cette distribution ne saurait être une mesure (*cf.* la remarque 1.20) puisque $dt/|t|$ n'est pas de masse finie au voisinage de l'origine.

existe et que

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longmapsto \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{|y|>\epsilon}\frac{\varphi(y)}{y^N}\,dy - \sum_{\substack{k<N-1\\ k\equiv N \pmod 2}} \frac{2\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{(N-k-1)k!}\frac{1}{\epsilon^{N-k-1}}\Big)$$

définit une distribution d'ordre au plus N sur $\mathbb{R}$ (en fait, il s'avère que l'ordre est exactement N, mais c'est à ce stade un peu plus difficile à montrer, nous y reviendrons). Les distributions ainsi définies et correspondant à $N = 2M$ pair sont appelées *Partie Finie* $\mathrm{PF}[1/x^{2M}]$, $M = 1, 2, \ldots$. Lorsque N est impair ($N = 2M+1$), on appelle cette distribution $\mathrm{VP}[1/x^{2M+1}]$, comme dans le cas $N = 1$.

Si $\alpha < 1$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto H(t)t^{-\alpha}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, donc définit une distribution-fonction que l'on note $t_+^{-\alpha}$. Si $\alpha \geq 1$, de partie entière N ($\alpha \in [N, N+1[$) et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la formule de Taylor avec reste intégral (1.16) implique, pour $0 < \epsilon < R < +\infty$,

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon<t<R}\frac{\varphi(t)}{t^\alpha}\,dt &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{k!}\int_\epsilon^R t^{k-\alpha}\,dt + \int_{\epsilon<t<R} t^{N-\alpha}\,\theta_N[\varphi](t)\,dt\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{(\alpha-k-1)k!}\Big[t^{k+1-\alpha}\Big]_R^\epsilon\\
&\qquad + \int_{\epsilon<t<R} t^{N-\alpha}\,\theta_N[\varphi](t)\,dt \quad \text{si} \quad \alpha \in]N, N+1[\\
&= \sum_{k<N-1}\frac{\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{(\alpha-k-1)k!}\Big[t^{k+1-\alpha}\Big]_R^\epsilon +\\
&\quad + \frac{\frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}}[\varphi](0)}{(N-1)!}\Big[\log t\Big]_\epsilon^R + \int_{\epsilon<t<R} t^{N-\alpha}\,\theta_N[\varphi](t)\,dt \quad \text{si} \quad \alpha = N.
\end{aligned}$$

On définit ainsi une distribution $t_+^{-\alpha}$ sur $\mathbb{R}$ (d'ordre inférieur [16] ou égal à N, partie entière de α, lorsque $\alpha \geq 1$) en posant

$$\langle t_+^{-\alpha}, \varphi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{t>\epsilon}\frac{\varphi(t)}{t^\alpha}\,dt - \sum_{k\leq N-1}\frac{\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{(\alpha-k-1)k!}\frac{1}{\epsilon^{\alpha-k-1}}\Big)$$

si $\alpha \in]N, N+1[$ et

$$\langle t_+^{-N}, \varphi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{t>\epsilon}\frac{\varphi(t)}{t^\alpha}\,dt - \sum_{k<N-1}\frac{\frac{d^k}{dx^k}[\varphi](0)}{(N-k-1)k!}\frac{1}{\epsilon^{N-k-1}} + \frac{\frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}}[\varphi](0)}{(N-1)!}\log\epsilon\Big)$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On remarque que $\langle t_+^{-\alpha}, \varphi\rangle = 0$ si $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset]-\infty, 0[$ (d'où l'indice + utilisé dans la notation).

Les distributions $t_+^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, comme la distribution $\mathrm{VP}[1/x]$ et la distribution $\mathrm{PF}[1/x^2]$, jouent un rôle important en mathématiques appliquées et en sciences de l'ingénieur.

16. Là encore, l'ordre est exactement $N = E[\alpha]$, nous y reviendrons.

1.4.4. La distribution VP$[1/f]$ dans le champ complexe. Le champ complexe, de par la notion de positivité qui lui est inhérente (et que matérialise le couplage de l'identité avec la conjugaison complexe, *c.f.* la relation $z\overline{z} = |z|^2 \geq 0$) fournit un cadre propice à la construction de distributions qui ne soient ni des distributions-fonction, ni des distributions-mesure, mais plutôt des distributions du type VP$[1/x]$, PF$[1/x^2]$, $t_+^{-\alpha}$, envisagées à la sous-section précédente. Le modèle de construction VP$[1/x]$ *via* l'intégrale « équilibrée » (sans correction de terme comme cela était nécessaire dans le champ réel pour les singularités d'ordre strictement supérieur à 1) s'adapte facilement dans le champ complexe.

Proposition 1.3. *Soit Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans Ω. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$, la limite, lorsque $\epsilon > 0$ tend vers 0, de*

$$\epsilon \longmapsto \int_{\{\zeta\in\Omega\,;\,|f(\zeta)|>\epsilon\}} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{f(\xi+i\eta)}\, d\xi d\eta, \tag{1.17}$$

existe et l'on définit une distribution VP$[1/f]$ *sur Ω en posant*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{C}),\ \langle \mathrm{VP}[1/f], \varphi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0} \Big(\int_{\{\zeta\in\Omega\,;\,|f(\zeta)|>\epsilon\}} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{f(\xi+i\eta)}\, d\xi d\eta\Big). \tag{1.18}$$

L'ordre de cette distribution au voisinage d'un zéro z_0 de f de multiplicité $\nu(z_0)$ est inférieur ou égal à $\nu(z_0) - 1$. Si $\nu(z_0) = 1$, la distribution VP$[1/f]$ *coincide avec la distribution-fonction $1/f$ dans tout voisinage de z_0 où z_0 est le seul zéro de la fonction holomorphe f.*

Démonstration. Grâce au lemme 1.5 de partitionnement de l'unité, on peut se limiter au cas où $\Omega = D(0,R)$ et $f(z) = z^\nu h(z)$, avec $\nu \in \mathbb{N}^*$, h holomorphe et ne s'annulant pas dans $D(0,R)$; la fonction h s'écrit dans $D(0,R)$ sous la forme $h = \exp(g)$, où g est holomorphe dans $D(0,R)$ et l'on a donc $f(z) = (z\exp(g(z)/\nu))^\nu$ dans ce disque. En effectuant le changement de variable $w = z\exp(g(z)/\nu)$ (qui réalise une transformation biholomorphe entre un voisinage de 0 dans $D_z(0,R)$ et un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}_w$), on voit que l'on peut se ramener à supposer en fait que $\Omega = D(0,r)$ et $f(z) = z^\nu$. On peut se limiter à supposer $\nu \geq 2$ puisque la fonction $1/z$ est localement intégrable dans $\mathbb{C}$ et définit donc une distribution fonction (coincidant bien dans ce cas avec VP$\,[1/z]$ telle qu'elle est définie dans (1.18)). Pour $\epsilon > 0$ fixé, l'intégrale figurant en (1.17) devient, une fois exprimée en coordonnées polaires

$$\int_{\{\zeta\in\Omega\,;\,|f(\zeta)|>\epsilon\}} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{f(\xi+i\eta)}\, d\xi d\eta = \int_{\epsilon^{1/\nu}}^{r} \Big(\int_0^{2\pi} \varphi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, e^{-i\nu\theta}\, d\theta\Big) \frac{d\rho}{\rho^{\nu-1}}. \tag{1.19}$$

On utilise la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction φ, cette fois fonction de deux variables, au voisinage de $(0,0)$. Ceci donne

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) &= \sum_{k_1+k_2\le\nu-2} \frac{1}{k_1!k_2!}\Big(\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial\zeta^{k_1}\partial\overline{\zeta}^{k_2}}\Big)[\varphi](0,0)\,(\rho e^{i\theta})^{k_1}(\rho e^{-i\theta})^{k_2} + \\
&\quad +(\nu-1)\rho^{\nu-1}\sum_{k_1+k_2=\nu-1}\frac{1}{k_1!k_2!}\Big(\int_{[0,1]}(1-\tau)^{\nu-2}\Big(\sum_{k_1+k_2=\nu-1}\frac{1}{k_1!k_2!}\times \\
&\qquad \times\Big(\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial\zeta^{k_1}\partial\overline{\zeta}^{k_2}}\Big)[\varphi](\tau\cos\theta,\tau\sin\theta)\Big)d\tau\Big)e^{i(k_1-k_2)\theta} \\
&= \sum_{k_1+k_2\le\nu-2}\frac{1}{k_1!k_2!}\Big(\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial\zeta^{k_1}\partial\overline{\zeta}^{k_2}}\Big)[\varphi](0,0)\,\rho^{k_1+k_2}e^{i(k_1-k_2)\theta} + \\
&\quad +\rho^{\nu-1}\Theta[\varphi](\rho\cos\theta,\rho\sin\theta).
\end{aligned}$$

En substituant dans (1.19) et en utilisant le fait que, si $k_1+k_2\le\nu-2$, $k_1,k_2\ge 0$,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k_1-k_2-\nu+1)\,\theta}\,d\theta = 0,$$

on voit que

$$\int_{\{\zeta\in\Omega\,;\,|f(\zeta)|>\epsilon\}}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{f(\xi+i\eta)}\,d\xi d\eta = \int_{\epsilon^{1/\nu}}^{r}\Big(\int_0^{2\pi}\Theta[\varphi](\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)e^{-i\nu\theta}\,d\theta\Big)d\rho.$$

La limite lorsque ϵ tend vers 0 de l'intégrale (1.19) existe bien est vaut

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{\zeta\in\Omega\,;\,|f(\zeta)|>\epsilon\}}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{f(\xi+i\eta)}\,d\xi d\eta = \int_0^r\Big(\int_0^{2\pi}\Theta[\varphi](\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)e^{-i\nu\theta}\,d\theta\Big)\,d\rho$$

grâce au théorème de convergence dominée. On définit ainsi une distribution complexe dont on voit que l'ordre est inférieur ou égal à $\nu-1$ (ce sont les dérivations de φ jusqu'à un ordre total égal à $\nu-1$ qui sont impliquées dans l'expression de $\Theta[\varphi]$). $\square$

1.4.5. Les distributions $\mathrm{PF}(\|x\|^{-\alpha})$ **dans** $\mathbb{R}^n$**.** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Si $\alpha<n$, la fonction $x\in\mathbb{R}^n\mapsto\|x\|^{-\alpha}$ (définie dans $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, donc dx-presque partout, la norme étant ici la norme euclidienne) est localement intégrable d'après le critère de Riemann, donc définit une distribution-fonction. Ce n'est plus le cas si $\alpha\ge N$. C'est à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral (dans $\mathbb{R}^n$ cette fois) que nous invoquons pour définir un substitut distribution à $x\mapsto\|x\|^{-\alpha}$ dans ce cas, la distribution *Partie Finie* $\mathrm{PF}[\|x\|^{-\alpha}]$.

Soit $\alpha\ge n$ et N la partie réelle de $\alpha-(n-1)\ge 1$ ($i.e$ $\alpha\in[n+N-1,n+N[$). Si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ (avec $\mathrm{Supp}\,\varphi\subset\overline{B_n(0,R)}$), considérons sa « radialisée » φ_{rad} :

$$\varphi_{\mathrm{rad}}\ :\rho\in[0,\infty]\mapsto\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(\rho\,\vec{\theta})\,d\sigma_{n-1}(\vec{\theta}),$$

où $d\sigma_{n-1}$ désigne la mesure surfacique sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire $dx=\rho^{n-1}d\sigma_{n-1}d\rho$). La fonction $\rho\in[0,\infty]\mapsto\varphi_{\mathrm{rad}}(\rho)$, prolongée par parité à $\mathbb{R}$ tout entier, est une fonction paire de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (avec $\mathrm{Supp}\,\varphi_{\mathrm{rad}}\subset[-R,R]$) dont on peut écrire (voir (1.16)) le développement de Taylor (avec reste intégral) au voisinage de 0 à l'ordre $N-1$:

$$\begin{aligned}
\forall\, \rho \in [0,\infty[,\ \varphi_{\mathrm{rad}}(\rho) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\frac{d^k}{d\rho^k}[\varphi_{\mathrm{rad}}](0)}{k!}\,\rho^k + \\
&\quad + \frac{\rho^N}{(N-1)!}\int_{[0,1]} (1-\tau)^{N-1} \frac{d^N}{d\rho^N}[\varphi_{\mathrm{rad}}](\tau\rho)\,d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\frac{d^k}{d\rho^k}[\varphi_{\mathrm{rad}}](0)}{k!}\,\rho^k + \rho^N \theta_N[\varphi_{\mathrm{rad}}](\rho). \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

En passant aux coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\{\|x\|>\epsilon\}} \frac{\varphi(x)}{\|x\|^\alpha}\,dx &= \int_\epsilon^\infty \int_{\vec{\theta}\in\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\varphi(\rho\,\vec{\theta})}{\rho^\alpha}\,\rho^{n-1}\,d\rho\,d\sigma_{n-1} \\
= \int_\epsilon^\infty \rho^{n-1}\frac{\varphi_{\mathrm{rad}}(\rho)}{\rho^\alpha}\,d\rho & \\
= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\frac{d^k}{d\rho^k}[\varphi_{\mathrm{rad}}](0)}{k!} \int_\epsilon^R \rho^{k+n-1-\alpha}\,d\rho &+ \int_0^\infty \frac{\theta_N[\varphi_{\mathrm{rad}}](\rho)}{\rho^{\alpha-n-N+1}}\,d\rho.
\end{aligned}$$

On constate alors que l'on définit sur $\mathbb{R}^n$ une distribution d'ordre au plus [17] N en posant

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{PF}(\|x\|^{-\alpha}),\varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{\{\|x\|>\epsilon\}} \frac{\varphi(x)}{\|x\|^\alpha}\,dx - \sum_{k\leq N-1} \frac{\frac{d^k}{d\rho^k}[\varphi_{\mathrm{rad}}](0)}{(\alpha-k-n)k!}\,\frac{1}{\epsilon^{\alpha-k-n}}\Big) \\
&\qquad \text{si} \quad \alpha \in]n+N-1, n+N[\\
&\langle \mathrm{PF}(\|x\|^{-(n+N-1)}),\varphi\rangle = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{\{\|x\|>\epsilon\}} \frac{\varphi(x)}{\|x\|^\alpha}\,dx \\
&\qquad - \sum_{k<N-1} \frac{\frac{d^k}{d\rho^k}[\varphi_{\mathrm{rad}}](0)}{(N-k-1)k!}\,\frac{1}{\epsilon^{N-k-1}} + \frac{\frac{d^{N-1}}{d\rho^{N-1}}[\varphi_{\mathrm{rad}}](0)}{(N-1)!}\log\epsilon\Big). \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Ces distributions sont les distributions *Parties Finies*, ou encore *Parties Finies* de Hadamard, ainsi dénomées en référence au mathématicien français Jacques Hadamard (1863-1965), d'ailleurs grand oncle de Laurent Schwartz, dont nous avons déjà mentionné le rôle dans la genèse du concept de distribution.

1.5. Courants sur une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^N$

Dans cette section, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et Ω désigne un ouvert d'une sous-variété différentiable $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^N$. Le cas particulier $N = n$ et $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ correspond au cas (déjà traité) où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

17. Ici encore,l'ordre de cette distribution est exactement N, c'est-à-dire la partie entière de $\alpha-(n-1)$ lorsque ce nombre est supérieur ou égal à 1 (sinon, l'ordre est 0 car il s'agit d'une distribution-fonction).

Dans ce contexte maintenant géométrique, il est important, outre d'introduire le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ des fonctions C^∞ à support compact dans Ω[18], d'introduire aussi, pour chaque valeur de $q = 0, ..., n$, le $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{D}^q(\Omega, \mathbb{K})$ des q-formes différentielles C^∞ et à support compact dans Ω. On convient naturellement de ce que $\mathcal{D}^{n+1}(\Omega, \mathbb{K}) = 0$. On a aussi $\mathcal{D}^0(\Omega, \mathbb{K}) = \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$.

On rappelle que l'on dispose de l'opérateur différentiel $\mathbb{R}$-linéaire de de Rham :

$$d \ : \varphi \in \mathcal{D}^q(\Omega, \mathbb{K}) \longmapsto d\varphi \in \mathcal{D}^{q+1}(\Omega, \mathbb{K}), \ q = 0, ..., n.$$

Cet opérateur vérifie (du fait du lemme de Schwarz) $d \circ d \equiv 0$.

Exactement comme nous avons défini une topologie sur chaque $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K}) = \mathcal{D}^0_K(\Omega, \mathbb{K})$ un système fondamental de voisinages de la fonction nulle (1.11), on définit une topologie sur chaque $\mathcal{D}^q_K(\Omega, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$-espace vectoriel des q-formes différentielles à support dans $K \subset\subset \Omega$). Dire qu'une suite $(\varphi_k)_k$ d'éléments de $\mathcal{D}^q_K(\Omega, \mathbb{K})$ converge (pour cette topologie) vers la forme nulle dans $\mathcal{D}^q_K(\Omega, \mathbb{K})$ signifie que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} \max[N_{K,p}(\text{coeff.}(\varphi_k))] = 0, \tag{1.22}$$

les coefficients des formes différentielles étant ici exprimés en coordonnées locales (notons que la clause (1.22) ne dépend pas du recouvrement $\mathcal{R}$ de K utilisé pour « cartographier » la sous-variété $\mathcal{X}$ au voisinage de K). On munit $\mathcal{D}^q(\Omega, \mathbb{K})$ de la topologie limite inductive des topologies introduites sur les $\mathcal{D}^q_K(\Omega, \mathbb{K})$, ce qui revient à adopter un principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}^q(\Omega, \mathbb{K})$ calqué mot pour mot sur celui de la Définition 1.11.

Définition 1.21 (principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}^q(\Omega, \mathbb{K})$). Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $0 \leq q \leq n$. Une suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}^q(\Omega, \mathbb{K})$ est dite *converger vers la q-forme différentielle identiquement nulle dans* $\mathcal{D}^q(\Omega, \mathbb{K})$ si et seulement si :

— il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que toutes les q-formes différentielles φ_k pour $k \geq k_0$ ont leur support inclus dans un même compact $K_0 \subset\subset \Omega$;

— la suite $(\varphi_k)_{k\geq k_0}$, considérée comme une suite d'éléments de $\mathcal{D}^q_{K_0}(\Omega, \mathbb{K})$, converge vers la q-forme différentielle identiquement nulle dans cet espace, i.e

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty} \max[N_{K_0,p}(\text{coeff.}(\varphi_k))] = 0, \tag{1.23}$$

les coefficients des formes différentielles étant exprimés en coordonnées locales.

Définition 1.22 (notion de courant). Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $0 \leq q \leq n$. Un q-courant (à valeurs dans $\mathbb{K}$) sur Ω est une application $\mathbb{K}$-linéaire

$$T \ : \varphi \in \mathcal{D}^{n-q}(\Omega, \mathbb{K}) \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$$

telle que, pour toute suite $(\varphi_k)_k$ d'éléments de $\mathcal{D}^{n-q}(\Omega, \mathbb{K})$ tendant vers la $(n-q)$-forme identiquement nulle au sens du principe de convergence des suites énoncé

18. Ici, Ω est considéré comme ouvert de la sous-variété différentiable $\mathcal{X}$, il s'agit donc de fonctions C^∞ définies sur la sous-variété $\mathcal{X}$ *via* les cartes locales d'un atlas.

dans la Définition 1.21, on ait

$$\lim_{k\to+\infty}\langle T,\varphi_k\rangle = 0.$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des q-courants sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté ${\mathcal{D}'}^q(\Omega,\mathbb{K})$.

Remarque 1.23. Le fait que $\mathcal{X}$ soit une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^N$ implique que l'on dispose sur $\mathcal{X}$ d'une n-forme différentielle volume canonique. Cette forme volume $\mathrm{vol}_{\mathcal{X}}$ (couplée donc avec une orientation) correspond à la métrique euclidienne $dx_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$ (voir par exemple l'annexe 1, Définition B.1.1 de [**Charp**]). Il y a un isomorphisme topologique naturel entre $\mathcal{D}(\mathcal{X},\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}^n(\mathcal{X},\mathbb{K})$, à savoir l'isomorphisme qui à la n-forme $\phi\in\mathcal{D}^n(\Omega,\mathbb{K})$ associe l'unique fonction $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ telle que $\phi\equiv\varphi\,\mathrm{vol}_{\mathcal{X}}$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel ${\mathcal{D}'}^0(\Omega,\mathbb{K})$, dual du $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{D}^n(\Omega,\mathbb{K})$, s'identifie donc à l'espace des applications $\mathbb{K}$-linéaires $T\ :\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ continues au sens du principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel ${\mathcal{D}'}^0(\Omega,\mathbb{K})$ est appelé $\mathbb{K}$-espace vectoriel des *distributions* sur Ω et l'on retrouve ainsi la cohérence avec la notion de distribution dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ introduite précédemment (${\mathcal{D}'}^0(\Omega,\mathbb{K})\simeq\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{K})$).

CHAPITRE 2

Suites de distributions, régularisation, différentiation

2.1. Convergence faible dans $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{D}'^{q}(\Omega, \mathbb{K})$

Dans cette section, Ω désigne dans un premier temps un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le corps des scalaires $\mathbb{K}$ est, comme d'habitude, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plutôt que d'introduire une topologie sur le $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$, nous allons nous contenter d'énoncer un *principe de convergence pour les suites de distributions.* La topologie sur $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ (dual de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$) dont l'énoncé d'un tel principe de convergence des suites escamote la définition est dite *topologie faible* sur $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$. Cette topologie faible, là encore, n'est pas métrisable, mais le principe de convergence des suites énoncé ci-dessous suffira à nos besoins.

Définition 2.1 (principe de convergence pour les suites de distributions). Une suite de distributions $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec $T_k \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$, est dite *converger vers la distribution nulle* si et seulement si

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}), \quad \lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi\rangle = 0. \tag{2.1}$$

La suite de distributions $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dite *converger vers la distribution* $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ si et seulement si la suite $(T_k - T)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution nulle, *i.e*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}), \quad \lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle. \tag{2.2}$$

En fait, le théorème de Banach-Steinhaus [1] s'adapte dans un tel contexte et nous avons la :

Proposition 2.1 ($\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ est « séquentiellement complet »). *Si une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ est telle que*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}), \quad \lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi\rangle \ \textit{existe}, \tag{2.3}$$

alors

$$\Big(\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}) \longmapsto \lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi\rangle\Big) \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K}).$$

Démonstration. La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ telle que*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}), \ \sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi\rangle| < +\infty. \tag{2.4}$$

1. Si E est un espace de Banach et F un espace vectoriel normé, toute famille $(L_\iota)_\iota$ d'applications linéaires continues de E dans F telle que, pour chaque $\vec{v} \in E$, $\sup_\iota |L_\iota(\vec{v})| < +\infty$, est telle que $\sup_\iota \|L_\iota\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$. Ce théorème important (surtout en analyse fonctionnelle) est un avatar de la *propriété de Baire* (que partagent les espaces de Banach comme ici E).

Alors, si $(\varphi_k)_k$ *est une suite d'éléments dans* $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ *tendant vers* 0 *dans* $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ *au sens du principe de convergence des suites de la Définition 1.11, on a*

$$\lim_{k \to +\infty} \langle T_k, \varphi_k \rangle = 0.$$

Admettons pour l'instant ce lemme et déduisons en la preuve de la Proposition 2.1. Il est clair que (2.3) implique (2.4). Posons, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$,

$$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{k \to +\infty} \langle T_k, \varphi \rangle.$$

Pour prouver la proposition, il faut montrer que T (qui est déjà évidemment une forme $\mathbb{K}$-linéaire) satisfait

$$\lim_{k \to +\infty} \langle T, \varphi_k \rangle = 0$$

pour toute suite $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ tendant vers la fonction nulle au sens du principe de convergence des suites de la Définition 1.11. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une sous-suite strictement croissante d'entiers $(k_l)_{l \geq 0}$ telle que, pour un certain $\eta > 0$,

$$\forall\, l \in \mathbb{N}\,,\ |\langle T, \varphi_{k_l} \rangle| \geq \eta. \tag{2.5}$$

Pour chaque $l \in \mathbb{N}$, il existe $N_l \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq N_l,\ |\langle T, \varphi_{k_l} \rangle - \langle T_k, \varphi_{k_l} \rangle| \leq \eta/2 \tag{2.6}$$

par définition de T. En combinant (2.5) et (2.6), il vient

$$\forall\, l \in \mathbb{N}, \quad |\langle T_{N_l}, \varphi_{k_l} \rangle| \geq \eta/2. \tag{2.7}$$

En remplaçant dans le lemme la suite $(T_k)_k$ par sa sous-suite $(T_{N_l})_l$ et la suite $(\varphi_k)_k$ par sa sous-suite $(\varphi_{k_l})_l$, on constate que l'on devrait avoir (d'après ce lemme)

$$\lim_{l \to +\infty} \langle T_{N_l}, \varphi_{k_l} \rangle = 0,$$

ce qui est contradictoire avec (2.7). La proposition 2.1 est bien démontrée. □

PREUVE DU LEMME 2.2. On suppose la conclusion du lemme en défaut, ce qui signifie, quitte à extraire des sous-suites de $(T_k)_k$ et $(\varphi_k)_k$ que, pour un certain $\eta > 0$, on a

$$|\langle T_k, \varphi_k \rangle| \geq \eta. \tag{2.8}$$

Dire que la suite $(\varphi_k)_k$ tend vers 0 revient à dire que toutes fonctions φ_k vivent, pour k assez grand, dans le même compact K_0 et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k \to \infty} N_{K_0,p}(\varphi_k) = 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe donc $k_p \in \mathbb{N}$ tel que $N_{K_0,p}(\varphi_{k_p}) < 4^{-p}$. La suite $(2^p \varphi_{k_p})_p$ tend toujours vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ et, quitte à remplacer dans (2.8) T_k par T_{k_p} et φ_k par $2^p \varphi_{k_p}$, la clause (2.8) devient

$$|\langle \widetilde{T}_p, \psi_p \rangle| \geq \eta 2^p, \tag{2.9}$$

tandis que la suite $(\psi_p)_p$ continue à converger vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ et que la condition (2.4) reste valable (mais avec la suite $(\widetilde{T}_p)_p$ au lieu de la suite $(T_k)_k$ cette fois).

Nous allons maintenant construire par récurrence une suite d'entiers $(p_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$,

— pour tout $\lambda = 1, ..., l-1$,

$$|\langle T_{p_\lambda}, \psi_{p_l} \rangle| \leq \frac{1}{2^{l-\lambda}}\ ; \tag{2.10}$$

— on a

$$|\langle T_{p_l},\psi_{p_l}\rangle| \geq \sum_{\lambda=1}^{l-1}\sup_k |\langle T_k,\psi_{p_\lambda}\rangle| + l + 1 \geq \sum_{\lambda=1}^{l-1} |\langle T_{k_l},\psi_{p_\lambda}\rangle| + l + 1. \tag{2.11}$$

Pour $l=1$, il suffit d'assurer la clause (2.11), soit $|\langle f_{p_1},\psi_{p_1}\rangle| \geq 2$, ce qui est assuré (du fait de (2.9)) dès que $\eta 2^{p_1-1} \geq 1$, donc pour p_1 choisi assez grand. Une fois que $p_1,...,p_{l-1}$ ont été construits, il existe un entier $N = N(p_1,...,p_{l-1})$ tel que

$$(p \geq N) \Longrightarrow \Big(\forall\, \lambda = 1,...,l-1,\ |\langle T_{p_\lambda},\psi_p\rangle| \leq \frac{1}{2^{l-\lambda}}\Big)$$

puisque, pour chaque $\lambda = 1,...,l-1$, la suite $(\langle T_{p_\lambda},\psi_p\rangle)_p$ tend vers 0 lorsqu p tend vers l'infini (la suite $(\psi_p)_p$ tend en effet vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ et chaque T_{p_λ}, $\lambda = 1,...,l-1$, est une distribution sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$). La condition (2.11) est assurée pour $p_l \geq N$ assez grand dès que

$$2^{p_l} \geq \sum_{\lambda=1}^{l-1}\sup_k |\langle T_k,\psi_{p_\lambda}\rangle| + l + 1$$

(en vertu de (2.9)). Il est possible de choisir un tel p_l. La suite $(p_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ réalisant à la fois les clauses (2.10) et (2.11) est ainsi construite inductivement. Comme $N_{K_0,p}(\psi_p) \leq 2^{-p}$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p_l}\psi_{p_l}$ converge dans $\mathcal{D}_{K_0}(\Omega,\mathbb{K})$ et la fonction

$$\psi := \sum_{l=1}^{\infty}\psi_{p_l}$$

définit un élément de $\mathcal{D}_{K_0}(\Omega,\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$. On a, pour $l\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|\langle T_{p_l},\psi\rangle| &= \Big|\langle T_{p_l},\psi_{p_l}\rangle + \sum_{\lambda\neq l}\langle T_{p_l},\psi_{p_\lambda}\rangle\Big| \\
&\geq |\langle T_{p_l},\psi_{p_l}\rangle| - \sum_{\lambda<l}|\langle T_{p_l},\psi_{p_\lambda}\rangle| - \sum_{\lambda>l}|\langle T_{p_l},\psi_{p_\lambda}\rangle| \\
&\geq l+1-\sum_{\lambda>l}|\langle T_{p_l},\psi_{p_\lambda}\rangle| \geq l+1-\sum_{\lambda>l}\frac{1}{2^{\lambda-l}} \geq l
\end{aligned}$$

si l'on utilise (2.11) pour obtenir la seconde inégalité et (2.10) pour obtenir la troisième. La suite $(|\langle T_k,\psi\rangle|)_k$ ne serait donc pas bornée, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (2.4). Le lemme 2.2 est ainsi démontré par l'absurde. □

Exercice 2.3. Soit $(\epsilon_k)_k$ une suite de nombres strictement positifs tendant vers 0. Déterminer les limites au sens des distributions ($i.e$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$) :

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(\log|t+i\epsilon_k|+i\arg_{]-\pi,\pi[}(t+i\,\epsilon_k)\Big) \quad \& \quad \lim_{k\to+\infty}\Big(\log|t+i\epsilon_k|+i\arg_{]-\pi,\pi[}(t-i\,\epsilon_k)\Big).$$

Exercice 2.4. Déterminer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la suite de distributions-fonction (T_k), où

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\quad \langle T_k,\varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(kt)}{t}\,\varphi(t)\,dt.$$

Exercice 2.5 (peigne de Dirac). Montrer que la suite de distributions $(T_k)_k$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$, où

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \langle T_k, \varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{k} \cos(lt)\Big)\, \varphi(t)\, dt$$

converge vers le *peigne de Dirac*, *i.e* la distribution réelle sur $\mathbb{R}$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longmapsto \langle \delta_{2\pi\mathbb{Z}}, \varphi\rangle = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi l).$$

On utilisera la formule donnant l'expression concaténée du noyau de Dirichlet :

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-k}^{k} e^{il\theta} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \forall\, \theta \in [0, 2\pi].$$

Exercice 2.6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tendant vers 0. Soit $(f_k)_k$ la suite de fonctions de $\mathbb{C}$ dans lui-même, où

$$f_k \ : z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{\overline{z}^N}{\epsilon_k^{2N}}\, \chi_{|\zeta|\leq\epsilon_k}(z) + \frac{\chi_{|\zeta|>\epsilon_k}(z)}{z^N}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite de distributions-fonction $(\dot{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{C},\mathbb{C})$ vers la distribution $\mathrm{VP}[1/z^N]$ introduite dans la Proposition 1.3 comme (1.18) lorsque $f(z) = z^N$.

Exercice 2.7. Soit $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tendant vers 0. En utilisant comme fonction-test $\Phi = \varphi\otimes\varphi$, où $\varphi\ : \mathbb{R} \to [0,1]$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, paire, identiquement égale à 1 sur $[-1,1]$, décroissante sur $[1,+\infty[$, montrer que la suite de distributions complexes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}) \longmapsto \langle T_k, \Phi\rangle := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Phi(x,y)}{xy + i\,\epsilon_k}\, dxdy$$

ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ (utiliser le théorème de convergence monotone de Beppo Levi pour montrer la non convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ de la suite $(\mathrm{Im}\, T_k)_{k\in\mathbb{N}}$).

Exercice 2.8. Montrer que toute fonction $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\Phi(x,y) = \Phi_{00}(x,y) + x\,\Phi_{10}(x,y) + y\,\Phi_{01}(x,y) + xy\,\Phi_{11}(x,y),$$

où les quatre fonctions $\Phi_{00}, \Phi_{10}, \Phi_{01}, \Phi_{11}$ sont des fonctions C^∞ à support compact, paires en x et y. Exprimer Φ_{11} comme une intégrale fonction des paramètres (x,y) s'exprimant à l'aide de la dérivée partielle seconde $(\partial^2/\partial x\partial y)[\Phi]$. En déduire que la suite de distributions complexes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^2$, où

$$T_k \ : \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}) \longmapsto \langle T_k, \Phi\rangle := \int_{|xy|>\epsilon_k} \frac{\Phi(x,y)}{xy}\, dxdy$$

et $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tendant vers 0, converge vers la distribution

$$\begin{aligned} T\ : \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}) \longmapsto \langle T, \Phi\rangle :\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_{11}(x,y)\, dxdy \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{[-1,1]^2} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big)[\Phi](\tau x, \sigma y)\, d\sigma d\tau\Big)\, dxdy. \end{aligned}$$

Montrer que si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a

$$\langle T, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle \mathrm{VP}[1/x], \varphi \rangle \times \langle \mathrm{VP}[1/x], \psi \rangle,$$

où $\varphi \otimes \psi \ : (x,y) \mapsto \varphi(x)\, \psi(y)$ et $\mathrm{VP}[1/x]$ est la distribution introduite en (1.15).

Dans le contexte géométrique où Ω désigne un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$, le principe de convergence des suites de distributions se transpose mot pour mot en un *principe de convergence pour les suites de courants.*

Définition 2.9 (principe de convergence pour les suites de courants). Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et $0 \leq q \leq n$. Une suite de q-courants $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec $T_k \in \mathcal{D}'^{q}(\Omega, \mathbb{K})$, est dite *converger vers le q-courant nul* si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-q}(\Omega, \mathbb{K}), \quad \lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = 0. \tag{2.12}$$

La suite de q-courants $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dite *converger vers le courant* $T \in \mathcal{D}'^{q}(\Omega, \mathbb{K})$ si et seulement si la suite $(T_k - T)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le q-courant nul, *i.e*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-q}(\Omega, \mathbb{K}), \quad \lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle. \tag{2.13}$$

Comme dans le cadre de la théorie des distributions (Proposition 2.1), le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}'^{q}(\Omega, \mathbb{K})$ des q-courants sur un ouvert Ω d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$ est séquentiellement complet.

2.2. La régularisation des distributions

Les phénomènes physiques sont entachés d'irrégularités. Les structures fractales ou chaotiques (trajectoires du mouvement brownien, courbes fractales sur le modèle du flocon de Von Koch ou de la frontière des ensembles de Mandelbrojt ou de Julia dans les problèmes de dynamique, *etc.*) en sont autant d'exemples familiers, à l'opposé des « êtres » réguliers (tels les courbes analytiques ou algébriques) auxquels sont attachés les concepts « rigides » d'holomorphie, d'analyticité (au sens réel ou complexe), *etc.*, ou « souples », mais réguliers (C^0, Lipschitz, $C^1, ..., C^p, ..., C^\infty$). Pouvoir « approcher » des phénomèmes irréguliers par des distributions-fonction correspondant à des fonctions aussi régulières que l'on veut (que l'on entende « rigide » ou « souple ») s'avère essentiel. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette section.

Proposition 2.2 (régularisation d'une distribution par convolution). *Soient Ω, Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ et $\mathrm{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega) = \eta \in]0, \infty]$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La suite de fonctions*

$$x \in \Omega' \mapsto \langle T_y, \psi_{1/k}(x-y) \rangle, \quad k \geq \max(1, 1/\eta),$$

est une suite de fonctions C^∞ dans Ω' qui converge au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega', \mathbb{K})$ vers la restriction $T_{|\Omega'}$ de T à l'ouvert Ω'.

Démonstration. Pour $k \geq \max(1, 1/\eta)$ et $x \in \Omega'$, la fonction

$$y \in \mathbb{R}^n \mapsto \psi_{1/k}(x-y) = \psi_{1/k}(y-x)$$

est de support $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x, 1/k)} \subset \Omega$ et est C^∞. C'est une fonction-test dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ et l'action de T dessus, soit $\langle T_y, \psi_{1/k}(x-y) \rangle$, est donc bien définie. Nous allons montrer par récurrence sur p que, pour tout $k \geq \max(1, 1/\eta)$, la fonction

$$x \in \Omega' \mapsto \langle T_y, \psi_{1/k}(x-y) \rangle \tag{2.14}$$

est de classe C^p sur Ω' et que, pour $l_1 + \cdots + l_n \le p$, on a

$$\forall\, x \in \Omega', \quad \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big) \Big[\langle T_y, \psi_{1/k}(x-y)\rangle\Big](x) = \Big\langle T_y, \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[\psi_{1/k}(x-y)]\Big\rangle. \tag{2.15}$$

Prouver ceci se ramène de fait (par induction en remplaçant la fonction φ par une de ses dérivées partielles à l'ordre $p-1$) au cas $p=1$, $l_1 = 1$, $l_2 = \cdots = l_n = 0$. On remarque que, si $(\epsilon_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels tendant vers 0 et si $x = (x_1, x')$ est fixé dans Ω', la suite de fonctions-test

$$\Big(y = (y_1, y') \mapsto \frac{\psi_{1/k}(x_1 + \epsilon_\lambda - y_1, x' - y') - \psi_{1/k}(x-y)}{\epsilon_\lambda}\Big)_{\lambda\in\mathbb{N}}$$

converge dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ vers la fonction-test

$$y \longmapsto \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)[\psi_{1/k}(x-y)].$$

Comme T est une distribution sur Ω, on a donc

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\langle T_y, \psi_{1/k}(x_1+\epsilon_\lambda - y_1, x'-y')\rangle - \langle T_y, \psi_{1/k}(x-y)\rangle}{\epsilon_\lambda} &= \\ &= \Big\langle T_y, \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)[\psi_{1/k}(x-y)]\Big\rangle.\end{aligned}$$

En répétant ce raisonnement inductivement, on voit que la fonction (2.14) est C^∞ dans Ω' et que ses dérivées partielles se calculent en « dérivant sous le symbole de prise de T_y » *i.e* comme (2.15). Il reste à prouver que, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega', \mathbb{K})$, on a

$$\langle T_x, \varphi_x\rangle = \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega'} \langle T_y, \psi_{1/k}(x-y)\rangle\, \varphi(x)\, dx. \tag{2.16}$$

En approchant l'intégrale de la fonction continue

$$\int_{\Omega'} \varphi(x)\, \psi_{1/k}(x-y)\, dx$$

par des sommes de Riemann, puis en utilisant la linéarité et la continuité de T sur $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$, on voit que

$$\Big\langle T_y\,,\, \int_{\Omega'} \varphi(x)\, \psi_{1/k}(x-y)\, dx\Big\rangle = \int_{\Omega'} \langle T_y, \psi_{1/k}(x-y)\rangle\, \varphi(x)\, dx.$$

Prouver (2.16) revient donc à prouver

$$\begin{aligned}\langle T_x, \varphi_x\rangle &= \lim_{k\to+\infty} \Big\langle T_y\,,\, \int_{\Omega'} \varphi(x)\, \psi_{1/k}(x-y)\, dx\Big\rangle \\ &= \lim_{k\to+\infty} \Big\langle T_y\,,\, \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1/k)} \varphi(y-x)\, \psi_{1/k}(x)\, dx\Big\rangle.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Or (si φ est prolongée par 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'$ en une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$), la fonction

$$y \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1/k)} \varphi(y-x)\, \psi_{1/k}(x)\, dx$$

est une fonction-test dans $\mathbb{R}^n$, à support compact dans $\bigcup_{x\in \operatorname{Supp}\varphi} \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x,\eta)} \subset \Omega$, et l'on a (d'après le théorème usuel de différentiation des intégrales dépendant de plusieurs paramètres) que pour chaque $p \in \mathbb{N}$, pour chaque multi-indice $(l_1, ..., l_n)$ avec $l_1 + \cdots + l_n \leq p$,

$$\Big(\prod_{l=1}^{n} \frac{\partial^{l_j}}{\partial y_j^{l_j}}\Big)\Big[\int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1/k)} \varphi(y-x)\,\psi_{1/k}(x)\,dx\Big](y) =$$

$$= \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1/k)} \Big(\prod_{l=1}^{n} \frac{\partial^{l_j}}{\partial y_j^{l_j}}\Big)[\varphi(y-x)]\,\psi_{1/k}(x)\,dx.$$

D'autre part, pour tout compact K de Ω, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to+\infty} \sup_{y\in K} \Big| \Big(\prod_{l=1}^{n} \frac{\partial^{l_j}}{\partial y_j^{l_j}}\Big)[\varphi](y) - \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1/k)} \Big(\prod_{l=1}^{n} \frac{\partial^{l_j}}{\partial y_j^{l_j}}\Big)[\varphi(y-x)]\,\psi_{1/k}(x)\,dx\Big| \\ = &\lim_{k\to+\infty} \sup_{y\in K} \Big| \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1/k)} \Big(\prod_{l=1}^{n} \frac{\partial^{l_j}}{\partial y_j^{l_j}}\Big)\Big[\varphi(y) - \varphi(y-x)\Big]\,\psi_{1/k}(x)\,dx\Big| \\ \leq &\lim_{k\to+\infty} \sup_{y\in K} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1/k)} \Big|\Big(\prod_{l=1}^{n} \frac{\partial^{l_j}}{\partial y_j^{l_j}}\Big)\Big[\varphi(y) - \varphi(y-x)\Big]\Big|\,\psi_{1/k}(x)\,dx = 0 \end{aligned}$$

du fait de l'uniforme continuité de toutes les dérivées partielles de φ sur le compact $K_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, d(x,K) \leq \eta\}$ (voir le cours de MHT512, Section 4.7). La suite de fonctions

$$\Big(y \in \Omega' \longmapsto \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0,1/k)} \varphi(y-x)\,\psi_{1/k}(x)\,dx\Big)_{k\geq \max(1,1/\eta)}$$

est donc une suite de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$ convergent (au sens de la convergence des suites de fonctions-test dans Ω) vers la fonction φ (considérée comme fonction-test dans Ω). Le fait que T soit une distribution dans Ω implique donc bien (2.17), donc (2.16). La proposition est démontrée. $\square$

Exercice 2.10. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{C})$. Soit K un compact de Ω et $\rho_K \in \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{R})$ une fonction plateau identiquement égale à 1 au voisinage de K. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\Big\langle T_y, \rho_K(y)\exp\Big(-\frac{k^2}{2}(x-y)^2\Big)\Big\rangle$$

est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fontion entière $F_k[T;K]$ de la variable complexe z, avec

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ F_k[T;K](z) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\Big(-\frac{k^2z^2}{2}\Big)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k^{2l}}{l!}\,\Big\langle T_y, \rho_K(y)y^l\exp\Big(-\frac{k^2y^2}{2}\Big)\Big\rangle\,z^l.$$

Montrer que

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{C}),\ \langle T,\varphi\rangle = \lim_{k\to+\infty}\int_K \varphi(x)F_k[T;K](x)\,dx$$

(on s'inspirera de la preuve de la Proposition 2.2). En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_k[T;K])_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega,\mathbb{C}),\ \langle T,\varphi\rangle = \lim_{k\to+\infty}\int_K \varphi(x)P_k[T;K](x)\,dx.$$

2.3. La multiplication des distributions par des fonctions C^∞

Dans cette section, nous allons nous placer d'emblée dans le contexte géométrique où Ω est un ouvert d'une sous-variété différentiable $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$ (le cas $N = n$ et $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ étant bien sûr un cas particulier majeur). Le corps des scalaires $\mathbb{K}$ est toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 2.3. *Soit $0 \leq q \leq n$ et $T \in \mathcal{D}'^q(\Omega, \mathbb{K})$ un q courant sur Ω. Si ω est une q'-forme différentielle C^∞ sur Ω (avec $q + q' \leq n$), la forme linéaire*

$$\varphi \in \mathcal{D}^{n-q-q'}(\Omega, \mathbb{K}) \longmapsto (-1)^{qq'} \langle T, \omega \wedge \varphi \rangle$$

est un $(q + q')$-courant sur Ω (à valeurs dans $\mathbb{K}$) noté $\omega \wedge T$. En particulier, si T est une distribution sur Ω et f une fonction C^∞, la forme linéaire fT définie par

$$fT \ : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}) \longmapsto \langle T, f\varphi \rangle$$

est une distribution sur Ω.

Démonstration. La preuve est immédiate et repose sur la règle de Leibniz qui permet d'affirmer que si K est un compact de Ω et $p \in \mathbb{N}$,

$$\max[N_{K,p}(\text{coeff.}(\omega \wedge \varphi))] \leq C(\omega) \max[N_{K,p}(\text{coeff.}\,(\varphi))] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-q-q'}(\Omega, \mathbb{K})$$

(les formes différentielles en jeu étant exprimées en coordonnés locales dans les ouverts de carte). □

Une conséquence très importante de cette proposition est de pouvoir ramener l'étude globale d'une distribution ou d'un courant à une étude locale. Si en effet $(\Omega_\iota)_\iota$ est un recouvrement de Ω et $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un partitionnement de l'unité subordonné à ce recouvrement (*cf.* le Lemme 1.5), on peut décomposer tout q-courant $T \in \mathcal{D}'^q(\Omega, \mathbb{K})$ sous la forme

$$T = \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k\, T,$$

au sens où, pour tout $K \subset\subset \Omega$, pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}^{n-q}_K(\Omega, \mathbb{K})$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle T, \psi_k \varphi \rangle,$$

la somme ci-dessus étant finie puisque le compact K n'intersecte qu'au plus un nombre fini de supports des ψ_k, $k \in \mathbb{N}$ (on rappelle $\sum_k \psi_k \equiv 1$, ce qui est ici fondamental).

En particulier, si l'on utilise un recouvrement de l'ouvert Ω par des cartes locales (U_ι, θ_ι), où $U_\iota = \theta_\iota(B_{x_\iota}) \subset \Omega \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$, B_{x_ι} étant une boule autour de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et $\theta_\iota \ : (t_1, ..., t_n) \longmapsto \theta_\iota(t) \in \mathbb{R}^N$, $\theta_\iota(0) = x_\iota$, un paramétrage de $\mathcal{X}$ au voisinage de x_ι, on peut régulariser le courant T en se contentant de régulariser chaque $\psi_k T$, ce que l'on peut faire en utilisant la Proposition 2.2 une fois que l'on s'est ramené, *via* le paramétrage $\theta_{\iota(k)}$, au problème de la régularisation d'un q-courant dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (en l'occurence $B_{x_{\iota(k)}}$). On peut alors énoncer le résultat suivant, complétant ainsi la Proposition 2.2 en l'adaptant au contexte géométrique :

Proposition 2.4 (régularisation des courants). *Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$. Tout q-courant $T \in \mathcal{D}'^q(\Omega, \mathbb{K})$ s'approche dans $\mathcal{D}'^q(\Omega, \mathbb{K})$ (au sens du principe de convergence donné dans la Définition*

2.9) par une suite de q-courants $(T_k)_k$, où chaque chaque T_k est représenté par une q-forme différentielle C^∞ ω_k, i.e.

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{n-q}(\Omega, \mathbb{K}),\ \langle T_k, \varphi\rangle = \int_{\mathcal{X}} \omega_k(x) \wedge \varphi(x),$$

l'intégration sur $\mathcal{X}$ d'une n-forme différentielle $\theta(x)\,\mathrm{vol}_{\mathcal{X}}(x)$, où θ est une fonction C^∞ sur $\mathcal{X}$ et $\mathrm{vol}_{\mathcal{X}}$ la forme volume induite par la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$ dans $\mathbb{R}^N$, étant définie par

$$\int_{\mathcal{X}} \theta(x)\,\mathrm{vol}_{\mathcal{X}}(x) := \int_{\mathcal{X}} \theta(x) dx_{\mathcal{X}},$$

où $dx_{\mathcal{X}}$ est la mesure de Lebesgue euclidienne sur $\mathcal{X}$ (voir l'annexe B1, Définition B.1.1 dans [**Charp**]*).*

Le fait de pouvoir définir la multiplication fT d'un q-courant par une fonction C^∞ et de disposer de fonctions plateau (*cf.* le Corollaire 1.6) nous permet de reformuler la définition d'*ordre* d'un courant (ou d'une distribution).

Définition 2.11 (la notion d'ordre reformulée). L'ordre d'un q-courant T sur Ω est la borne supérieure de tous les ordres (finis) des q-courants ρT, où ρ décrit l'ensemble des fonctions-plateau $\rho \in \mathcal{D}(\Omega, [0,1])$ subordonnées aux compacts K inclus dans Ω.

Exercice 2.12. Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{C})$ une distribution sur Ω, d'ordre strictement inférieur au minimum des multiplicités des zéros de f dans Ω. Montrer que, si $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction-test φ telle que $\mathrm{Supp}\,\varphi \cap \{f = 0\} = \emptyset$, on a $f(z)T = 0$.

2.4. Différentiation des distributions et des courants

La raison majeure pour laquelle le concept de fonction généralisée (ou de distribution) a germé dans l'esprit des physiciens tels Heaviside ou Dirac tient au fait qu'il s'avérait nécessaire, tout au moins de manière formelle, de « dériver » des phénomènes physiques qui échappaient à la modélisation en termes de fonction (comme la masse de Dirac δ_{x_0} de l'exemple 1.19) ou qui, même s'il s'agissait de fonctions, présentaient des irrégularités manifestes (comme la fonction H d'Heaviside, *cf.* exemple 1.18).

Le principe de *différentiation des distributions* (ou d'ailleurs, dans le contexte géométrique, des courants) repose sur la *formule de Stokes*, transcription dans le cadre géométrique du théorème fondamental de l'analyse de la dimension 1 à la dimension n. Nous énonçons ici le cas particulier de cette formule qui pour nous jouera un rôle majeur.

Theorème 2.13 (un cas particulier de la formule de Stokes). *Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi \in \mathcal{D}^{n-1}(\Omega, \mathbb{C})$. Alors*

$$\int_\Omega d\varphi = 0.$$

En particulier, si ω est une q-forme différentielle ($0 \le q \le n-1$) de classe C^∞ dans Ω et $\varphi \in \mathcal{D}^{n-q-1}(\Omega, \mathbb{C})$,

$$0 = \int_\Omega d[\omega \wedge \varphi] = \int_\Omega d\omega \wedge \varphi + (-1)^q \int_\Omega \omega \wedge d\varphi,$$

ou encore

$$\int_\Omega d\omega \wedge \varphi = (-1)^{q+1} \int_\Omega \omega \wedge d\varphi. \tag{2.18}$$

La formule (2.18) et le fait que tout q-courant s'approche par des q-courants réguliers (donc représentables par des q-formes différentielles) nous aiguille naturellement vers la Proposition (et Définition) suivantes.

Proposition 2.5 (différentiation d'une distribution ou d'un courant). *Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$, $0 \le q \le n-1$, et $T \in \mathcal{D}'^q(\Omega, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La $\mathbb{K}$-forme linéaire*

$$dT \ : \varphi \in \mathcal{D}^{n-q-1}(\Omega, \mathbb{K}) \longmapsto (-1)^{q+1} \langle T, d\varphi \rangle$$

est un $(q+1)$-courant sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{K}$. De plus, si $(T_k)_k$ converge vers T au sens du principe de convergence des suites de courants de la Définition 2.9, la suite $(dT_k)_k$ converge vers dT suivant le même principe, ce qui signifie que l'opérateur linéaire $T \longmapsto dT$ est continu de $\mathcal{D}'^q(\Omega, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{D}'^{q+1}(\Omega, \mathbb{K})$, équipés des topologies faibles.

Remarque 2.14. Si T est le courant correspondant à la q-forme différentielle C^∞ ω, le courant dT est, du fait de (2.18), le courant correspondant à la $(q+1)$-forme différentielle $d\omega$.

Dans le cas particulier où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et où $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$, on note naturellement le courant dT sous la forme

$$dT = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial x_j}\, dx_j,$$

où les $\partial T/\partial x_j$, $j = 1, ..., n$, sont des distributions dans Ω. En testant ce courant contre la $(n-1)$ forme $\varphi\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$, on trouve

$$\begin{aligned} \langle dT, \varphi\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \rangle &= \Big\langle dx_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi \Big\rangle \\ &= -\Big\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \Big\rangle = -\Big\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big\rangle. \end{aligned}$$

Pour tout $j = 1, ..., n$, on voit ainsi que

$$\Big\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}\,, \varphi \Big\rangle = -\Big\langle T\,, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}).$$

Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.15 (dérivées partielles d'une distribution dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$). Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ est une distribution dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, les n dérivées partielles de T dans Ω sont les distributions sur Ω définies par

$$\Big\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}\,, \varphi \Big\rangle = -\Big\langle T\,, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}). \tag{2.19}$$

Exemple 2.16 (dérivées de la masse de Dirac). Si x_0 est un point de $\mathbb{R}^n$ et $l = (l_1, ..., l_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, la distribution sur $\mathbb{R}^n$

$$\Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[\delta_{x_0}]$$

est la distribution

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \longmapsto \Big\langle \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big) [\delta_{x_0}] \,,\, \varphi \Big\rangle = (-1)^{l_1+\cdots+l_n} \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big) [\varphi](x_0).$$

Exemple 2.17 (dérivée de la fonction d'Heaviside). C'est l'exemple « historique », celui qui a motivé l'introduction des fonctions généralisées. On a,

$$\begin{aligned} \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \quad \Big\langle \frac{dH}{dt} \,,\, \varphi \Big\rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{[0,\infty[} \varphi'(t)\, dt \\ &= -\Big[\varphi(t)\Big]_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où la formule importante

$$\frac{dH}{dt} = \delta_0. \tag{2.20}$$

Exemple 2.18 (la formule de Cauchy-Pompeiu revisitée). Il résulte de la formule de Cauchy-Pompeiu (Proposition 1.2.1 du cours MHT734 [**Charp**]) que

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), \quad \varphi(0) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{\xi + i\eta}.$$

Cette formule peut être relue dans le langage des distributions en la *formule de Cauchy en termes de distributions*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \Big[\frac{1}{z}\Big] = \pi\, \delta_0 \tag{2.21}$$

(ici $1/z$ désigne la distribution-fonction dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ associée à la fonction localement inégrable $z = x + iy \mapsto 1/z$).

Exemple 2.19 (la formule de la divergence revisitée). Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière C^1 par morceaux. La formule de Stokes dans $\mathbb{R}^n$ assure que, si φ est une $n-1$-forme différentielle de classe C^1 à valeurs complexes dans un voisinage de $\overline{U}$, *i.e*

$$\Phi := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \varphi_j \bigwedge_{l \neq j} dx_l, \quad \varphi_j \in C^1(\overline{U}, \mathbb{C}),$$

on a

$$\int_U d\Phi = \int_{\partial U} \Phi, \tag{2.22}$$

le bord ∂U étant orienté par le fait que la normale pointe vers l'extérieur [2] (règle du « bonhomme d'Ampère »). Avec l'orientation choisie, on vérifie en paramétrant le bord au voisinage d'un point régulier courant [3] que

$$\int_{\partial U} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \varphi_j \bigwedge_{l \neq j} dx_l = \int_{\partial U} \langle \vec{\varphi}(y), \vec{n}_{\mathrm{ext}}(y) \rangle \, d\sigma_{\partial U}(y),$$

2. Un repère $(\xi_1, ..., \xi_n)$ sur l'espace tangent $T_y(\partial U)$ au point y est direct si et seulement si $(\xi_1, ..., \xi_n, \vec{n}_{\mathrm{ext}}(y))$ est un repère direct de $\mathbb{R}^n$, l'orientation sur $\mathbb{R}^n$ étant l'orientation canonique.

3. Pour s'en convaincre, on pourra se ramener localement à un paramétrage local de ∂U au voisinage d'un point régulier $y \in (\partial U)^{\mathrm{reg}}$ sous forme de graphe : $(t_1, ..., t_{n-1}) \mapsto \theta(t) = (t_1, ..., t_{n-1}, \theta_n(t_1, ..., t_{n-1}))$.

où $d\sigma_{\partial U}$ désigne la mesure de Lebesgue eucldienne sur ∂U (notée aussi $dx_{\partial U}$ (*cf.* Annexe B1, Définition B.1.1 dans [**Charp**]) et $\vec{n}_{\rm ext}(y) = (\nu_1(y), ..., \nu_n(y))$ est le vecteur unitaire normal à ∂U en y et pointant vers l'extérieur de $\overline{U}$. En calculant

$$d\Phi = \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}\Big)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

on voit que (2.22) se ramène à la *formule de la divergence*[4] :

(2.23)

$$\int_U \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}\Big)\, dx = \int_{\partial U} \langle \vec{\varphi}(y), \vec{n}_{\rm ext}(y)\rangle \, d\sigma_{\partial U}(y) = \int_{\partial U} \Big(\sum_{j=1}^n \varphi_j(y)\nu_j(y)\Big) d\sigma_{\partial U}(y).$$

Si l'on prend $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ pour j fixé dans $\{1, ..., n\}$ et que l'on fixe les autres φ_l, $l \neq j$, identiquement nulles, on voit que cette formule (2.23) s'interprète en termes de distributions sur $\mathbb{R}^n$ comme la liste des formules

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,[\chi_U] = -\nu_j\, \sigma_{\partial U}\,, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.24}$$

Exemple 2.20 (la première formule de Green revisitée). Si U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et à frontière de classe C^1, il résulte de la première formule de Green (*cf.* la Proposition III.1.1 du cours MHT734[5]) que

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \quad \int_U \Delta[\varphi](x)\, dx = \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_{\rm ext}}\,[\varphi]\, d\sigma_{\partial U},$$

où $d\sigma_{\partial U}$ désigne la mesure de Lebesgue euclidienne sur le bord de U (sous-variété différentiable de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$). Cette formule se ré-interprète au sens des distributions en la formule

$$\Delta[\chi_U] = -\frac{\partial}{\partial \vec{n}_{\rm ext}}\,[\sigma_{\partial U}]. \tag{2.25}$$

Au travers de cette formule, on comprend par exemple pourquoi, en dimension 2, calculer le laplacien d'une image discrète aide à mettre en évidence les lignes de contour, par exemple le bord des objets, figurant sur cette image.

Exemple 2.21 (la seconde formule de Green et le laplacien). Dans le cours de MHT734 (section III.2 de ce cours, voir en particulier le Lemme utilisé dans la preuve du Théorème III.2.1, [**Charp**]), ont été établies (à partir de la seconde formule de Green) les formules

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \log \|x\|\, \Delta[\varphi](x)\, dx = 2\pi \varphi(0)$$

(en dimension 2) et, si $n > 2$ et ω_n désigne la surface euclidienne de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta[\varphi](x)}{\|x\|^{n-2}}\, dx = n(2-n)\omega_n\, \varphi(0) = \frac{n(2-n)\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\, \varphi(0).$$

---

4. Voir aussi la section III.1 dans [**Charp**].

5. Il suffit d'appliquer la formule de la divergence (2.23) lorsque $(\varphi_1, ..., \varphi_n) = \nabla[\varphi]$, ∇ désignant la prise de gradient.

Ces deux formules se lisent en termes de distributions respectivement

$$\begin{aligned} \Delta\Big[\log\sqrt{x^2+y^2}\Big] &= 2\pi\delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}) \\ \Delta\Big[\frac{1}{\|x\|^{n-2}}\Big] &= \frac{n(2-n)\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}\,\delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Exercice 2.22. Montrer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les formules

$$\frac{d\log|x|}{dx} = \mathrm{VP}\,[1/x] \quad \& \quad \frac{d}{dx}\,[\mathrm{VP}[1/x]] = -\mathrm{PF}[1/x^2].$$

Exprimer la dérivée $\frac{d^p}{dx^p}[\log|x|]$, $p\in\mathbb{N}^*$ en termes des distributions *Valeur Principale* ou *Partie Finie* de Hadamard introduites dans la sous-section 1.4.3.

Exercice 2.23. Soit $N\in\mathbb{N}$ et $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{C},\mathbb{C})$ la distribution $\mathrm{VP}[1/z^N]$ introduite dans la sous-section 1.4.4. Vérifier la formule

$$\frac{\partial T}{\partial\overline{z}} = \frac{\pi(-1)^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{\partial^N}{\partial z^{N-1}}\,[\delta_{(0,0)}].$$

Exercice 2.24 (formule de Lelong-Poincaré). Montrer que, si f est une fonction méromorphe non identiquement nulle dans un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, on a, en termes de 2-courants dans $\mathbb{C}$, la *formule de Lelong-Poincaré* :

$$\partial\overline{\partial}\Big[\log|f|^2\Big] = \pi\Big(\sum_{\alpha\ \text{zéro de}\ f}\mathrm{mult.}\,(\alpha)\,\delta_\alpha - \sum_{\beta\ \text{pole de}\ f}\mathrm{ordre}(\beta)\,\delta_\beta\Big)\,dx\wedge dy$$

Exercice 2.25 (distributions de support l'origine). Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ une distribution telle que $\langle\mathcal{T},\varphi\rangle=0$ si $0\notin\mathrm{Supp}\,\varphi$. Montrer que T est d'ordre fini m et que si P est une fonction monomiale de degré au moins égal à $m+1$, la distribution $P\cdot T$ est la distribution nulle. En déduire que T s'exprime sous la forme

$$T = \sum_{l_1+\cdots+l_n\le m}\alpha_{\underline{l}}\Big(\prod_{j=1}^n\frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)\,[\delta_0]$$

où les $\alpha_{\underline{l}}$ sont des scalaires du corps $\mathbb{K}$.

Exercice 2.26. Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ telle que $z^{m+1}\,T=0$ pour $m\in\mathbb{N}$. Montrer (en utilisant le résultat établi à l'exercice 2.25) qu'il existe $M\in\mathbb{N}$ et des coefficients complexes α_{l_1,l_2}, $0\le l_1\le m$, $0\le l_2\le M$, tels que la distribution T s'exprime

$$T = \sum_{l_1=0}^m\sum_{l_2=0}^M\alpha_{l_1,l_2}\,\frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial z^{l_1}\partial\overline{z}^{l_2}}\,[\delta_{(0,0)}].$$

Exercice 2.27 (distributions homogènes). Soit $\kappa\in\mathbb{R}$. Une distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est dite *homogène de degré* κ si elle vérifie dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ l'identité d'Euler

$$\sum_{j=1}^n x_j\,\frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa\,T. \tag{2.27}$$

Montrer que δ_0 est homogène en précisant son degré d'homogénéité. Si $n=1$, montrer que $\mathrm{VP}[1/x]$ est homogène de degré -1 et (en utilisant le résultat de l'exercice 2.25) déterminer toutes les distributions homogènes de degré -1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que, si T est une distribution sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\ \forall\,\lambda>0,\quad F_\varphi(\lambda) := \Big\langle T, x\mapsto\varphi(\lambda x)\Big\rangle = \langle T,\varphi\rangle \tag{2.28}$$

(on dit que T est *invariante par homothétie*), alors T est homogène de degré $-n$ (on différenciera par rapport à λ les fonctions F_φ). Montrer, réciproquement, que toute distribution homogène de degré $-n$ sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par homothétie.

2.5. La formule des sauts

2.5.1. Le cas de la dimension 1.

DÉFINITION 2.28 (sauts de discontinuité jusqu'à un ordre prescrit). Soit $m \in \mathbb{N}$. Une fonction (à valeurs réelles ou complexes) de classe C^{m+1} dans un voisinage épointé $\Omega =]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\}$ de l'origine est dite *présenter des sauts de discontinuité jusqu'à l'ordre* $m \in \mathbb{N}$ *à l'origine* si et seulement si

— pour tout $l = 0, ..., m$, les limites

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{d^k f}{dx^k}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(0_-) \quad \& \quad \lim_{x\to 0_+} \frac{d^k f}{dx^k}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(0_+)$$

existent dans $\mathbb{C}$;

— $d^{m+1}f/dx^{m+1}$ représente un élément de $L^1_{\text{loc}}(]-\epsilon,\epsilon[, \mathcal{B}(]-\epsilon,\epsilon[, dx)$.

On appelle alors *saut de discontinuité de* f *en* 0 *à l'ordre* l, $l = 0, ..., m$, le nombre complexe

$$\sigma_l[f;0] = \frac{d^k f}{dx^k}(0_+) - \frac{d^k f}{dx^k}(0_-).$$

La *formule des sauts* relie ces sauts de discontinuité, les dérivées successives de la distribution-fonction $f \in \mathcal{D}'(]-\epsilon,\epsilon[, \mathbb{C})$ et les distributions-fonction $[d^l f/dx^l]$, $l = 0, ..., m+1$, correspondant aux dérivés $d^l f/dx^l$, $l = 0, ..., m+1$, considérées comme des repésentants d'éléments de $L^1_{\text{loc}}(]-\epsilon,\epsilon[, \mathcal{B}(]-\epsilon,\epsilon[, dx)$.

PROPOSITION 2.6 (formule des sauts en dimension 1). *Soit* $m \in \mathbb{N}$ *et* f *une fonction à valeurs complexes de classe* C^{m+1} *dans un voisinage épointé* $]-\epsilon,\epsilon[\setminus\{0\}$ *de l'origine et présentant des sauts de discontinuité jusqu'à l'ordre* m *en* 0. *Pour tout* $l = 1, ..., m+1$, *on a*

$$\frac{d^l}{dx^l}[f] = \left[\frac{d^l f}{dx^l}\right] + \sum_{\lambda=0}^{l-1} \sigma_\lambda[f,0]\, \frac{d^{l-1-\lambda}}{dx^{l-1-\lambda}}[\delta_0]. \tag{2.29}$$

DÉMONSTRATION. On voit immédiatement que prouver les relations (2.29) revient à prouver la relation au premier cran ($l = 1$) ; il suffit ensuite d'itérer ce résultat en remplaçant f par ses dérivées successives. On a, si $\varphi \in \mathcal{D}(]-\epsilon,\epsilon[, \mathbb{C})$,

$$\left\langle \frac{d}{dx}[f], \varphi \right\rangle = -\int f(x)\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{|x|>\epsilon} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \tag{2.30}$$

par le théorème de convergence dominée (f est localement intégrable sur $]-\epsilon,\epsilon[$ puisque les limites à gauche et à droite en 0 existent et que f est au moins C^1 dans $]-\epsilon,\epsilon[\setminus\{0\}$). Or, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_{x<-\epsilon} f(x)\,\varphi'(x)\,dx &= f(-\epsilon)\varphi(-\epsilon) - \int_{x<-\epsilon} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\ \int_{x>\epsilon} f(x)\,\varphi'(x)\,dx &= -f(\epsilon)\varphi(\epsilon) - \int_{x>\epsilon} f'(x)\,\varphi(x)\,dx. \end{aligned}$$

En reportant dans (2.30), puis en faisant tendre ϵ vers 0, il vient

$$\begin{aligned}\Big\langle \frac{d}{dx}[f],\varphi\Big\rangle &= \sigma_0[f;0]\,\varphi(0)+\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{|x|>\epsilon} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \sigma_0[f;0]\,\varphi(0)+\Big\langle \Big[\frac{df}{dx}\Big],\varphi\Big\rangle\end{aligned}$$

(comme df/dx est localement intégrable sur $]-\epsilon,\epsilon[$, on peut encore appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue). C'est la formule demandée. □

Remarque 2.29. Si la fonction f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble de points isolés $\mathrm{Sing}(f)$ en lesquels elle admet un saut de discontinuité à l'ordre 0, on a, au sens des distributions, la *formule des sauts globale*

$$\frac{d}{dx}\,[f]=\Big[\frac{df}{dx}\Big]+\sum_{\alpha\in\mathrm{Sing}\,(f)}\sigma_0[f;\alpha]\,\delta_\alpha. \tag{2.31}$$

2.5.2. La brique de base du calcul symbolique. Une famille de distributions sur $\mathbb{R}$ jouant un rôle important dans les sciences de l'ingénieur (en relation avec la transformée de Laplace [6], on le verra ultérieurement) est la famille de distributions-fonction $L_{p_0,\alpha}$, $p_0,\alpha\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, où

$$L_{p_0,\alpha}(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,e^{p_0 t}\,t^{\alpha-1}\,H(t),\ \ t\in\mathbb{R}^*. \tag{2.32}$$

Comme $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, cette fonction (prolongée par 0 en 0) est bien localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et définit donc une distribution-fonction que nous noterons aussi $L_{p_0,\alpha}$. Comme la variable réelle sous-jacente ici est le temps, il est naturel de la noter t plutôt que x. Notons que la restriction de toutes ces distributions à $]-\infty,0[$ est la distribution nulle sur cet intervalle. La proposition suivante est une application immédiate de la formule des sauts (2.29).

Proposition 2.7 (la brique de base du calcul symbolique). *Si $\alpha=k\in\mathbb{N}^*$ (alors $\Gamma(\alpha)=(k-1)!$), on a, pour tout $p_0\in\mathbb{C}$,*

$$\Big(\frac{d}{dt}-p_0\,\mathrm{Id}\Big)^k[L_{p_0,k}]=\delta_0\quad\text{dans}\quad\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{C}). \tag{2.33}$$

Démonstration. Si nous notons pour simplifier $D=d/dt$, la formule des sauts ((2.29), $l=1$) donne

$$D[L_{p_0,1}]=p_0e^{p_0t}H+\delta_0 \Longleftrightarrow (D-p_0\mathrm{Id})\,[L_{p_0,1}]=0.$$

En réappliquant (2.29) ($l=1$ et $l=2$) à $L_{p_0,2}\ :t\mapsto te^{p_0t}H(t)$, on obtient

$$D[L_{p_0,2}]=p_0L_{p_0,2}+L_{p_0,1}\quad\&\quad D^2[L_{p_0,2}]=2p_0L_{p_0,1}+p_0^2L_{p_0,2}+\delta_0,$$

soit, par combinaison linéaire,

$$(D-p_0\mathrm{Id})^2[L_{p_0,2}]=0.$$

On continue ainsi de proche en proche, en exploitant le fait que pour $k\geq 2$,

$$(D-p_0\mathrm{Id})[L_{p_0,k}]=[L'_{p_0,k}]-p_0L_{p_0,k-1}=L_{p_0,k-1}.$$

□

6. C'est la brique de base de ce que l'on appelera le ≪ calcul symbolique ≫, on y reviendra .

2.5.3. La formule des sauts dans l'espace. Nous allons étendre au cadre de l'espace la formule des sauts (2.29) au moins au cran $l = 1$.

PROPOSITION 2.8 (formule des sauts dans l'espace). *Soit $U \subset \Omega$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\overline{U} \subset \Omega$ et que la frontière de U soit une sous-variété différentiable de dimension $n-1$ de Ω. Soit $f\ : \Omega \setminus \partial U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 dont les restrictions $f_{|U}$ et $f_{\Omega\setminus\overline{U}}$ se prolongent en des fonctions continues au voisinage de ∂U (on note $f_{\rm int}$ et $f_{\rm ext}$ ces prolongements). On suppose aussi que toutes les dérivées partielles $\partial f/\partial x_j\ : \Omega \setminus \partial U \to \mathbb{C}$ définissent des fonctions localement intégrables dans Ω. On a, pour tout $j = 1, ..., n$, les formules suivantes (au sens des distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{C})$) :*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[f] = \Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big] + (f_{\rm ext} - f_{\rm int})\,\nu_j\, d\sigma_{\partial U}, \tag{2.34}$$

où $\vec{n}_{\rm ext}(y) = (\nu_1(y), ..., \nu_n(y))$, $y \in \partial U$, désigne le vecteur normal unitaire à ∂U en y pointant vers l'extérieur de U.

DÉMONSTRATION. Le résultat est local et nous pouvons remplacer Ω par un voisinage relativement compact dans Ω d'un point y_0 de ∂U (dans $\Omega \setminus \partial U$, les formules (2.34) sont immédiates). Nous supposerons dans un premier temps que les restrictions de f à U et $\Omega \setminus \overline{U}$ se prolongent de manière C^1 (et non plus seulement continuement) à un voisinage de ∂U. La preuve des relations (2.34) repose alors sur la *formule de la divergence* (2.23) rappelée (et transcrite dans le langage des distributions) dans l'exemple 2.19. Grâce à cette formule, on obtient (en raisonnant à l'intérieur de U, puis à l'extérieur, avec la fonction $f\varphi$), pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} -\int_U f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\,dx &= \int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,\varphi(x)\,dx - \int_{\partial U} f_{\rm int}(y)\varphi(y)\nu_j(y)\,d\sigma_{\partial U}(y) \\ -\int_{\Omega\setminus\overline{U}} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\,dx &= \int_{\Omega\setminus\overline{U}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,\varphi(x)\,dx + \int_{\partial U} f_{\rm ext}(y)\varphi(y)\nu_j(y)\,d\sigma_{\partial U}(y)\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

En ajoutant les deux identités (2.35), on obtient bien la formule (2.34) voulue.

Si l'on fait simplement l'hypothèse que les restrictions de f à U et $\Omega\setminus\overline{U}$ se prolongent continuement (et non plus C^1) à un voisinage de ∂U, la première des identités (2.34) reste valable lorsque U est remplacé par un ouvert « rétracté » (sur lui-même) $\widetilde{U}$. En prenant une suite de tels rétractés $\widetilde{U}_k$ tels que la suite $(\chi_{U_k})_k$ tende vers χ_U et la suite $(\sigma_{\partial U_k})_k$ vers $\sigma_{\partial U}$ au sens des mesures [7] (ce qu'il est possible de faire), on voit que cette formule reste valable pour U (par passage à la limite en k). On fait la même chose pour la seconde formule en rétractant cette fois $\Omega \setminus \overline{U}$ sur lui-même, puis en l'approchant avec une suite de tels rétractés. Les formules (2.35) restent donc valables lorsque les restrictions de f à U et $\Omega \setminus \overline{U}$ se prolongent continuement à un voisinage de ∂U et la proposition 2.8 est aussi démontrée dans ce cas. □

REMARQUE 2.30. Le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}_{x_1,\dots,x_n,t}$ et U est le demi-espace $\{(x,t)\,;\, t > 0\}$ est particulièrement important pour les applications lorsque l'on travaille en espace-temps.

7. Une suite $(\mu_k)_k$ de mesures de Radon sur Ω converge vers une mesure μ si la suite $(\langle \mu_k, \varphi\rangle)_k$ converge vers $\langle \mu, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega, \mathbb{C})$.

CHAPITRE 3

Support et convolution

3.1. Support et support singulier d'une distribution ou d'un courant

Aux fins de localiser les distributions ou tout au moins leur régularité, on introduit les notions de *support* et de *support singulier*. La définition de ces deux notions repose sur la proposition suivante, conséquence du lemme de partition de l'unité 1.5.

Proposition 3.1. *Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ une distribution dans Ω, à valeurs dans $\mathbb{K}$ (resp. $T \in \mathcal{D}'^{\,q}(\Omega, \mathbb{K})$ un q-courant dans Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$, $0 \leq q \leq n$).*

- *L'union de tous les sous-ensembles ouverts $\Omega_\iota \subset \Omega$ tels que la restriction $T_{|\Omega_\iota}$ soit la distribution nulle (resp. le q-courant nul) dans Ω_ι est encore un ouvert $\Omega'_T \subset \Omega$ tel que $T_{|\Omega'} \equiv 0$. L'ouvert Ω'_T est le plus grand ouvert de Ω ayant cette propriété.*
- *L'union de tous les sous-ensembles ouverts $\widetilde{\Omega}_\iota \subset \Omega$ tels que la restriction $T_{|\widetilde{\Omega}_\iota}$ coincide en tant que distribution (resp. en tant que q-courant) dans $\widetilde{\Omega}_\iota$ avec la distribution-fonction f_ι, où $f_\iota \in C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ (resp. avec le q-courant-forme différentielle associé à la q-forme différentielle C^∞ ω_ι), est un ouvert $\Omega''_T \subset \Omega$ tel que la restriction $T_{|\Omega''}$ coincide en tant que distribution (resp. en tant que q-courant) avec la distribution-fonction f, où $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ (resp. avec le q-courant-forme différentielle ω, où ω est une q-forme différentielle C^∞ dans Ω). L'ouvert Ω''_T est le plus grand ouvert de Ω ayant cette propriété.*

Démonstration. La preuve dans la cadre géométrique de la théorie des courants englobe celle dans le cadre distributions ; on donne donc la preuve dans le cadre plus général où $T \in \mathcal{D}'^{\,q}(\Omega, \mathbb{K})$. On introduit (*cf.* Lemme 1.5) une partition de l'unité $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ subordonnée au recouvrement de Ω'_T par les Ω_ι (*resp.* de Ω''_T par les $\widetilde{\Omega}_\iota$). Dans le premier cas, on voit que, pour toute $(n-q)$-forme-test dans $\mathcal{D}(\Omega'_T, \mathbb{K})$,

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \mathrm{Supp}\,\psi_k \cap \mathrm{Supp}\,\varphi \neq \emptyset}} \langle T, \psi_k \varphi\rangle = 0$$

car $\mathrm{Supp}\,(\psi_k\varphi) \subset \Omega_{\iota(k)}$ et que $T_{|\Omega_{\iota(k)}} = 0$. Dans le second cas, on constate que, pour toute $(n-q)$-forme-test dans $\mathcal{D}(\Omega''_T, \mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi\rangle &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \mathrm{Supp}\,\psi_k \cap \mathrm{Supp}\,\varphi \neq \emptyset}} \langle T, \psi_k\varphi\rangle = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \mathrm{Supp}\,\psi_k \cap \mathrm{Supp}\,\varphi \neq \emptyset}} \int_{\widetilde{\Omega}_{\iota(k)}} \omega_{\iota(k)} \wedge \psi_k\,\varphi \\ &= \int_{\Omega''_T} \Big(\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \mathrm{Supp}\,\psi_k \cap \mathrm{Supp}\,\varphi \neq \emptyset}} \psi_k \omega_{\iota(k)} \Big) \wedge \varphi = \int_{\Omega''_T} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k \omega_{\iota(k)} \Big) \wedge \varphi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On définit bien une q-forme C^∞ dans Ω''_T en posant

$$\omega = \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k\, \omega_{\iota(k)},$$

et le q-courant T coincide dans Ω''_T (d'après (3.1)) avec le q-courant forme différentielle correspondant à cette q-forme C^∞ ω. □

Cette proposition nous conduit naturellement aux définitions suivantes.

Définition 3.1. Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ une distribution dans Ω, à valeurs dans $\mathbb{K}$ (*resp.* $T \in {\mathcal{D}'}^q(\Omega, \mathbb{K})$ un q-courant dans Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$, $0 \leq q \leq n$). Soient $\Omega'_T \subset \Omega''_T$ les deux ouverts définis dans la Proposition 3.1.

— Le *support de* Ω est le sous-ensemble fermé de Ω défini comme

$$\operatorname{Supp} T = \Omega \setminus \Omega'_T.$$

Le support de T est donc le plus petit fermé de Ω dans lequel « vit » la distribution ou le courant T.

— Le *support singulier de* Ω est le sous-ensemble fermé de Ω défini comme

$$\mathrm{SS}\,(T) = \Omega \setminus \Omega''_T.$$

Le support singulier de T est donc le plus petit fermé de Ω dans lequel « vivent » toutes les « irrégularités » de la distribution ou du courant T.

Remarque 3.2. Le support singulier d'une distribution ou d'un courant est toujours inclus dans le support de cette distribution ou ce courant.

Exemple 3.3. Si T est une distribution-fonction $\dot{f}$, $\dot{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), dx)$, le support de $T = \dot{f}$ est le complémentaire du plus grand ouvert de Ω sur lequel $\dot{f}$ admet un un représentant identiquement nul dx-presque partout. Ceci vaut aussi si T est un q-courant sur $\Omega \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$, représentable par une classe $\dot{\omega}$ de q-forme différentielle dont les coefficients (exprimés dans les cartes locales sur $\mathcal{X}$ dans Ω) sont des éléments de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), dx)$: le support de T est le complémentaire du plus grand ouvert de Ω sur lequel $\dot{\omega}$ admet un représentant dont les coefficients (exprimés dans les cartes locales sur $\mathcal{X}$ dans Ω) sont identiquement nuls $dx_{\mathcal{X}}$ presque partout. Lorsque $\dot{f}$ ou $\dot{\omega}$ ont des représentants continus, la définition du support de $\dot{f}$ ou $\dot{\omega}$ (pensés comme distribution ou courant) est donc cohérente avec celle du support des mêmes objets, pensés cette fois comme fonction ou forme différentielle.

Exemple 3.4. Le support (comme le support singulier) de la masse de Dirac δ_{x_0} en un point $x_0 \in \Omega$ est $\{x_0\}$. Le support (comme le support singulier) de la distribution $\delta_\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ associée à un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ (*i.e.* un sous-groupe libre de rang n de $\mathbb{R}^n$) :

$$\delta_\Lambda \ : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \longmapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\lambda)$$

(dite *peigne de Dirac associé au réseau* Λ) est exactement le réseau Λ.

Exemple 3.5. Le support de la distribution $\mathrm{VP}[1/x] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir (1.15)) est égal à $\mathbb{R}$, tandis que son support singulier est égal à $\{0\}$. Support et support singulier sont ici deux fermés bien différents. Il en est de même pour la distribution $\mathrm{VP}(1/f) \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{C})$, où f est une fonction holomorphe dans un ouvert connexe de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ (en particulier $\Omega = \mathbb{C}$ et $f(z) = z$) : le support de cette distribution est égal à Ω tout entier, tandis que le support singulier est $\{\alpha \in \Omega\,;\, f(\alpha) = 0\}$. Les distributions-fonction

$$\frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \quad \& \quad \frac{\|x\|^{2-n}\,\pi^{n/2}}{n(2-n)\Gamma(n/2)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$$

introduites en (2.26) dans l'Exemple 2.21 sont aussi de support $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$ et de support singulier l'origine (dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$).

On verra plus loin que l'opération de *multiplication* (ou *resp. multiplication extérieure* des distributions (*resp.* des courants) est une opération posant en général de très gros problèmes la rendant souvent en pratique impossible (au moins dans l'absolu). Il est cependant un cas particulier bien utile où cette opération prend son sens.

PROPOSITION 3.2. *Soit Ω un ouvert d'une sous-variété différentiable $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient T_1 et T_2 respectivement un q_1-courant et un q_2-courant sur Ω (à valeurs dans $\mathbb{K}$), tels que $0 \leq q_1 + q_2 \leq n$. Si la condition $\mathrm{SS}\,(T_1) \cap \mathrm{SS}\,(T_2) = \emptyset$ est remplie, la définition du (q_1+q_2)-courant $T_1 \wedge T_2$ (noté $T_1 \times T_2$ ou $T_1 \cdot T_2$ si $q_1 = q_2 = 0$, i.e. si les courants T_1 et T_2 sont des distributions) est licite.*

DÉMONSTRATION. Soit $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de l'unité subbordonnée au recouvrement de Ω par les deux ouverts $\Omega_1 := \Omega \setminus \mathrm{SS}\,(T_1)$ et $\Omega_2 := \Omega \setminus \mathrm{SS}\,(T_2)$ (*cf.* le Lemme 1.5). On pose

$$\Psi_j := \sum_{\{k\in\mathbb{N}\,;\,\iota(k)=j\}} \psi_k \quad j = 1,2. \tag{3.2}$$

On note ω_j la q_j-forme différentielle C^∞ sur Ω_j (à valeurs dans $\mathbb{K}$), telle que $(T_j)_{|\Omega_j} = \omega_j$ (cette forme existe bien du fait de la Proposition 3.1, item 2). On définit un (q_1+q_2)-courant $T_1 \wedge T_2$ en posant, pour toute forme-test $\varphi \in \mathcal{D}^{n-q_1-q_2}(\Omega,\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} \langle T_1 \wedge T_2, \varphi\rangle &= \langle T_1 \wedge T_2, \Psi_1\varphi + \Psi_2\varphi\rangle \\ &= (-1)^{q_1q_2}\langle T_2\,,\,\omega_1 \wedge \Psi_1\varphi\rangle + \langle T_1\,,\,\omega_2 \wedge \Psi_2\varphi\rangle. \end{aligned}$$

La construction de ce courant est « robuste », *i.e.* ne dépend pas de la partition $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ subordonnée au recouvrement $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ utilisée. □

REMARQUE 3.6. Dans le cas où T_1 et T_2 sont des distributions, f_1 et f_2 désignant les fonctions C^∞ correspondant aux restrictions de T_1 et T_2 respectivement aux ouverts $\Omega_1 = \Omega \setminus \mathrm{SS}\,(T_1)$ et $\Omega_2 = \Omega \setminus \mathrm{SS}\,(T_2)$, la distribution $T_1 \cdot T_2$ est définie (lorsque la condition $\mathrm{SS}\,(T_1) \cap \mathrm{SS}\,(T_2) = \emptyset$ est satisfaite) par

$$\langle T_1 \cdot T_2\,,\,\varphi\rangle = \langle T_2\,,\,f_1\Psi_1\varphi\rangle + \langle T_1\,,\,f_2\Psi_2\varphi\rangle, \tag{3.3}$$

où les fonctions C^∞ Ψ_j, $j = 1,2$, ont été définies en (3.2).

3.2. Distributions (courants) à support compact, distributions causales

3.2.1. Distributions ou courants à support compact. Une classe importante de distributions ou de courants sera appelée à jouer ultérieurement un rôle important.

Définition 3.7 (distributions ou courants à support compact). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (*resp.* un ouvert d'une sous-variété différentiable $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension n). Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ (*resp.* un q-courant $T \in \mathcal{D}'^q(\Omega, \mathbb{K})$), où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est dite *à support compact* (*resp.* est dit *à support compact*) si $K = \operatorname{Supp} T$ est un sous-ensemble compact (*i.e* fermé borné de $\mathbb{R}^n$, *resp.* fermé borné de $\mathbb{R}^N$) inclus dans Ω.

Remarque 3.8. Si T est un q-courant sur $\Omega \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ à support compact et si $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{X}, [0,1])$, avec $\operatorname{Supp} \rho \subset \Omega$, est une fonction-plateau (*cf.* le Corollaire 1.6), on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-q}(\Omega, \mathbb{K}),\ \langle T\,,\,\varphi\rangle = \langle T\,,\,\rho\varphi\rangle$$

car la $(n-q)$-forme $(1-\rho)\varphi$ est identiquement nulle au voisinage de $K = \operatorname{Supp} T$. Le courant T coincide donc avec ρT et se prolonge ainsi naturellement à un q-courant $\widetilde{T} \in \mathcal{D}'^q(\mathcal{X}, \mathbb{K})$,

$$\widetilde{T}\ : \varphi \in \mathcal{D}^{n-q}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) \longmapsto \langle T\,,\,\rho\,\varphi\rangle,$$

ce prolongement étant indépendant du choix de la fonction-plateau ρ. On pourra donc ensuite toujours envisager les distributions (*resp.* courants) à support compact dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (*resp.* d'une sous-variété différentiable $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$) comme définis sur $\mathbb{R}^n$ tout entier (*resp.* sur la sous-variété $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ toute entière).

Le critère quantitatif suivant (hérité de la Proposition 1.2) permet de caractériser cette classe de distributions ou de courants. Nous donnons ici ce critère dans sa formulation la plus large, c'est-à-dire géométrique, englobant ainsi le cadre des distributions et celui des courants.

Proposition 3.3 (caractérisation des distributions ou courants à support compact). *Soit $\mathcal{X}$ une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et K un compact de $\mathcal{X}$, i.e. un compact de $\mathbb{R}^N$ inclus dans $\mathcal{X}$. Un q-courant $T \in \mathcal{D}'^q(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ ($0 \leq q \leq n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est à support compact, de support inclus dans K, si et seulement si il est d'ordre fini* ordre(T) *et si, pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C_\eta > 0$ telle que, si $K_\eta := \{x \in \mathcal{X}\,;\, \operatorname{dist}_{\mathbb{R}^N}(x, K) \leq \eta\}$, on ait*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathbb{K}), \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C_\eta\, N_{K_\eta,\, \mathrm{ordre}(T)}(\varphi). \tag{3.4}$$

Il faut ici entendre que $N_{K_\eta,\,\mathrm{ordre}(T)}(\varphi)$ est calculé en utilisant un recouvrement de K_η par des ouverts de carte U_ι et le recours au paramétrages locaux $\theta_{x_\iota}\ : B_{x_\iota} \to U_\iota$; la constante C_η est ici tributaire du choix du recouvrement.

Démonstration. Soit T un q-courant sur $\mathcal{X}$, de support compact $K \subset\subset \mathcal{X}$. D'après la définition 2.11 et le fait que $T = \rho T$ dès que ρ est une fonction plateau de support dans $\mathcal{X}$ identiquement égale à 1 au voisinage de $K = \operatorname{Supp} T$ (*cf.* la Remarque 3.8), T est d'ordre fini, l'ordre de T étant celui de ρT quelque soit la fonction plateau ρ choisie, pourvue qu'elle vaille identiquement 1 au voisinage de K. On note cet ordre ordre(T). Soit $\eta > 0$ et $\rho_\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{X}, [0,1])$ une fonction plateau identiquement égale à 1 au voisinage de K et de support inclus dans l'ouvert $\bigcup_{x \in K} (\mathcal{X} \cap B_{\mathbb{R}^N}(x, \eta))$. D'après la Remarque 3.8, le critère de la Proposition 1.2 et la règle de Leibniz , on a

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-q}(\mathcal{X}, \mathbb{K}),\ |\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \rho_\eta\, \varphi\rangle| \quad &\leq \quad C(K_\eta)\, N_{K_\eta,\, p(K_\eta)}(\rho_\eta \varphi)\\ &\leq \quad C_\eta\, N_{K_\eta,\, \mathrm{ordre}(T)}(\varphi),\end{aligned}$$

ce qui donne bien (3.4). Réciproquement, si T est d'ordre fini et vérifie les estimations (3.4), on voit que la restriction de T à tout ouvert $\mathcal{X} \setminus K_\eta$, pour tout $\eta > 0$, est identiquement nulle. La restriction de T au complémentaire de K est identiquement nulle, ce qui prouve que T est de support compact, inclus dans K. □

3.2.2. Distributions et courants à support ponctuel. Le cas particulier où $K = \{x_0\}$ est à étudier à part. Son étude repose sur la proposition suivante.

PROPOSITION 3.4 (distributions à support l'origine dans $\mathbb{R}^n$). *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ *une distribution dans* $\mathbb{R}^n$*, à valeurs dans* $\mathbb{K}$*, de support l'origine* $\{0\} = \{(0, ..., 0)\}$ *et d'ordre* M*. Il existe une collection de scalaires* $a_{\underline{l}}[T] \in \mathbb{K}$, $\underline{l} = (l_1, ..., l_n)$ *avec* $l_1 + \cdots + l_n \leq M$ *tels que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), \quad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{\substack{\underline{l} \in \mathbb{N}^n \\ l_1 + \cdots + l_n \leq M}} a_{\underline{l}}[T] \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}} \Big) [\varphi](0). \tag{3.5}$$

DÉMONSTRATION. On remarque dans un premier temps que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ est telle que $\varphi(x) = o(\|x\|^M)$ au voisinage de l'origine, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Il suffit, pour voir cela, de considérer une fonction plateau $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ identiquement égale à 1 au voisinage de l'origine (de support par exemple dans $B(0, 1)$) et de remarquer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \rho(\cdot/\epsilon)\, \varphi \rangle| \leq C\, N_{\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0,1)}, M} \left(\varphi \rho(\cdot/\epsilon)\right) = C\, N_{\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)}, M} \left(\varphi \rho(\cdot/\epsilon)\right) \tag{3.6}$$

d'après (3.4) (Proposition 3.3). Il résulte du fait qe $\varphi(x) = o(\|x\|^M)$ et de la règle de Leibniz que

$$\lim_{\epsilon \to 0} N_{\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)}, M} (\varphi\, \rho(\cdot/\epsilon)) = 0,$$

et l'on en déduit donc, en faisant tendre ϵ vers 0 dans (3.6), qu'alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$ si $\varphi(x) = o(\|x\|^M)$ au voisinage de l'origine.

Soit maintenant une fonction-test quelconque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral l̀'ordre M, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) \quad = & \sum_{\substack{\underline{l} \in \mathbb{N}^n \\ l_1 + \cdots + l_n \leq M}} \frac{1}{l_1! \cdots l_n!} \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}} \Big) [\varphi](0)\, x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \\ & + \frac{1}{M!} \int_0^1 (1 - \tau)^M \mathbb{D}_{\tau x}^{M+1} [\varphi](x, ..., x)\, d\tau \end{aligned}$$

où $\mathbb{D}_{\tau x}^{M+1}[\varphi]$ désigne $(M+1)$-différentielle de φ au point τx, *i.e.* l'application $(M+1)$-linéaire symétrique sur $(\mathbb{R}^n)^{M+1}$ agissant sur $(x, ..., x)$ ($M + 1$-fois)

$$D_{\tau x}^{M+1}[\varphi](x, ..., x) = \Big(\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^{M+1} [\varphi](\tau x).$$

Compte-tenu de ce que

$$\Big| \frac{1}{M!} \int_0^1 (1 - \tau)^M \mathbb{D}_{\tau x}^{M+1} [\varphi](x, ..., x)\, d\tau \Big| = o(\|x\|^M)$$

au voisinage de l'origine, on a

$$\begin{aligned}
\langle T,\varphi\rangle &= \langle T,\rho\,\varphi\rangle \\
&= \Big\langle T\,,\,\rho\Big(\sum_{\substack{\underline{l}\in\mathbb{N}^n\\ l_1+\cdots+l_n\le M}} \frac{1}{l_1!\cdots l_n!}\Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[\varphi](0)\,x_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}\Big)\Big\rangle \\
&= \sum_{\substack{\underline{l}\in\mathbb{N}^n\\ l_1+\cdots+l_n\le M}} \frac{\Big\langle T\,,\,\rho(x)\,x_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}\Big\rangle}{l_1!\cdots l_n!}\Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[\varphi](0).
\end{aligned}$$

On obtient bien ainsi la formule de représentation (3.5) voulue. □

Ce résultat se transpose immédiatement au cadre géométrique. Si $\mathcal{X}$ est une sous-variété différentiable de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et si T est un q-courant sur $\mathcal{X}$ d'ordre M et de support $\{x_0\}$, avec $x_0\in\mathcal{X}$, l'action de T sur une $(n-q)$- forme différentielle test φ s'exprimant en coordonnées locales autour de x_0 (*via* $\theta_{x_0}\ : t\in B_{x_0}\mapsto\theta_{x_0}(t)$ avec $\theta_{x_0}(0)=x_0$) comme

$$\varphi(t) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-q}\le n} \varphi_I(t)\,dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_{n-q}}$$

se décrit sous la forme

$$\begin{aligned}
&\Big\langle T\,,\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-q}\le n} \varphi_I(t)\,dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_{n-q}}\Big\rangle \\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-q}\le n}\ \sum_{\substack{\underline{l}\in\mathbb{N}^n\\ l_1+\cdots+l_n\le M}} a_{I,\underline{l}}[T]\Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial t_j^{l_j}}\Big)[\varphi_I](0),
\end{aligned}\tag{3.7}$$

où les $a_{I,\underline{l}}[T]$, $I=\{i_1,...,i_{n-q}\}$ avec $1\le i_1<\cdots<i_{n-q}\le n$, $\underline{l}=(l_1,...,l_n)$ avec $l_1+\cdots+l_n\le M$, sont des scalaires du corps de base $\mathbb{K}$ indépendants de la $(n-q)$-forme test φ.

3.2.3. Distributions causales sur $\mathbb{R}$. Sur la droite réelle, où fréquemment dans les applications pratiques le paramètre t figure le paramètre temporel, une classe de distributions sera appelée à jouer aussi un rôle important dans les applications pratiques.

Définition 3.9 (distribution causale). Une distribution $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est dite *causale* si et seulement si $\operatorname{Supp} T\subset[0,\infty[$.

Exemple 3.10. Les distributions-fonction $L_{p_0,\alpha}$, $p_0,\alpha\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha>0$ introduites dans la Section 2.5.2 (voir (2.32)) sont des exemples typiques de distributions causales. Il en est de même des distributions $t_+^{-\beta}$, $\beta\ge 1$, introduites dans la Section 1.4.3.

3.3. Produit tensoriel de distributions ou de courants

Nous nous plaçons dans un premier temps dans le contexte des distributions sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Nous élargirons plus loin ce contexte au cadre géométrique.

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ deux ouverts. Alors $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un $\mathbb{K}$-sous-espace particulier du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ est le sous-espace engendré par les fonctions du type

$$\Phi = \varphi \otimes \psi \ : (x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \longmapsto \varphi(x)\,\psi(y)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})\,,\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K}).$$

On note ce $\mathbb{K}$-sous-espace $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K}) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K})$.

Proposition 3.5 (définition du produit tensoriel de deux distributions). *Soient $\mathbb{K}$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ comme précédemment. Soient deux distributions (à valeurs dans $\mathbb{K}$) $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1, \mathbb{K})$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2, \mathbb{K})$. Il existe une unique distribution $T = T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K})$ telle que*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K}),\ \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K}), \quad \langle T_1 \otimes T_2\,,\, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T_1\,,\, \varphi \rangle \times \langle T_2\,,\, \psi \rangle. \tag{3.8}$$

La distribution $T_1 \otimes T_2$ ainsi définie est dite produit tensoriel des deux distributions T_1 et T_2.

Démonstration. Soit $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K})$. Pour tout $x_0 \in \Omega_1$, la fonction

$$y \in \Omega_2 \mapsto \Phi(x_0, y)$$

est un élément de $\mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K})$, élément sur lequel on peut faire agir la distribution $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2, \mathbb{K})$. Ceci nous permet de définir la fonction

$$x \in \Omega_1 \longmapsto \Big\langle T_2,\ \Phi(x, \cdot) \Big\rangle. \tag{3.9}$$

Il résulte du fait que T_2 est une distribution sur Ω_2 que[1] la fonction (3.9) est une fonction C^∞ sur Ω_1, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et que l'on a, pour tout multi-indice $(l_1, ..., l_{n_1}) \in \mathbb{N}^{n_1}$, les relations

$$\Big(\prod_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)\Big[x \mapsto \langle T_2\,,\, \Phi(x, \cdot)\rangle\Big] = \Big\langle T_2(y)\,,\, x \mapsto \Big(\prod_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[\Phi(x,y)]\Big\rangle, \quad \forall\, x \in \Omega_1.$$

Comme Φ est à support compact dans $\Omega_1 \times \Omega_2$, la fonction (3.9) est à support compact dans Ω_1 ; c'est donc une fonction-test élément de $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})$, à laquelle on peut appliquer la distribution T_1. On est donc en droit de poser :

$$\langle T_1 \otimes T_2\,,\, \Phi \rangle := \Big\langle T_1\,,\, x \mapsto \langle T_2\,,\, \Phi(x, \cdot)\rangle \Big\rangle. \tag{3.10}$$

Soit $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers la fonction identiquement nulle dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K})$, ce qui implique (entre autre) que toutes les fonctions Φ_k sont supportées par un compact K_0. Soit $K_0' = \mathrm{pr}_{\Omega_1}(K_0)$ et $K_0'' = \mathrm{pr}_{\Omega_2}(K_0)$. Les projections sur Ω_1 et Ω_2 étant continues, K_0' et K_0'' sont des compacts, respectivement de Ω_1 et Ω_2. En utilisant les inégalités

(3.11)

$$\Big|\Big\langle T_2(y)\,,\, x \mapsto \Big(\prod_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[\Phi_k(x,y)]\Big\rangle\Big| = \Big|\Big(\prod_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)\Big[x \mapsto \langle T_2\,,\, \Phi_k(x, \cdot)\rangle\Big]\Big|$$

$$\leq C_2(K_0'')\, N_{K_0'', p(K_0'')}\Big[y \mapsto \Big(\prod_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[\Phi_k(x,y)]\Big] \quad \forall\,(l_1, ..., l_{n_1}) \in \mathbb{N}^{n_1}\ \ \forall x \in K_0'$$

1. Reprendre par exemple pour voir ceci la preuve de la Proposition 2.2, *cf.* la manière dont on prouve que la fonction (2.14) est C^∞.

(clause (1.14) de la Proposition 1.2 pour T_2), on constate que la suite de fonctions-test (de $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})$)

$$x \mapsto \langle T_2\,,\, \Phi_k(x,\cdot)\rangle, \quad k \in \mathbb{N}$$

converge au sens du principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})$ vers la fonction nulle (pour k assez grand, ces fonctions sont toutes supportées par le compact K_0' de Ω_1). Comme T_1 est une distribution sur Ω_1, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty} \langle T_1 \otimes T_2\,,\, \Phi_k\rangle = \lim_{k\to+\infty} \Big\langle T_1(x)\,,\, \langle T_2(y)\,,\, \Phi_k(x,y)\rangle \Big\rangle = 0.$$

L'application

$$\Phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K}) \longmapsto \langle T_1 \otimes T_2\,,\, \Phi\rangle$$

définie en (3.10) est donc bien une distribution à valeurs dans $\mathbb{K}$ sur l'ouvert $\Omega_1 \times \Omega_2$ de $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Cette distribution $T_1 \otimes T_2$ vérifie la condition (3.8) car, pour tout $x \in \Omega_1$, on a

$$\langle T_2\,,\, (\varphi \otimes \psi)(x,\cdot)\rangle = \varphi(x)\, \langle T_2, \psi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K}),\ \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K}).$$

L'existence d'une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ se pliant à la règle (3.8) est donc prouvée. L'unicité d'une telle distribution résulte du lemme important suivant.

Lemme 3.11. *Soient Ω_1 et Ω_2 des ouverts respectifs de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K}) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K})$ de $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K})$ est dense dans ce $\mathbb{K}$-espace vectoriel (relativement au principe de convergence des suites introduit dans la Définition 1.11).*

Démonstration. L'ouvert $\Omega_1 \times \Omega_2$ admet un recouvrement par des produits de boules euclidiennes $B_{x_\iota} \times B_{y_\iota}$ (respectivement n_1 et n_2 dimensionnelles) avec $\overline{B_{x_\iota}} \subset \Omega_1$ et $\overline{B_{y_\iota}} \subset \Omega_2$ pour tout indice ι. Si $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ réalise une partition de l'unité dans Ω_1, subordonnée au recouvrement de Ω_1 par les B_{x_ι} et $(\theta_l)_{l\in\mathbb{N}}$ réalise une partition de l'unité dans Ω_2, subordonnée au recouvrement de Ω_2 par les B_{y_ι}, la famille dénombrable $(\rho_k \otimes \theta_l)_{k,l\in\mathbb{N}}$ réalise une partition de l'unité dans $\Omega_1 \times \Omega_2$, subordonnée au recouvrement de $\Omega_1 \times \Omega_2$ par les ouverts produits de boules euclidiennes $B_{x_\iota} \times B_{y_\iota}$. Pour montrer qu'une fonction-test $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K})$ s'approche dans cet espace par des éléments du sous-espace $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K}) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K})$ (stable par multiplication), on peut donc se ramener à remplacer Φ par $\Phi \times (\rho_k \otimes \theta_l)$, pour k, l fixés dans $\mathbb{N}$. On notera $\rho_k = \rho$, $\theta_l = \theta$. Soit g la gaussienne (centrée et normalisée) dans $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$:

$$g\ : (x,y) \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^{(n_1+n_2)/2}} \prod_{j=1}^{n_1} \exp(-x_j^2/2) \times \prod_{l=1}^{n_2} \exp(-y_l^2/2)$$

et, pour tout $\epsilon > 0$, $g_\epsilon(x,y) = \epsilon^{-n} g(x/\epsilon, y/\epsilon)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction

$$\begin{aligned} (x,y) \longmapsto [\Phi * g_{1/k}](x,y) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Phi(\xi,\eta) g_{1/k}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Phi(x-\xi, y-\eta)\, g_{1/k}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant de paramètres, il s'agit d'une fonction C^∞ et l'on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, pour tous multi-indices

$(l_1, ..., l_{n_1}) \in \mathbb{N}^{n_1}$ et $(l'_1, ..., l'_{n_2}) \in \mathbb{N}^{n_2}$,

$$\begin{aligned}
&\Big(\prod_{\lambda=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_\lambda}}{\partial x_\lambda^{l_\lambda}}\Big) \circ \Big(\prod_{\mu=1}^{n_2} \frac{\partial^{l'_\mu}}{\partial y_\mu^{l'_\mu}}\Big)[\Phi * g_{1/k}](x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Big(\prod_{\lambda=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_\lambda}}{\partial x_\lambda^{l_\lambda}}\Big) \circ \Big(\prod_{\mu=1}^{n_2} \frac{\partial^{l'_\mu}}{\partial y_\mu^{l'_\mu}}\Big)[\Phi(x-\xi, y-\eta]\, g_{1/k}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

La suite $(\Phi * g_{1/k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ approche la fonction Φ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ du fait de l'uniforme continuité de Φ sur tout compact K de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et de ce que $(g_{1/k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ réalise une approximation de l'unité [2]. Il suffit en effet de remarquer

$$\begin{aligned}
\sup_K |\Phi - \Phi * g_{1/k}| \leq\ & \sup_{\substack{(x,y)\in K \\ \|(\xi,\eta)\|\leq \frac{\delta}{k}}} |\Phi(x, y) - \Phi(x-\xi, y-\eta)| \\
&\times \int_{\|(\xi,\eta)\|\leq \frac{\delta}{k}} g_{1/k}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\
&+2\|\Phi\|_\infty \int_{\|(\xi,\eta)\|\geq \frac{\delta}{k}} g_{1/k}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\
\leq\ & \sup_{\substack{(x,y)\in K \\ \|(\xi,\eta)\|\leq \frac{\delta}{k}}} |\Phi(x, y) - \Phi(x-\xi, y-\eta)| \\
&+2\|\Phi\|_\infty \int_{\|(\xi,\eta)\|\geq \delta} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta
\end{aligned} \tag{3.13}$$

et de choisir δ assez grand, puis, une fois δ fixé, k suffisamment grand pour que la somme des deux termes figurant dans le membre de droite de (3.13) soit majorée par $\epsilon > 0$ arbitraire. En remplaçant dans (3.13) Φ par n'importe laquelle de ses dérivées partielles à un ordre arbitraire et en utilisant (3.12), on constate que la suite $((\Phi * g_{1/k}) \times (\rho \otimes \theta))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\Phi \times (\rho \otimes \sigma)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K})$. En développant, pour $k = k_0$ fixé, en série entière

$$\exp(-X^2/2k_0^2) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{2^\lambda k_0^{2\lambda} \lambda!} X^{2\lambda} = \lim_{l\to+\infty} \Big(\sum_{\lambda=0}^{l} \frac{(-1)^\lambda}{2^\lambda k_0^{2\lambda}\lambda!} X^{2\lambda}\Big),$$

puis en reportant ce développement dans l'expression de

$$g_{1/k_0}(x-\xi, y-\eta) = \frac{k_0^{n_1+n_2}}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \exp\Big(-\frac{1}{2k_0^2}\Big(\sum_{\lambda=1}^{n_1}(x_\lambda - \xi_\lambda)^2 + \sum_{\mu=1}^{n_2}(y_\mu - \eta_\mu)^2\Big)\Big)$$

sous l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Phi(\xi, \eta)\, g_{1/k_0}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta = [\Phi * g_{1/k_0}](x, y),$$

on constate que $\Phi * \rho_{1/k_0}$ s'approche uniformément sur tout compact (pour la convergence uniforme au sens des fonctions et de leurs dérivées partielles à un ordre arbitraire) par une suite de fonctions polynomiales $(P_{k_0,l}[\Phi])_{l\in\mathbb{N}}$. Les fonctions $P_{k_0,l}[\Phi] \times (\rho \otimes \theta)$ appartiennent à $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K}) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K})$. On déduit de tout cela la possibilité d'approcher $\Phi \times (\rho \otimes \theta)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K})$ par la suite de fonctions-test $(P_{k_0,k_0}[\Phi] \times (\rho \otimes \theta))_{k_0\in\mathbb{N}^*}$ appartenant toutes à $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K}) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K})$. Le lemme est ainsi démontré. $\square$

2. Voir l'exemple 4.2 dans le cours de Théorie de l'Intégration MHT512 [**Y1**].

L'unicité qui restait à prouver pour conclure la preuve de la Proposition 3.5 résulte immédiatement du Lemme 3.11. Cette proposition est donc ainsi prouvée. $\square$

Plaçons nous maintenant dans un cadre géométrique, où Ω_1 (*resp.* Ω_2) désigne un ouvert d'une sous-varité différentiable $\mathcal{X}_1$ (*resp.* $\mathcal{X}_2$) de dimension n_1 (*resp.* n_2) de $\mathbb{R}^{N_1}$ (*resp.* $\mathbb{R}^{N_2}$). Alors $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ est une sous-variété différentiable de dimension $n_1 + n_2$ de $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$ dont $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert.

Proposition 3.6 (définition du produit tensoriel de deux courants). *Soient $\Omega_j \subset \mathcal{X}_j \subset \mathbb{R}^{N_j}$, $j = 1, 2$, comme ci-dessus. Soit $q_1 \in \{0, ..., n_1\}$, $q_2 \in \{0, ..., n_2\}$, $T_1 \in \mathcal{D}'^{q_1}(\Omega_1, \mathbb{K})$, $T_2 \in \mathcal{D}'^{q_2}(\Omega_2, \mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Il existe un unique (q_1+q_2)-courant $T = T_1 \otimes T_2$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ tel que, pour toute $(n_1 - q_1)$-forme différentielle test φ dans $\mathcal{D}^{n_1-q_1}(\Omega_1, \mathbb{K})$, pour toute $(n_2 - q_2)$-forme test ψ dans $\mathcal{D}^{n_2-q_2}(\Omega_2, \mathbb{K})$, on ait*

$$\langle T_1 \otimes T_2\,,\, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle T_1, \varphi\rangle \times \langle T_2, \psi\rangle,$$

où $\varphi \otimes \psi$ désigne la $(n_1 - q_1) + (n_2 - q_2)$-forme différentielle sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ définie (en coordonnées locales t sur $\mathcal{X}_1$ et s sur $\mathcal{X}_2$) par

$$(\varphi \otimes \psi)(t, s) := \varphi(t) \wedge \psi(s). \tag{3.14}$$

Démonstration. La preuve est calquée sur celle de la Proposition 3.5. Si Φ est une $(n_1 + n_2) - (q_1 + q_2)$-forme différentielle-test appartenant au $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^{n_1+n_2-q_1-q_2}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{K})$, l'application

$$x \in \Omega_1 \longmapsto \langle T_2\,,\, \Phi(x, \cdot)\rangle \tag{3.15}$$

définit une forme-test de $\mathcal{D}^{n_1-q_1}(\Omega_1, \mathbb{K})$. Dans une carte locale $U \times V$ sur la sous-variété $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, il convient de remplacer $\Phi_{|U\times V}$ dans (3.15) par sa composante (exprimée en coordonnées locales, t dans U, s dans V) :

$$\begin{gathered}(\Phi_{|U\times V})_{n_1-q_1, n_2-q_2} = \\ = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{n_1-q_1}\leq n_1} \ \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_{n_2-q_2}\leq n_2} (\Phi_{|U\times V})_{IJ}(t, s) \bigwedge_{\lambda=1}^{n_1-q_1} dt_{i_\lambda} \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{n_2-q_2} ds_{j_\mu}\,,\end{gathered} \tag{3.16}$$

où les $(\Phi_{|U\times V})_{IJ}$ sont des fonctions C^∞ dans $U \times V$. On définit ainsi [3]

$$\langle T_1 \otimes T_2, \Phi\rangle := \Big\langle T_1\,,\, x \mapsto \langle T_2\,,\, \Phi(x, \cdot)\rangle \Big\rangle.$$

On vérifie que cette définition induit celle d'un (q_1+q_2)-courant sur $\Omega_1\times\Omega_2$ vérifiant la clause (3.14). L'unicité résulte du fait qu'étant donné un produit d'ouverts de carte $U \times V$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{D}^{n_1-q_1}(U, \mathbb{K}) \otimes \mathcal{D}^{n_2-q_2}(V, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$-sous-espace engendré par les $\varphi \otimes \psi$, $\varphi \in \mathcal{D}^{n_1-q_1}(U, \mathbb{K})$, $\psi \in \mathcal{D}^{n_2-q_2}(V, \mathbb{K})$) est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel dense dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des $(n_1 - q_1) + (n_2 - q_2)$-formes différentielles Φ dans $U \times V$ qui s'expriment en coordonnées locales (t, s) (t dans U, s dans V) sous la forme (3.16). $\square$

3. Une fois introduite une partition de l'unité $(\rho_k \otimes \psi_l)_{k,l}$ associée au recouvrement de l'ouvert $\Omega_1 \times \Omega_2$ par des produits $U_\iota \times V_\iota$ de cartes locales respectivement sur $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ et Φ remplacée par $\Phi \times \sum_{k,l} (\rho_k \otimes \sigma_l)$.

3.4. Le théorème des noyaux

La théorie des distributions (ou des courants) ne permet pas seulement la modélisation des phénomènes physiques, elles permet aussi celle des systèmes (concrètement des « appareils ») agissant de manière linéaire et (en un sens à préciser) de manière continue sur ces mêmes phénomènes physiques. En voici un exemple, avec le *théorème des noyaux* de Laurent Schwartz, qui nous servira de motivation pour introduire dans la section suivante l'importante opération de *convolution* entre distributions (pourvu bien sûr qu'elle s'avère possible).

Theorème 3.12 (théorème des noyaux de Laurent Schwartz). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ continu au sens suivant : si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions-test convergeant vers la fonction nulle dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ au sens du principe de convergence des suites de la Définition 1.11, la suite $(\mathcal{L}[\varphi_k])_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ convergeant vers la distribution nulle dans $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ au sens du principe de convergence des suites de distributions (Définition 2.1). Il existe alors une unique distribution $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ sur $\Omega \times \Omega$ telle que,*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}),\ \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}), \quad \langle \mathcal{L}[\varphi]\, ,\, \psi\rangle = \langle \mathcal{K}_{\mathcal{L}}\, ,\, \varphi \otimes \psi\rangle. \tag{3.17}$$

Remarque 3.13. Ce théorème se transpose immédiatement au cadre géométrique, où Ω désigne cette fois un ouvert d'une sous-variété différentiable $\mathcal{X}$ de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}^{n-q_1}(\Omega, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{D}'^{q_2}(\Omega, \mathbb{K})$ $(0 \leq q_1, q_2 \leq n)$. Il existe alors un unique $(q_1 + q_2)$-courant $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ sur $\Omega \times \Omega$ tel que

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{n-q_1}(\Omega, \mathbb{K}),\ \forall\, \psi \in \mathcal{D}^{n-q_2}(\Omega, \mathbb{K}), \quad \langle \mathcal{L}[\varphi]\, ,\, \psi\rangle = \langle \mathcal{K}_{\mathcal{L}}\, ,\, \varphi \otimes \psi\rangle. \tag{3.18}$$

Démonstration. Nous donnons uniquement ici une esquisse de preuve, les quelques points clef en étant pour l'essentiel admis [4]. Une fonction test $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega, \mathbb{K})$ de support compact inclus dans $K \times K$, où K est un compact de Ω, se représente (il suffit d'adapter la fin de la preuve de la Proposition 2.2) comme la limite dans $\mathcal{D}(\Omega \times \Omega, \mathbb{K})$ de la suite de fonctions

$$\left((x, y) \mapsto \int_{\Omega\times\Omega} \Phi(\xi, \eta)\, \psi_{1/k}(x - \xi)\psi_{1/k}(y - \eta)\, d\xi\, d\eta \right)_{k>1/(\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)}.$$

Pour $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ et $k > 1/\min(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega), \mathrm{dist}(y, \partial\Omega))$, on pose

$$\mathcal{K}_{\mathcal{L},k}(x, y) = \Big\langle \mathcal{L}[\psi_{1/k}(x - \cdot)]\, ,\, \psi_{1/k}(y - \cdot) \Big\rangle.$$

Or la forme bilinéaire

$$(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K}) \times \mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K}) \longmapsto \langle \mathcal{L}[\varphi], \psi\rangle \tag{3.19}$$

est séquentiellement continue. Le théorème de Banach-Steinhaus se transpose en effet (on l'admet ici [5]) du cadre des espaces de Banach au cadre des espaces de Fréchet : si $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de distributions convergeant vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$ (par exemple la suite $(\mathcal{L}[\varphi_k])_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\mathcal{L}[\varphi]$ lorsque $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ convergeant vers φ) et si $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ convergeant vers ψ, la suite $(T_k(\psi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ (ici par exemple $(\langle \mathcal{L}[\varphi_k], \psi_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$) converge

4. Pour une preuve complète du théorème de noyaux, qui valut la médaille Fields à Laurent Schwartz en 1950, voir par exemple [**Horm**], section 5.2.

5. La Proposition 2.1 en était déjà un premier indice.

vers $T(\psi)$ (ici $\langle \mathcal{L}[\varphi], \psi\rangle$). Le critère quantitatif (1.14) de la Proposition 1.2 implique alors pour tout $k > 1/\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$, on a

$$\sup_{(x,y)\in K\times K} |\mathcal{K}_{\mathcal{L},k}(x,y)| \leq C(K)\, k^{-p(K)}$$

pour une certaine constante positive $C(K)$ et un certain entier positif $p(K) \geq 2n$. La fonction $\mathcal{K}_{\mathcal{L},k}$ est donc localement intégrable (car bornée) sur $K \times K$ (pourvu que $k > 1/\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$, *i.e* que cette fonction soit bien définie sur $K \times K$). On peut donc considérer la suite $(\mathcal{K}_{\mathcal{L},k})_{k>>1}$ comme une suite de distributions-fonction dans $\Omega \times \Omega$, en convenant du fait qu'il faille, étant donné un ouvert Ω' arbitraire relativement compact dans Ω, choisir $k > k(\Omega') = \mathrm{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega)$ pour que la suite des restrictions $((\mathcal{K}_{\mathcal{L},k})_{|\Omega'})_{k>k(\Omega')}$ soit bien définie.

On vérifie aisément (en approchant les intégrales par des sommes de Riemann) que, si φ et ψ sont deux éléments de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$, on a

$$\langle \mathcal{K}_{\mathcal{L},k}\,,\, \varphi\otimes\psi\rangle = \Big\langle \mathcal{L}[\varphi * \psi_{1/k}]\,,\, \psi * \psi_{1/k}\Big\rangle.$$

D'après la continuité de la forme bilinéaire (3.19) et le résultat de régularisation mentionné en fin de la preuve de la Proposition 2.2, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \langle \mathcal{K}_{\mathcal{L},k}\,,\, \varphi\otimes\psi\rangle = \langle \mathcal{L}[\varphi], \psi\rangle. \tag{3.20}$$

L'existence de $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ satisfaisant (3.17) résulte alors du fait que, pour tout compact $K \subset\subset \Omega$, pour toute fonction test $\Phi \in \mathcal{D}_{K\times K}(\Omega\times\Omega, \mathbb{K})$, la suite

$$\big(\langle \mathcal{K}_{\mathcal{L},k}\,,\, \Phi\rangle\big)_{k>1/\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)}$$

est une suite de Cauchy, donc convergente, dans le corps complet $\mathbb{K}$. Nous admettrons ici ce résultat (*cf.* [**Horm**], Section 5.2, pour les détails de ce point technique). Il résulte alors de la Proposition 2.1 que la suite $(\mathcal{K}_{\mathcal{L},k})_{k>>1}$ converge au sens des distributions vers une distribution $\mathcal{K}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{D}'(\Omega\times\Omega, \mathbb{K})$. La distribution $K_{\mathcal{L}}$ ainsi construite se plie d'après (3.20) à la clause (3.17). L'unicité d'une telle distribution $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ satisfaisant (3.17) résulte du Lemme 3.11. ☐

3.5. Convolution de deux distributions dans $\mathbb{R}^n$ ou $(\mathbb{S}^1)^n$

Le concept de ≪ *boite noire* ≫ désigne en ingénierie un appareil (ou un ensemble d'appareils résultant par exemple de montages en série ou en parallèle) agissant de manière linéaire sur les entrées et dont les paramètres soient assujettis à rester immuables (soit dans le temps, si l'on se place en dimension 1, soit dans l'espace si l'on se place en dimension supérieure). Par exemple, une cellule électrique (comme un circuit RC ou RLC [6], un montage en série de cellules électriques, un système mécanique (montages avec résistances, ressorts, ...), sont des modèles de *boites noires*. En revanche, un instrument de musique, l'orgue constitué du conduit vocal d'un individu, *etc.*, n'en sont pas car les paramètres sont ici appelés à se déformer au cours du temps. Outre la linéarité et l'invariance des paramètres par translation, on ajoute comme exigence le fait que l'appareil réponde de manière ≪ continue ≫(en un sens à préciser) aux entrées qu'on lui soumet. On comprend aisément l'importance de tels modèles dans le domaine de l'ingénierie ou de la modélisation mathématique.

6. Résistance-Condensateur, Résistance-Bobine-Condensateur.

Vu les exigences de linéarité et de continuité, il est naturel de modéliser le concept de *boite noire* du point de vue mathématique comme un opérateur linéaire $\mathcal{L}$: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ continu au sens où on l'entend dans l'énoncé du Théorème 3.12. D'après ce théorème, cet opérateur $\mathcal{L}$ se représente par un noyau-distribution $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ et l'invariance par translation (*i.e* le fait que les paramètres de l'appareil puissent être considérés immuables dans le temps ou l'espace) se traduit par la condition

$$\begin{aligned}&\forall\,\varphi,\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\quad \forall u\in\mathbb{R}^n,\\ &\langle \mathcal{L}[\varphi](y-u)\,,\,\psi(y)\rangle = \langle \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,y-u)\,,\,\varphi(x)\otimes\psi(y)\rangle = \langle \mathcal{L}[\varphi(\cdot-u)]\,,\,\psi\rangle\\ &\quad = \langle \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x+u,y)\,,\,\varphi(x)\otimes\psi(y)\rangle.\end{aligned}\tag{3.21}$$

On a alors (du fait du Lemme 3.11) :

$$\forall\,u\in\mathbb{R}^n,\ \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,y-u) = \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x+u,y)\tag{3.22}$$

(au sens des distributions sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$). En différentiant cette identité (3.22) entre distributions par rapport aux variables réelles u_j, $j=1,...,n$, il vient

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)[\mathcal{K}_{\mathcal{L}}]\equiv 0,\ j=1,...,n,$$

au sens des distributions sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Ceci se traduit formellement par le fait qu'il existe une distribution $h_{\mathcal{L}}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ telle que

$$\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,y) = h_{\mathcal{L}}(x-y).$$

Il en résulte que l'action de $\mathcal{L}$ se trouve modélisée sous la forme

$$\forall\,\varphi,\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\ \langle\mathcal{L}[\varphi]\,,\,\psi\rangle = \langle h_{\mathcal{L}}(x)\otimes\varphi(y)\,,\,\psi(x+y)\rangle.\tag{3.23}$$

En termes d'ingénierie, on écrira la relation (3.23) formellement sous la forme « abrégée » :

$$\mathcal{L}[\varphi](y) = \int_{\mathbb{R}^d} h_{\mathcal{L}}(y-x)\,\varphi(x)\,dx,\tag{3.24}$$

forme où l'on reconnait l'opération mathématique de *convolution* déjà rencontrée dans le cadre des fonctions ou des suites (suivant que l'on adopte le point de vue continu ou le point de vue discret), *cf.* le chapitre 4 du cours de Théorie de l'Intégration [**Y1**], et notée alors, au lieu de (3.24), $\mathcal{L}[\varphi]=h_{\mathcal{L}}*\varphi$. Ceci nous conduit naturellement à l'introduction d'une opération entre distributions, la *convolution*. Toute boite noire $\mathcal{L}$ agira donc, comme on vient de le voir, comme un opérateur de convolution par une certaine distribution $h_{\mathcal{L}}$.

La convolution est une opération intimement liée à une structure algébrique de groupe commutatif. Ceci nous privera de définir en général cette opération comme une opération interne de $\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{K})$ lorsque Ω sera un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ ou un ouvert quelconque d'une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^N$ (il n'y a en général pas de structure de groupe commutatif sur Ω !). Nous nous placerons donc uniquement dans deux cas importants (au niveau des applications pratiques) :

1. le cas (le plus important) $\Omega=\mathbb{R}^n$ (avec sa structure de groupe additif usuel), qui sera celui de la *convolution usuelle* ;
2. le cas $\Omega=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\cdots\times\mathbb{S}^1\subset(\mathbb{R}^2)^n$, où $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité dans $\mathbb{R}^n$ (avec sa structure de groupe multiplicatif usuel), qui sera celui de la *convolution périodique*.

Définition 3.14 (convolution usuelle de deux distributions sur $\mathbb{R}^n$). Soient S et T deux distributions sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les deux distributions S et T sont dites *convolables* si elles vérifient la *condition des supports* :

$$\forall\, K \subset\subset \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{K} := \Big\{(x,y) \in \operatorname{Supp} S \times \operatorname{Supp} T\,;\; x+y \in K\Big\} \subset\subset \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.25}$$

Lorsque la condition des supports (3.25) est remplie, on définit une distribution sur $\mathbb{R}^n$ (à valeurs dans $\mathbb{K}$), appelée *convolée* des distributions S et T et notée $S * T$, par :

$$\begin{gathered}\forall\, K \subset\subset \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}),\\ \langle S * T, \varphi\rangle := \Big\langle S(x) \otimes T(y)\,,\, \varphi(x+y)\Big\rangle = \Big\langle S(x) \otimes T(y)\,,\, \rho_{\widetilde{K}}(x,y)\varphi(x+y)\Big\rangle,\end{gathered} \tag{3.26}$$

où $\rho_{\widetilde{K}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, [0,1])$ désigne une fonction plateau arbitraire identiquement égale à 1 au voisinage du compact $\widetilde{K}$ associé à K *via* la condition des supports (3.25).

Remarque 3.15 (commutativité de la convolution). Si S et T sont convolables, il en est de même (par symétrie de (3.25)) de T et S et l'on a $T*S = S*T$, autrement dit l'opération de convolution entre distributions sur $\mathbb{R}^n$ est, pourvu qu'elle s'avère possible, une opération <u>commutative</u>.

Comme $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ est un compact dans $(\mathbb{R}^2)^n$, la définition de l'opération de convolution entre deux distributions S et T de $\mathcal{D}'((\mathbb{S}^1)^n, \mathbb{K})$ est en revanche toujours possible (la condition des supports (3.25) est alors irrelevante du fait de la compacité de $(\mathbb{S}^1)^n$) et on a la :

Définition 3.16 (convolution de deux distributions périodiques). Soient S et T deux distributions sur $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (n fois), à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *convolée périodique* de S et T et on note $S *_{\text{per}} T$ la distribution sur $(\mathbb{S}^1)^n$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui, à toute fonction

$$\varphi\ : (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \varphi(\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{K}$$

C^∞ et 2π-périodique par rapport à $\theta_1, ..., \theta_n$ [7], associe

$$\langle S *_{\text{per}} T\,,\, \varphi\rangle := \frac{1}{(2\pi)^n}\Big\langle S(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) \otimes T(e^{i\theta'_1}, ..., e^{i\theta'_n})\,,\, \varphi(\theta+\theta')\Big\rangle. \tag{3.27}$$

La condition des supports (3.25) dans la Définition 3.14 (pour deux distributions S et T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$) est remplie dans deux cas importants.

Proposition 3.7 (convolabitité de deux distributions sur $\mathbb{R}^n$ dont l'une au moins est à support compact). *Si S et T sont deux éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ telles qu'au moins l'une des deux distributions S ou T soit à support compact (*$\operatorname{Supp} S \subset\subset \mathbb{R}^n$ *ou* $\operatorname{Supp} T \subset\subset \mathbb{R}^n$*). Les deux distributions S et T sont alors convolables.*

Démonstration. Supposons par exemple $\operatorname{Supp} T \subset\subset \mathbb{R}^n$. Si $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}&\Big((x,y) \in \operatorname{Supp} S \times \operatorname{Supp} T \ \&\ (x+y \in K)\Big)\\ &\Longleftrightarrow \Big(\Big(x \in \operatorname{Supp} S \cap (K - \operatorname{Supp} T)\Big) \ \&\ (y \in \operatorname{Supp} T)\Big),\end{aligned}$$

7. Donc considérée comme une fonction C^∞ de $(\mathbb{S}^1)^n$ dans $\mathbb{K}$ *via* la correspondance naturelle $e^{i\theta} \leftrightarrow (\dot\theta \bmod 2\pi)$ entre le cercle unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^2$ et le groupe quotient $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.

où $K - \mathrm{Supp}\, T$ est le compact image du compact $K \times \mathrm{Supp}\, T$ (ce produit est compact car produit de deux compacts) par l'application continue $(x,y) \mapsto x-y$. L'ensemble $\widetilde{K}$ défini par (3.25) est donc compact comme produit de deux compacts. Les deux distributions S et T sont donc convolables. $\square$

Proposition 3.8 (convolabilité de deux distributions sur $\mathbb{R}$ à capacité de mémoire finie). *Soit S et T deux distributions sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles qu'il existe $M \in [0, \infty[$ avec*

$$\mathrm{Supp}\, S \cup \mathrm{Supp}\, T \subset [-M, +\infty[$$

(les deux distributions S et T sont dites à capacité de mémoire finie). Les deux distributions S et T sont convolables.

Démonstration. Le fait que la condition (3.25) soit vérifiée résulte du fait que, si $K \subset\subset \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x + y \in K,\ x \geq -M,\ y \geq -M\}$$

est un compact de $\mathbb{R}^2$; comme $\widetilde{K}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ inclus dans ce compact, $\widetilde{K}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. La condition (3.25) est donc remplie dans ce cas et les distributions S et T sont convolables. $\square$

Exemple 3.17 (convolution avec une distribution à support ponctuel). Si T est un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ et

$$S = P\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)[\delta_0]\,,\ P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n],$$

est une distribution sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et de support l'origine $\{(0, ..., 0)\}$ (*cf.* la Proposition 3.4), les distributions S et T sont convolables d'après la Proposition 3.7 et on a

$$P\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)[\delta_0] * T = P\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)\,[T]. \tag{3.28}$$

Exemple 3.18 (convolution d'une distribution fonction C^∞ et d'une distribution à support compact). Soit $T = f$ une fonction C^∞ et S une distribution à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Les deux distributions S et f sont convolables d'après la Proposition 3.7 et la convolée $S * f$ est la fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$:

$$y \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle S(x)\,,\, \rho(x)\, f(x-y)\rangle,$$

où $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, [0,1])$ est une fonction-plateau arbitraire identiquement égale à 1 au voisinage de $\mathrm{Supp}\, S$. On a en effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, en utilisant l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, puis la continuité de S de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \langle S * f\,,\, \varphi\rangle &= \langle S(x) \otimes f(y)\,,\, \rho(x)\, \varphi(x+y)\rangle \\ &= \Big\langle S(x)\,,\, \rho(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\varphi(y)\, dy\Big\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big\langle S(x)\,,\, \rho(x)\, f(x-y)\Big\rangle\, \varphi(y)\, dy. \end{aligned}$$

Lorsque S et T sont deux distributions fonction sur $\mathbb{R}^n$, il n'y a *a priori* aucune raison pour laquelle les distributions S et T soient convolables. Néanmoins, on sait depuis le cours de Théorie de l'Intégration (ce sont les inégalités de Young, voir [**Y1**], Théorème 4.2) que si p, q, r sont trois éléments de $[1, \infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

(l'existence de r, lorsque $p \in [1, \infty]$ et $q \in [1, \infty]$ sont donnés, est assurées dès que $1 \leq 1/p + 1/q \leq 2$) et si $\dot{f} \in L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$, $\dot{g} \in L^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$, alors, lorsque f et g sont des représentants mesurables respectivement de $\dot{f}$ et $\dot{g}$ à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$, la fonction mesurable

$$y \mapsto f(x - y)g(y)$$

est intégrable pour dx-presque tout x et que la fonction dx-presque partout définie

$$f * g \ : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, g(y)\, dy$$

représente un élément de $L^r_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$ noté $\dot{f} * \dot{g}$, avec

$$\|\dot{f} * \dot{g}\|_r \leq \|\dot{f}\|_p \times \|\dot{g}\|_q \,. \tag{3.29}$$

Nous traduisons ceci en termes de distributions avec la proposition suivante :

Proposition 3.9 (convolution des distributions fonction). *Soient $p, q \in [1, \infty]$ avec $1 \leq 1/p + 1/q \leq 2$. Soit $(K_l)_{l \geq 0}$ une suite de compacts emboités en croissant et exhaustant $\mathbb{R}^n$. Si $\dot{f} \in L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$ et $\dot{g} \in L^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$, les distributions-fonction f et $g\,\chi_{K_l}$ sont convolables pour tout l. De plus, pour tout $l \in \mathbb{N}$, la distribution $f * g\chi_{K_l}$ est la distribution-fonction associée à $\dot{f} * \dot{g\chi_{K_l}}$, élément de $L^r(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$, où $1/r = 1/p + 1/q - 1$. Enfin, la suite de distributions $(f * g\chi_{K_l})_{l \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ vers la distribution-fonction associée à $\dot{f} * \dot{g}$, élément de $L^r_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$ d'après l'inégalité de Young* (3.29).

Toute distribution T sur $\mathbb{R}^n$ est convolable avec la distribution à support compact $\delta_{(0,\ldots,0)}$ et l'on a toujours $T * \delta = \delta * T = T$, ce qui traduit le fait que T joue le rôle d'élément neutre pour l'opération de convolution.

Il faut prendre garde au fait que lorsque l'on itère, si cela s'avère possible, les opérations de convolution, la règle d'associativité se révèle en défaut. Nous en donnons ici deux exemples :

Exemple 3.19 (non associativité du produit de convolution ; un premier exemple). Les distributions $[1]$ (distribution-fonction correspondant à la fonction presque partout constante égale à 1) et $D[\delta] = \delta'$ sont des éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puisque δ' est à support compact. D'après l'exemple (3.17), on a $[1] * \delta' = [1] * D[\delta] = D[[1] * \delta] = D[1] = 0$. On a donc $([1] * \delta') * H = [0] * H = [0]$ (distribution fonction correspondant à la fonction nulle presque partout). Or $\delta' * H = D[\delta] * H = H' = \delta$ d'après l'exemple 3.17. On remarque donc que $([1] * \delta') * H = [0] * H = [0] \neq [1] * (\delta' * H) = [1] * D[H] = [1] * \delta = [1]$.

Exemple 3.20 (non associativité du produit de convolution : un second exemple). Soit $T_1 = P[\delta] = P(D) * \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (avec $P \in \mathbb{C}[X]$, *cf.* (3.28)). Si l'on décompose $1/P(X)$ en éléments simples

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{\nu_j} \frac{\gamma_{jl}}{(X - \alpha_j)^{\nu_j}} \tag{3.30}$$

(les α_j, $j=1,...,m$, étant les racines de P et les ν_j leurs multiplicités) et que l'on note

$$T_2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{\nu_j} \gamma_{jl} L_{\alpha_j,l} \tag{3.31}$$

(voir (2.32)), on remarque (Proposition 2.7, (2.33)) que $T_1 * T_2 = P(D)[\delta] * S = \delta$. Quelque soit la distribution T, on peut donc définir $(T_1 * T_2) * T = \delta * T = T$. Mais en général T_2 n'est pas convolable avec T et l'on voit donc que $(T_1 * T_2) * T$ peut parfaitement être définie (suivant cette règle) sans que $T_1 * (T_2 * T)$ n'ait de sens !

3.6. Les algèbres de convolution $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}'_+(\mathbb{K})$

Il est toutefois deux situations où les pathologies décrites dans les exemples 3.19 et 3.20 n'ont plus cours : le cadre des distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$ et celui des distributions causales sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.10 (algèbre des distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$). *Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$, noté $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est équipé avec sa structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'opération commutative de convolution d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre commutative unitaire contenant comme sous-algèbre l'algèbre $\mathbb{K}(\partial/\partial x_1,...,\partial/\partial x_n)$ isomorphe à l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}[X_1,...,X_n]$. L'élément neutre de cette $\mathbb{K}$-algèbre est la mesure de Dirac $\delta_{(0,...,0)}$.*

Démonstration. Elle est immédiate : un point important est de remarquer que si T_1, T_2, T_3 sont trois distributions sur $\mathbb{R}^n$ dont au moins deux sont à support compact, la règle d'associativité du produit de convolution est satisfaite, *i.e* on a $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$. Ceci est une conséquence de la définition du produit de convolution des distributions (lorsque les distributions sont convolables, ce qui est le cas ici) au travers du produit tensoriel (qui, lui, est bien associatif). □

Remarque 3.21. Avec cette importante Proposition 3.10, le cadre algébrique de l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ se trouve étendu à un cadre transcendant cette fois, mais plus large, à savoir $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Cette extension trouvera de nombreuses applications, y compris dans l'étude de problèmes relevant de la géométrie algébrique et de l'algèbre commutative. On dispose en effet avec $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ d'un cadre moins rigide que le cadre algébrique tout en l'englobant (on y retrouve cette fois la « souplesse » de l'analyse), cadre tout à fait adapté au maniement des concepts algébriques (en contribuant à en gommer la « rigidité »).

Proposition 3.11 (algèbre des distributions causales sur $\mathbb{R}$). *Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des distributions sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de support dans $[0,\infty[$ (dites distributions causales), noté $\mathcal{D}'_+(\mathbb{K})$, est équipé avec sa structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'opération commutative de convolution d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre commutative unitaire (d'élément neutre δ) dans laquelle toutes les distributions $P(D)[\delta]$ sont inversibles. Cette $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{D}'_+(\mathbb{K})$ contient donc, avec la sous-algèbre des distributions $R(D)[\delta] = (P(D)[\delta])^{-1}[Q(D)[\delta]]$ si $R(X)=P(X)/Q(X)\in\mathbb{K}(X)$, une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{K}(X)$.*

Démonstration. L'associativité du produit de convolution entre éléments de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{K})$ résulte de l'associativité du produit tensoriel. Le fait que $P(D)[\delta]$ ait un inverse a été démontré à l'occasion de l'exemple 3.20 et repose sur la décomposition

(3.30) de la fraction rationnelle $1/P$ en éléments simples. L'inverse $(P(D)[\delta])^{-1}$ est alors donné par (3.31). $\square$

CHAPITRE 4

Distributions et transformation de Fourier

4.1. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et les distributions tempérées

4.1.1. Rappels sur la transformation de Fourier. La transformation de Fourier joue un rôle fondamental tant dans l'analyse des phénomènes physiques (elle est matérialisée optiquement par le mécanisme de diffraction) que dans le traitement opérationnel des transformations (telles l'action par convolution) agissant sur ces mêmes phénomènes physiques ; c'est, dans ce second rôle, le fait que l'exponentielle réalise un homomorphisme $i\theta \mapsto \exp(-i\theta)$ de $(i\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{S}^1, \times)$ qui ici joue un rôle clef.

La difficulté majeure soulevée par la transformation de Fourier se trouve concrétisée par le *principe d'incertitude de Heisenberg* : cette transformation ne respecte pas la localisation des objets ; au contraire, comme le met en évidence l'incarnation de cette transformation en optique (diffraction au travers d'une lentille), ce qui est localisé se trouve être après transformation de Fourier diffus [1], tandis que ce qui se trouve être diffus se retrouve, après transformation de Fourier, parfaitement localisé [2].

On rappelle (voir le cours de MHT613 [**Y2**]) que la transformation de Fourier $f \to \widehat{f}$ réalise (à un facteur près) une isométrie entre l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)$ (correspondant du point de vue physique au $\mathbb{R}$-espace vectoriel des phénomènes physiques d'énergie finie dans le monde spatial ou temporel $\mathbb{R}^n_x$, l'énergie de f étant par définition $\|f\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx$) et le $\mathbb{C}$-espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), d\omega)$ qui en est son doublon ($\mathbb{R}^n_\omega$ étant l'univers des fréquences, on y reviendra). On a

(4.1)
$$\forall\, f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx),\ \ \widehat{f} = \lim_{\substack{N \to +\infty \\ L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), d\omega)}} \Big[\omega \longmapsto \int_{[-N,N]^n} f(x) e^{-i\langle \omega, x\rangle}\, dx\Big],$$

la transformation inverse étant l'application

(4.2)
$$g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), d\omega),\ \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\substack{N \to +\infty \\ L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx)}} \Big[x \longmapsto \int_{[-N,N]^n} g(\omega) e^{i\langle \omega, x\rangle}\, d\omega\Big].$$

1. Penser par exemple à une étoile et à son spectre, après passage du rayonnement au travers de la lentille du télescope.

2. Penser aux signaux acoustiques oscillants dans l'espace temporel transformés en combinaisons de mesures de Dirac dans le champ fréquentiel.

Le fait que cette transformation soit une isométrie (à la constantemultiplicative $(2\pi)^{n/2}$ près) matérialise par la relation

$$
\begin{aligned}
&\forall\, f_1, f_2 \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx),\ \langle f_1, f_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_x} f_1 \overline{f_2}\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \widehat{f_1}, \widehat{f_2}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n_\omega} \widehat{f_1}\overline{\widehat{f_2}}\, d\omega.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

La transformation de Fourier ne préserve pas le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, comme ceci se voit par exemple lorsque $n = 1$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la fonction

$$
\Phi\ : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-izt}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, t^k\, dt}{k!}\, z^k
$$

est une fonction entière se pliant donc (voir le cours de MT734 [**Charp**]) au principe des zéros isolés ; si l'on suppose

$$
\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt > 0
$$

(par exemple $\varphi \geq 0$ et $\varphi \equiv 1$ au voisinage de l'origine, ce qui est possible si φ est une fonction plateau subordonnée à un voisinage compact K de l'origine), la fonction Φ, non nulle en $\omega = 0$, n'est pas identiquement nulle. Comme $\Phi_{|\mathbb{R}}$ est un représentant (continu, en fait C^∞) de $\widehat{\varphi}$ (élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\omega)$), et qu'il est impossible (d'après le principe des zéros isolés) que $\Phi_{|\mathbb{R}}$ soit identiquement nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$ pour un certain $R > 0$, la fonction $\widehat{\varphi}$, considérée ici comme un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\omega)$ ne saurait avoir de représentant dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

La seule chose que l'on puisse assurer est la rapide décroissance vers 0 de toutes les dérivées partielles de la transformée d'une fonction-test. Nous allons préciser cette notion dans la section suivante.

4.1.2. L'espace des fonctions à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais nous nous proposons surtout ici de construire un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui contienne, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, à la fois le $\mathbb{C}$-espace des fonctions-test $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et son image par transformation de Fourier. En restant pour l'instant dans le cas général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, nous introduisons sur le $\mathbb{K}$-espace des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{K}$ une famille d'applications $N_p\ :\ C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \to [0, \infty]$ satisfaisant aux axiomes de norme, hormis le fait qu'elles puissent prendre la valeur $+\infty$.

Définition 4.1 (l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$). Pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$
N_p(\varphi) = \sup_{l_1 + l_2 + \cdots + l_n \leq p}\ \sup_{\mathbb{R}^n} \Big[(1 + \|x\|)^p \Big| \Big(\frac{\partial^{l_1 + \cdots + l_n}}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}\Big)[\varphi](x)\Big|\Big]. \tag{4.4}
$$

On note[3] $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que l'on ait $N_p(\varphi) < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ et n'est donc pas réduit à 0.

Pour tout $p \geq 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, on a $N_0(\varphi) = \|\varphi\|_\infty \leq N_p(\varphi) < +\infty$. Ceci implique que

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}) \mapsto N_p(\varphi)$$

définit une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Ce $\mathbb{K}$-espace peut être muni d'une distance, définie par

$$d(\varphi,\psi) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \inf(N_p(\varphi-\psi),1).$$

Muni de cette distance, le $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est ainsi muni d'une topologie d'espace métrisable. Comme il s'agit d'une topologie d'espace métrisable, cette topologie peut être définie par un principe de convergence des suites : une suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} N_p(\varphi_k) = 0$. D'autres distances sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ définissent la même topologie, par exemple

$$\widetilde{d}(\varphi,\psi) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{2^p} \frac{N_p(\varphi-\psi)}{1+N_p(\varphi-\psi)}.$$

Un système fondamental de voisinages ouverts de la fonction nulle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est donné par

$$\mathcal{W}(0) = \Big\{\{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})\ ; N_p(\varphi) < \epsilon\},\ p \in \mathbb{N},\ \epsilon > 0\Big\}. \tag{4.5}$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ équipé de cette topologie métrisable. Il suffit en effet de remarquer que si $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n,[0,1])$ désigne une fonction-plateau identiquement égale à 1 au voisinage de $B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$ et de support inclus dans $B_{\mathbb{R}^n}(0,2)$, alors, pour un élément quelconque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, la suite $(\varphi_k)_{k\geq 1}$, où

$$\varphi_k(x) := \varphi(x) \times \rho(x/k)$$

converge vers φ au sens de la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$: il suffit en effet de calculer les dérivées successives de $\varphi \times (1-\rho(\cdot/k))$ en invoquant la règle de Leibniz et d'utiliser le fait que l'action de tout opérateur différentiel d'ordre $q > 0$ portant sur $x \mapsto \varphi(x/k)$ fait apparaitre un facteur $1/k^q$ assurant la convergence uniforme vers 0 de toutes les suites du type

$$\Big(x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}\, D^{\underline{l}}[\varphi-\varphi_k]\Big)_{k\geq 1},\ \underline{\lambda},\ \underline{l} \in \mathbb{N}^n,$$

ce qui montre $\lim\limits_{k\to+\infty} N_p(\varphi-\varphi_k) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3. Cette notation a été introduite par Laurent Schwartz. Comme il l'affirme lui-même, il ne s'agissait pas de conforter son ego. Le qualificatif $\mathcal{S}$ vaut en fait pour ≪ sphérique ≫. Nous verrons en effet plus loin (c'etait précisément une remarque de L. Schwartz, voir [**Sch**]) que les éléments du dual de cet espace (que l'on appellera distributions tempérées) sont les distributions sur $\mathbb{R}^n$ qui, une fois remontées sur la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par projection stéréographique inverse depuis le pôle Nord, se prolongent en des distributions sur cette sphère (sous variété compacte de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$).

On a aussi l'importante proposition suivante.

Proposition 4.1 (complétude de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$). *Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est complet pour toute métrique définissant sa topologie.*

Démonstration. Comme

$$N_p(f) \geq \sum_{l_1+\cdots+l_n\leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big| \Big(\frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\cdots \partial x_n^{l_n}}\Big)[\varphi](x)\Big|$$

pour tout $p\in\mathbb{N}$, toute suite de Cauchy $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est nécessairement de Cauchy dans tous les espaces $C^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, $C^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ désignant l'espace vectoriel des fonctions φ de classe C^p sur $\mathbb{R}^n$, telles que

$$\sum_{l_1+\cdots+l_n\leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big| \Big(\frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\cdots \partial x_n^{l_n}}\Big)[\varphi](x)\Big| = \|\varphi\|_\infty^{(p)} < +\infty,$$

équipé précisément de la norme $\|\ \|_\infty^{(p)}$. Or le $\mathbb{K}$-espace normé $(C^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}), \|\ \|_\infty^p)$ est un espace de Banach (on laisse ce point en principe connu en exercice). Pour chaque $p\in\mathbb{N}$, la suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ converge donc dans $C^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ (pour la norme $\|\ \|_\infty^{(p)}$) vers un élément $\varphi^{[p]}$. Toutes ces fonctions $\varphi^{[p]}$ se recollent bien sûr en une fonction φ de classe C^∞. Soit $\epsilon>0$. On a, pour $p\in\mathbb{N}$ fixé,

$$\forall\, k,l \geq M(\epsilon,p),\ N_p(\varphi_k-\varphi_l)<\epsilon. \tag{4.6}$$

Si l'on fixe k et que l'on laisse courir l vers $+\infty$ dans (4.6) (on raisonne à $x\in\mathbb{R}^n$ fixé, puis on prend le sup pour tout x), on constate que $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ et que

$$\forall\, k\geq M(\epsilon,p),\ N_p(\varphi_k-\varphi)<\epsilon.$$

La suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ converge donc vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ car $\lim_{k\to+\infty} N_p(\varphi_k-\varphi)=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$. Le $\mathbb{K}$-espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est donc bien complet. $\square$

On prend maintenant plus spécifiquement $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Sur cet espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, la transformation de Fourier agit de manière que l'on pouvait souhaiter. Notons que c'est en pensant à faire agir cette transformation de Fourier (qui est une transformation de nature complexe et non réelle) que nous nous sommes cantonnés à n'introduire ici que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ et non le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, ce que nous avions fait jusque là (et reprendrons, après cet intermède complexe, dans la sous-section suivante).

Proposition 4.2 (transformation de Fourier et fonctions éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$). *La transformation de Fourier restreinte à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ (considéré comme un sous-espace de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),dx)\cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),dx)$) définit un isomorphisme bicontinu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x,\mathbb{C})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\omega,\mathbb{C})$* [4]. *Cette transformation agit ainsi :*

$$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x,\mathbb{C}) \longmapsto \Big[\widehat{\varphi}\ :\omega\in\mathbb{R}^n_\omega\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,e^{-i\langle x,\omega\rangle}\,dx\Big]. \tag{4.7}$$

4. C'est volontairement que nous avons distingué ici les deux copies de $\mathbb{R}^n$ qu'échange la transformation de Fourier : le *monde temporel* (ou *spatial* si $n>1$) $\mathbb{R}^n_x$ et le *monde fréquentiel* $\mathbb{R}^n_\omega$, jouant le rôle d'univers dual du premier. La réalisation optique de la transformation de Fourier *via* le mécanisme optique de diffraction au travers d'une lentille rend compte de cette dualité.

Cette transformation réalise une isométrie en termes de normes L^2 (i.e. en termes d'énergie), plus précisément

$$\int_{\mathbb{R}^n} |s(x)|^2\,dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{s}(\omega)|^2\,d\omega. \tag{4.8}$$

On a de plus les relations

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n}}{\partial\omega_1^{l_1}\cdots\partial\omega_n^{l_n}}\Big)[\widehat{\varphi}(\omega)] = \Big(\widehat{\prod_{j=1}^n (-ix_j)^{l_j}\,\varphi}\Big)(\omega), \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}^n,\\
&\Big(\widehat{\frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}[\varphi]}\Big)[\omega] = \Big(\prod_{j=1}^n (i\omega_j)^{l_j}\Big)\,\widehat{\varphi}(\omega), \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. La transformation de Fourier inverse est l'application

$$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\omega,\mathbb{C}) \longmapsto \Big[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\ : x\in\mathbb{R}^n_x \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\omega)\,e^{i\langle x,\omega\rangle}\,d\omega\Big] \tag{4.10}$$

Démonstration. Les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ sont les fonctions intégrables et leur transformée de Fourier se calcule comme la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, c'est à dire suivant (4.7). C'est le théorème de Lebesgue de dérivation des intégrales à paramètres qui permet d'assurer la validité de la première des deux batteries de formules (4.9). La seconde de ces deux batteries de formules s'obtient *via* des intégrations par parties itérées suivant les variables. La formule 4.8 résulte du fait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),dx)\cap\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),dx)$, couplé avec le fait que la transformation de Fourier réalise une isométrie entre $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),dx)$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),d\omega)$ (voir [**Y2**], Proposition 2.11), au coefficient multiplicatif $(2\pi)^{n/2}$ près.

Les formules (4.9) assurent que si $(l_1,...,l_n)$ et $(l'_1,...,l'_n)$ sont deux multi-indices, on a, pour tout $\omega\in\mathbb{R}^n$, en notant pour simplifier

$$|\omega|^l = \prod_{j=1}^n |\omega_j|^{l_j}\ ,\ D^{\underline{l}} = \Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big),\ (-ix)^{\underline{l}} = \prod_{j=1}^n (-ix_j)^{l_l},$$

$$\begin{aligned}
|\omega|^l\,|D^{\underline{l'}}[\widehat{\varphi}](\omega)| &= |\omega|^l\,\Big|\widehat{(-ix)^{\underline{l'}}}\varphi(\omega)\Big|\\
&= \Big|\mathcal{F}\Big[D^{\underline{l}}\big[(-ix)^{\underline{l'}}\,\varphi\big]\Big](\omega)\Big|\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\Big|D^{\underline{l}}\big[(-ix)^{\underline{l'}}\,\varphi\big](x)\Big|\,dx\\
&\leq \sup_{\mathbb{R}^n}\Big[\Big(1+\|x\|\Big)^{n+1}\Big|D^{\underline{l}}\big[(-ix)^{\underline{l'}}\,\varphi\big](x)\Big|\Big]\times\\
&\qquad\times\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{(1+\|x\|)^{n+1}} < \infty.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Il en résulte que la transformation de Fourier préserve globalement le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. On constate aussi que les inégalités (4.11) que l'on vient d'établir assurent que la transformation de Fourier réalise une application continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ dans lui-même. En particulier, la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ est, comme l'élément lui-même, une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On est dans dans les conditions d'application de la formule d'inversion de Fourier ([**Y2**], Théorème 2.4). La transformation (4.10) se traite exactement comme la transfomation de Fourier (on a juste changé dans le facteur exponentiel sous l'intégrale $-i$ en $-i$ et multiplié par le facteur $(2\pi)^{-n}$) et réalise un opérateur continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ dans lui-même qui, d'après précisément la formule d'inversion, réalise bien l'inverse de la transformation de Fourier. $\square$

La proposition 4.2 offre un moyen intéressant de « quantifier » le principe d'incertitude d'Heisenberg (c'est là un joli exercice, bien pour une illustration de leçon d'Agrégation par exemple). Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est normalisée de manière à ce que

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 \, dt = 1,$$

le produit des moments d'inertie par rapport à l'origine des distributions correspondant à φ et à son *spectre*[5] est minoré par la constante absolue $\pi/2$, *i.e*

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 \, |t|^2 \, dt \times \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \, |\omega|^2 \, d\omega \geq \frac{\pi}{2}. \tag{4.12}$$

Pour le voir, il suffit d'une part d'intégrer par parties

$$\mathrm{Re}\Big(\int_{-N}^{N} t\varphi(t)\overline{\varphi'(t)}\, dt\Big) = \frac{1}{2}\Big[t|\varphi(t)|^2\Big]_{-N}^{N} - \frac{1}{2}\int_{-N}^{N} |\varphi(t)|^2 \, dt$$

et de faire tendre N vers $+\infty$, ce qui donne

$$\mathrm{Re}\Big(\int_{-u}^{v} t\varphi(t)\overline{\varphi'(t)}\, dt\Big) = -\frac{1}{2}$$

compte tenu des hypothèses (φ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et d'énergie 1), d'autre part d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer

$$\begin{aligned} \Big|\mathrm{Re}\Big(\int_{-u}^{v} t\varphi(t)\overline{\varphi'(t)}\, dt\Big)\Big|^2 &\leq \|t\varphi\|_2^2 \times \|\varphi'\|_2^2 \\ &\leq \|t\varphi\|_2^2 \times \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\omega|^2 \, |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \, d\omega \qquad (4.13) \end{aligned}$$

(on utilise la Proposition 4.2 pour passer à la dernière inégalité). On peut remarquer au passage que l'égalité dans (4.12) n'a lieu que si l'on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée en (4.13), c'est-à-dire quand φ' et $t\varphi$ sont proportionnelles, ce qui correspond au fait que φ soit une gaussienne (l'équation différentielle du premier ordre $y'(t) = \lambda\, t\, y(t)$ est immédiate à résoudre).

4.1.3. Le $\mathbb{K}$-espace des distributions tempérées à valeurs réelles ou complexes.

Définition 4.3 (distribution tempérée). Les éléments du $\mathbb{K}$-dual topologique du $\mathbb{K}$-espace métrisable $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, sont appelées *distributions tempérées* à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Clairement $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ et l'injection

$$\iota \ : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

est une application continue : si en effet une suite de fonctions test $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ au sens du principe de convergence des suites de la Définition

5. C'est le terme physique pour qualifier ce qui pour nous est la transformée de Fourier.

1.11, cette suite d'éléments, considérée cette fois, ainsi que sa limite, comme une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Il en résulte que la restriction d'une distribution tempérée à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Par contre, toutes les distributions à valeurs complexes sur $\mathbb{R}^n$ ne peuvent être considérées comme les restrictions à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ de distributions tempérées. La Proposition 4.3 clarifiera précisément cet état de fait.

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est équipé naturellement d'une topologie, dite $*$ *faible*. On se contentera d'y énoncer (ce qui suffira à nos besoins) un principe de convergence des suites. Pour être en phase avec le fait que l'on souhaite considérer le $\mathbb{K}$-espace topologique $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ comme un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, il est naturel que ce principe de convergence des suites soit cohérent avec celui que l'on a introduit pour les suites de distributions dans la Définition 2.1. Une suite $(T_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ converge donc vers un élément $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ si et seulement si

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\quad \lim_{k\to+\infty}\langle T_k,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle. \tag{4.14}$$

Proposition 4.3 (deux caractérisations des distributions tempérées). *Une distribution $T\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ est tempérée (i.e. peut être considérée comme la restriction à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ d'une distribution tempérée) si et seulement si l'une des propriétés suivantes (équivalentes) est satisfaite*[6] *:*

(1) Il existe un entier $p\in\mathbb{N}$ et une constante $C\geq 0$ telles que

$$|\langle T,\varphi\rangle|\leq C\,N_p(\varphi)\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})\ ; \tag{4.15}$$

(2) la distribution $\widetilde{T}$ sur $\mathbb{S}^n\setminus\{(0,...,0,1)\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ déduite de T par projection stéréographique inverse (depuis le pôle Nord $(0,..,0,1)$) se prolonge en une distribution sur $\mathbb{S}^n$ (considérée comme sous-variété compacte de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$), à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. Prouvons d'abord l'équivalence avec le premier point. Les éléments du dual topologique du $\mathbb{K}$-espace vectoriel métrisable $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ sont les applications linéaires $\widetilde{T}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ qui sont continues en $\varphi=0$, *i.e* telle que l'image reciproque de la boule unité ouverte du corps $\mathbb{K}$ contienne un élément du système fondamental (4.5). Ceci signifie donc qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ et $\epsilon>0$ tel que

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\quad \Big(N_p(\varphi)<\epsilon\Big)\Longrightarrow|\langle\widetilde{T},\varphi\rangle|<1.$$

Ceci équivaut à dire qu'il existe une constante positive $C=1/\epsilon$ telle que la condition (4.15) soit remplie pour tout élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, donc en particulier pour tout fonction-test $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Si une distribution T est tempérée, elle se prolonge comme un tel $\widetilde{T}$ en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ et $T=\widetilde{T}_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})}$ satisfait donc (4.15). Réciproquement, si T vérifie (4.15), on peut prolonger T à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ de la manière suivante : on approche dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ (ce qui est possible) un élément quelconque φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ par une suite de fonctions-test $(\varphi_k)_{k\geq 0}$; la suite de scalaires $(\langle T,\varphi_k\rangle)_{k\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ car

$$|\langle T,\varphi_k\rangle-\langle T,\varphi_l\rangle|\leq C\,N_p(\varphi_k-\varphi_l)$$

6. La première constitue un critère quantitatif bien utile. La seconde fournit l'explication de la notation $\mathcal{S}$ pour ≪ sphérique ≫ et non, comme on le pense souvent, pour ≪ Schwartz ≫.

et converge vers une limite l dans $\mathbb{K}$, laquelle limite ne dépend que de φ et non de la suite d'approche $(\varphi_k)_{k\geq 0}$. En posant $\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = l = l(\varphi)$, on prolonge bien T en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Prouvons maintenant l'équivalence avec le second item. La *projection stéréographique* depuis le pôle Nord $((0, ..., 0, 1))$ sur le plan $x_{n+1} = 0$ induit (d'après le théorème de Thalès) la correspondance

$$(X_1, ..., X_n, t) \in \mathbb{S}^n \setminus \{(0, ..., 0, 1)\} \longleftrightarrow \Big(\frac{X_1}{1-t}, ..., \frac{X_n}{1-t}\Big) \in \mathbb{R}^n.$$

On vérifie que la transformation inverse est

(4.16)
$$(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \Big(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2}, ..., \frac{2x_n}{1+\|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2+1}\Big) \in \mathbb{S}^n \setminus \{(0, ..., 0, 1)\}.$$

Dire qu'une distribution T sur $\mathbb{R}^n$ se prolonge, une fois « remontée » sur la sphère $\mathbb{S}^n$ *via* la transformation (4.16), en une distribution sur cette sphère (pôle Nord cette fois inclus) revient à dire qu'elle se prolonge en une distribution $\widetilde{T}$ dans un voisinage U du pôle Nord (par exemple l'image réciproque par projection stéréographique inverse de $U = \{\|x\| > R\}$ pour $R >> 1$, à laquelle on adjoint le pôle Nord).

A) Prouvons d'abord que si T peut se prolonger en une distribution sur $\mathbb{S}^n$ alors T vérifie le critère (4.15). D'après le critère quantitatif donné dans la Proposition 1.2 (on note que $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété compacte), qu'il convient ici d'adapter du cadre des ouverts de $\mathbb{R}^n$ au cadre des ouverts d'une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$ (voir la Section 1.5), on voit que le fait que T puisse ainsi se prolonger équivaut au fait qu'il existe un entier $p = p(\overline{U})$ et une constante $C \geq 0$ telles que, pour toute fonction-test φ de support dans $\{\|x\| > R\}$, on ait

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\, N_{\overline{U}\,,\, p(\overline{U})}\Big[(X, t) \in \mathbb{S}^n \mapsto \varphi\Big(\frac{X_1}{1-t}, ..., \frac{X_n}{1-t}\Big)\Big], \tag{4.17}$$

la norme $N_{\overline{U}\,,\, p(\overline{U})}$ étant exprimée à partir de calculs de dérivés conduits cette fois sur des fonctions sur la sphère, paramétrée au voisinage de $\overline{U}$ par $(X_1, ..., X_{n-1}, t) = (X', t)$, sachant que

$$X_n = \sqrt{1 - X_1^2 - \cdots - X_{n-1}^2 - t^2} = \rho(X', t)$$

sur $\mathbb{S}^n$. On remarque que si (X, t) et x sont échangés par projection stéréographique, on a (voir (4.16))

$$\frac{1}{1-t} = \frac{1+\|x\|^2}{2}. \tag{4.18}$$

Une dérivation à l'ordre k en (X', t) de la fonction

$$(X_1, ..., X_{n-1}, t) \mapsto \varphi\Big(\frac{X_1}{1-t}, ..., \frac{\rho(X', t)}{1-t}\Big)$$

fait surgir le facteur $(1-t)^{-k}$, correspondant d'après (4.18) à $(1+\|x\|^2)^k/2^k$. On constate ainsi, en utilisant la règle de Leibniz, que l'inégalité (4.17) implique qu'il existe une constante $\widetilde{C}$ et un entier $p \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction-test de support dans $\{\|x\| > R\}$ dans $\mathbb{R}^n$, on ait

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \widetilde{C}\, N_{p(\overline{U})}(\varphi).$$

On retrouve bien la condition nécessaire et suffisante du premier item (en écrivant $T=\rho T+(1-\rho)T$, où ρ est une fonction plateau subordonnée à $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,R)$ et en utilisant le fait que ρT est à support compact et la Proposition 3.3 et son critère (3.4)).

B) Supposons maintenant que T soit tempérée (et donc vérifie le critère (4.15) pour un certain entier $p\in\mathbb{N}$). Si Φ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{S}^n$, la restriction de Φ à l'ouvert $\mathbb{S}^n\setminus\{(0,...,0,1)\}$ induit par projection stéréographique depuis le pôle nord une fonction φ de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$ (mais non à support compact). Cette fonction φ s'exprime en termes de Φ par

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^n,\varphi(x)=\Phi\Big(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2},...,\frac{2x_n}{1+\|x\|^2},\frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\Big).$$

En appliquant la règle de Leibniz et en remarquant que la fonction Φ est indéfiniment dérivable au voisinage du pôle nord (correspondant à l'infini dans $\mathbb{R}^n$), on constate que pour tout multi-indice $\underline{l}=(l_1,...,l_n)\in\mathbb{N}^n$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\Big(\prod_{j=1}^n\frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[\varphi](x)\leq\frac{C_{\underline{l}}(\Phi)}{(1+\|x\|)^{2(l_1+\cdots+l_n)}}\tag{4.19}$$

pour une certaine constante positive $C_{\underline{l}}(\Phi)$: en effet

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\frac{x_k}{1+\|x\|^2}\Big]=O(1/\|x\|^2)\quad\&\quad\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}\Big]=O(1/\|x\|^3)$$

lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini. Considérons une fonction plateau subordonnée à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et posons, pour $k\geq 1$, $\rho_k(x)=\rho(x/k)$. Il résulte de (4.19) et du fait que T est tempérée (et vérifie donc le critère (4.15) pour un certain $p\in\mathbb{N}$) que la suite $(\langle T,\rho_k\varphi\rangle)_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy convergent dans le corps complet $\mathbb{K}$ vers une limite $l(\Phi)$. On vérifie d'ailleurs de $\Phi\mapsto l(\Phi)$ est une distribution $\widetilde{T}$ sur $\mathbb{S}^n$ (d'ailleurs indépendante du choix de la fonction plateau ρ) d'ordre au plus p. On a ainsi prolongé T (distribution sur $\mathbb{R}^n$) en une distribution sur la sphère unité $\mathbb{S}^n$. □

Il résulte de la Proposition 4.3 que la classe des distributions tempérées est préservée par dérivation. Tout opérateur différentiel réalise d'ailleurs un opérateur continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ dans lui-même.

Exemple 4.4 ($\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$). Toute distribution à support compact sur $\mathbb{R}^n$ est tempérée. En effet, ceci résulte de la Proposition 3.3 (le critère (3.4) implique que la clause (4.15) soit satisfaite).

Exemple 4.5 (distributions périodiques suivant un réseau de rang n). Montrer que toute distribution T périodique par rapport à un réseau Λ de rang n de $\mathbb{R}^n$ (sous-groupe libre de $\mathbb{R}^n$ de rang n), *i.e*

$$\langle T,\varphi\rangle=\langle T,\varphi(\lambda+\cdot)\rangle\quad\forall\lambda\in\Lambda$$

est tempérée.

Exemple 4.6 (mesures à croissance lente et représentation des distributions tempérées en ces termes). Une mesure de Radon $\mu\ :\mathcal{K}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ ($\mu=\mu^+-\mu^-$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mu=(\mu^+-\mu^-)+i(\nu^+-\nu^-)$ d'après le Théorème 1.3 de représentation de Riesz) est dite *à croissance lente* (on dit aussi « tempérée », comme cela sera justifié plus loin) si et seulement si il existe un entier positif p tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d|\mu|(x)}{(1+\|x\|)^p} < +\infty. \tag{4.20}$$

Si de plus la mesure μ est une mesure à densité $f(x)\,dx$ avec f localement intégrable, on dit, si (4.20) est remplie, que f est une *fonction à croissance modérée* [7] . Le fait que μ soit à croissance lente est aussi équivalent au fait qu'il existe un entier $p' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, R > 0, \quad |\mu|([-R,R]^n) \leq C(1+R)^{p'}. \tag{4.21}$$

En effet, si (4.20) est remplie, on a bien

$$\begin{aligned} |\mu|\,([-R,R]^n) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-R,R]^n}(x) d|\mu|(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1+R}{1+\|x\|}\Big)^p d|\mu|(x) \\ &\leq (1+R)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d|\mu|(x)}{(1+\|x\|)^p} = C(1+R)^p, \end{aligned}$$

d'où la validité de (4.21) avec $p' = p$. Réciproquement, si (4.21) est remplie, on a, pour tout multi-indice $\underline{k} = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$|\mu(\underline{k} + [-1,1]^n)| \leq C\Big(1 + \prod_{j=1}^n (1+|k_j|)\Big)^{p'}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d|\mu|(x)}{(1+\|x\|)^{np'+n+1}} &= \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \int_{\underline{k}+[-1,1]^n} \frac{d|\mu|(x)}{(1+\|x\|)^{np'+n+1}} \\ &\leq \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \frac{|\mu|(\underline{k}+[-1,1]^n)}{\min_{\underline{k}+[-1,1]^n}(1+\|x\|)^{np'+n+1}} \\ &\leq C \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \frac{\Big(1+\prod_{j=1}^n (1+|k_j|)\Big)^{p'}}{\Big(\prod_{j=1}^n (1+|k_j|)\Big)^{p'+1+1/n}} < +\infty \end{aligned}$$

puisque $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{-1-\epsilon} < +\infty$ pour $\epsilon > 0$. Les mesures à croissance lente constituent des exemples de distributions tempérées (d'ordre 0), d'où le fait qu'on les appelle aussi « mesures tempérées ». En effet, si la mesure μ vérifie (4.20) et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu(x)\Big| &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} \Big|(1+\|x\|)^p \varphi(x)\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d|\mu|(x)}{(1+\|x\|)^p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d|\mu|(x)}{(1+\|x\|)^p} \times N_p(\varphi), \end{aligned}$$

ce qui prouve que le critère quantitatif (4.15) est bien rempli avec ce p. Grâce au théorème de représentation de Riesz (Théorème 1.3), il résulte de ce même critère que si T est une distribution tempérée (à valeurs dans $\mathbb{K}$) vérifiant donc le critère

7. À ne pas confondre avec la notion de « fonction à croissance lente ». Une *fonction à croissance lente* sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ (à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dont toutes les dérivées sont à croissance modérée. Toute fonction à croissance lente définit bien sûr une fonction à croissance modérée.

(4.15) avec $p \in \mathbb{N}$, il existe une collection $\{\mu_{T,\underline{l}}\,;\ \underline{l} \in \mathbb{N}^n,\ l_1 + \cdots + l_n \leq p\}$ de mesures à croissance lente à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que

$$T = \sum_{\substack{\underline{l}\in\mathbb{N}^n \\ l_1+\cdots+l_n\leq p}} \Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)\,[\mu_{T,\underline{l}}] \tag{4.22}$$

au sens des distributions.

Exemple 4.7 (multiplication d'une distribution tempérée par une fonction à croissance lente). Si T est une distribution tempérée à valeurs dans $\mathbb{K}$ et f est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{K}$ à croissance lente (*i.e* toutes les dérivées de f sont à croissance modérée, voir l'exemple 4.6), la distribution fT définie par $\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle$ est aussi tempérée. On vérifie ceci immédiatement en utilisant le critère (4.15) (faire l'exercice). De plus l'opérateur $T \to fT$ est continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ dans lui-même.

Exemple 4.8 (convolution d'une distribution tempérée avec une distribution à support compact). Si $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, on peut définir $S * T$ (Proposition 3.7). On a par définition, pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$,

$$\langle S * T, \varphi\rangle = \Big\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\Big\rangle$$

(on note que $x \mapsto \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle$ est bien une fonction test, voir l'exemple 3.18). En combinant le critère (4.15) pour S et le critère (3.4) de la Proposition 3.3 (T est à support compact), on constate que $S * T$ se plit aussi au critère (4.15), avec $p = p(S) + \mathrm{ordre}(T)$, ce qui implique que $S * T$ est aussi tempérée.

Exercice 4.9. Les distributions-fonction $[e^t]$ et $[e^{t^2}]$ sont-elles tempérées sur $\mathbb{R}$? Pour quels choix de $p \in \mathbb{C}$ et $\alpha > 0$ la distribution $L_{p,\alpha} = [H(t)t^{\alpha-1}e^{pt}/\Gamma(\alpha)]$ (voir la Section 2.5.2, (2.32)) est-elle tempérée comme distribution sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.10 (distributions du type Valeur Principale ou Partie Finie). Montrer que la distributions $\mathrm{VP}[1/x]$ sur $\mathbb{R}$ et les distributions afférentes du type $\mathrm{PF}[1/x^{2M}]$ ou $\mathrm{VP}[1/x^{2M+1}]$ introduites dans la Section 1.4.3 sont toutes des distributions tempérées (on utilisera le fait que $[\log|x|]$ définit une distribution-fonction tempérée et le fait que toutes les distributions mentionnées se déduisent de celle ci par action d'un opérateur différentiel). Vérifier que l'on a

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \quad \langle \mathrm{VP}[1/x], \varphi\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx. \tag{4.23}$$

4.2. Transformation de Fourier des distributions tempérées

Le fait que la transformation de Fourier réalise un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (Proposition 4.2) induit la possibilité de définir par dualité la *transformée de Fourier* (ou *spectre* pour les physiciens) .

Définition 4.11 (spectre d'une distribution tempérée). La transformation qui à $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{C})$ associe la distribution $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\omega, \mathbb{C})$ définie par

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})\,, \quad \langle \widehat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle \tag{4.24}$$

est appelée *transformation de Fourier des distributions tempérées* ou encore *prise de spectre* (des distributions tempérées). Il s'agit d'un isomorphisme topologique entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{C})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\omega, \mathbb{C})$.

Nous donnerons beaucoup d'exemples dans les sous-sections suivantes. L'exemple 4.12 ci-dessous fournit le prétexte à un exercice d'application de la formule de dualité (4.24).

EXEMPLE 4.12 (transformation de Fourier de Valeur Principale). La distribution $\mathrm{VP}[1/x]$ sur $\mathbb{R}$ est une distribution tempérée (voir l'exercice 4.10). On peut calculer sa transformée de Fourier (au sens des distributions tempérées) en utilisant la formule (4.23), le théorème de Fubini, et enfin le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que, pour, toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\mathrm{VP}[1/x]}, \varphi \rangle &= \langle \mathrm{VP}[1/x], \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\varphi}(\omega) - \widehat{\varphi}(-\omega)}{\omega}\, d\omega \\
&= \lim_{\Omega \to +\infty} \Big(\frac{1}{2} \int_{[-\Omega,\Omega]} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \Big(\frac{e^{-i\omega x} - e^{i\omega x}}{\omega} \Big)\, dx \Big)\, d\omega \Big) \\
&= \lim_{\Omega \to +\infty} \Big(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{[-\Omega,\Omega]} \Big(\frac{e^{-i\omega x} - e^{i\omega x}}{\omega} \Big)\, d\omega \Big)\, \varphi(x)\, dx \Big) \\
&= i \int_{\mathbb{R}} \Big(\lim_{\Omega \to +\infty} \int_{[-\Omega,\Omega]} \frac{\sin(\omega x)}{\omega}\, d\omega \Big)\, \varphi(x)\, dx \\
&= i\pi \Big(\int_{[0,+\infty[} \varphi(x)\, dx - \int_{]-\infty,0]} \varphi(x)\, dx \Big).
\end{aligned}$$

On a donc ainsi (en utilisant aussi la formule d'inversion) les formules

$$\widehat{\mathrm{VP}[1/x]} = i\pi \times \operatorname{signe}(\omega) \quad \& \quad \widehat{\operatorname{signe}(x)} = -\frac{i}{\pi}\, \mathrm{VP}[1/x]. \tag{4.25}$$

4.2.1. Le cas particulier des distributions à support compact. Les distributions à support compact sont des distributions tempérées (voir l'exemple 4.4). On peut donc définir leur transformation de Fourier au sens des distributions. Avant de traiter le cas général, arrêtons nous un instant sur un cas particulier, celui des distributions de support un point donné $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Cela nous aidera à éclairer le cas général.

PROPOSITION 4.4 (transformée de Fourier des distributions à support ponctuel). *Les transformées de Fourier des distributions à support le point x_0 de $\mathbb{R}^n$ sont les distributions-fonction correspondant aux fonctions F de la forme $F(\omega) = P(\omega)\, e^{-i\langle \omega, x_0 \rangle}$, où $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$.*

DÉMONSTRATION. Toute distribution T de support $\{x_0\}$ est de la forme

$$T = Q\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \Big)[\delta_{x_0}],$$

où $Q \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ (d'après la Proposition 3.4). Si φ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, on a (par définition de la dérivée des distributions et en utilisant la première des batteries de formules (4.9))

$$\begin{aligned}
\langle T, \widehat{\varphi} \rangle &= Q\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., -\frac{\partial}{\partial x_n} \Big)[\varphi](x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} Q(ix_1, ..., ix_n) e^{-i\langle x, x_0 \rangle}\, \varphi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} Q(i\omega_1, ..., i\omega_n) e^{-i\langle \omega, x_0 \rangle}\, \varphi(\omega)\, d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P(\omega_1, ..., \omega_n) e^{-i\langle \omega, x_0 \rangle}\, \varphi(\omega)\, d\omega = \Big\langle \Big[P(\omega) e^{-i\langle \omega, x_0 \rangle} \Big], \varphi \Big\rangle
\end{aligned}$$

si $P(X_1,...,X_n) := Q(iX_1,...,iX_n)$. La proposition est ainsi démontrée. □

EXERCICE 4.13. Montrer que si $\omega_1,...,\omega_N$ sont N points de $\mathbb{R}^N$ et $a_1,...,a_N$ N fonctions polynomiales à coefficients complexes en n variables, la distribution fonction $[f]$, où

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\, \cos\langle \omega_j, x\rangle,$$

est tempérée et calculer son spectre.

Le très important théorème de Paley-Wiener [8] caractérise les transformées de Fourier des distributions à support dans un compact convexe donné K de $\mathbb{R}^n$. Avant d'énoncer ce théorème (Théorème 4.16), nous devons préciser quelques définitions.

Si K désigne un compact de $\mathbb{R}^n$, sa *fonction support* est la fonction convexe :

$$H_K\ : \omega \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sup_{x\in K} \langle \omega, x\rangle. \tag{4.26}$$

EXEMPLE 4.14 (exemples de fonction support). La fonction support de la boule $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0,R)}$, est $\omega \mapsto R\|\omega\|$, où $\|\omega\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Celle du pavé $K = [-R,R]^n$ est $\omega \mapsto \sum_{j=1}^n |\omega_j|$.

Nous aurons aussi besoin de la définition suivante, complétant dans le cadre de plusieurs variables le cours d'Analyse Complexe [**Charp**].

DÉFINITION 4.15. Une fonction $F\ : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est dite *entière (en les n variables* $z_1,...,z_n$) si elle est continue et si, pour chaque $j = 1,...,n$, pour chaque $(z_1,...,z_n)$ dans $\mathbb{C}^n$, la fonction

$$\zeta \longmapsto F(z_1,...,z_{j-1},\zeta,z_{j+1},...,z_n)$$

est une fonction entière de la variable complexe ζ.

Armés de ces définitions, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

THEORÈME 4.16 (théorème de Paley-Wiener, version distributions). *Nous avons le résultat en deux volets suivant.*

— *Soit T une distribution à support inclus dans le convexe compact K de $\mathbb{R}^n$. La distribution $\widehat{T}$ est une distribution-fonction F, où F est une fonction à croissance lente (voir l'exemple 4.7) qui est la restriction à $\mathbb{R}^n$ d'une fonction entière de n variables (notée aussi F) telle que*

$$\begin{aligned}&\exists\, M \in \mathbb{N} \quad \text{tel que}\\ &\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, C_\epsilon > 0,\ \forall\, z \in \mathbb{C}^n\ ,\ |F(z)| \leq C_\epsilon (1+\|z\|)^M\, e^{H_K(\mathrm{Im}\, z)+\epsilon\|\mathrm{Im}\, z\|}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

— *Réciproquement, si F est une fonction entière de n variables vérifiant* (4.27), *alors la restriction $F_{|\mathbb{R}^n}$ de F à $\mathbb{R}^n$ définit une distribution-fonction tempérée $[F_{|\mathbb{R}^n}]$ qui est image par la transformation de Fourier (au sens des distributions tempérées) d'une distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, de support inclus dans le convexe compact K ; cette restriction $F_{|\mathbb{R}^n}$ est donc nécessairement une fonction C^∞ à croissance lente sur $\mathbb{R}^n$.*

8. Emporté par une avalanche à l'age de 26 ans alors qu'il skiait dans les Montagnes Rocheuses près de Banff (Alberta), le jeune mathématicien anglais Raymond Edward Paley (1907-1933) n'eut pas le temps de connaitre la réputation qu'il mérite. Norbert Wiener (1894-1964) fut l'un des pionniers de la théorie du signal moderne.

Démonstration. Prouvons tout d'abord le premier volet (le plus facile). On remarque que si T est une distribution à support dans le convexe compact K et si $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, [0,1])$ désigne une fonction plateau identiquement égale à 1 au voisinage de K,

$$\begin{aligned} \langle T_\omega, \widehat{\varphi}\rangle &= \Big\langle T_\omega\,,\, \rho(\omega) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{-i\langle \omega, x\rangle}\, dx\Big\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle T_\omega, \rho(\omega)\, e^{-i\langle \omega, x\rangle}\rangle\, \varphi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle T_x, e^{-i\langle \omega, x\rangle}\rangle\, \varphi(\omega)\, d\omega \end{aligned}$$

du fait de la linéarité et continuité de T (qui explique ici le fait que prise d'intégrale et action de T commutent, ce qui se voit par exemple si on approche l'intégrale définissant $\widehat{\varphi}(\omega)$ par des sommes de Riemann [9]. Ceci montre que la transformée de Fourier de T au sens des distributions tempérée est la distribution-fonction $[F]$ où

$$F\ : \omega \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle T_x\,,\, e^{-i\langle \omega, x\rangle}\rangle.$$

Cette fonction est une fonction C^∞ dans $\mathbb{R}^n$ (on le montre comme dans l'exemple 3.18, voir aussi l'argument utilisé dans la preuve de la Proposition 2.2) et, pour tout multi-indice $\underline{l} \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\Big(\prod_{j=1}^n \frac{\partial^{l_j}}{\partial x_j^{l_j}}\Big)[F](\omega) = \Big\langle T_x\,,\, (-ix_1)^{l_1} \dots (-ix_n)^{l_n}\, e^{-i\langle \omega, x\rangle}\Big\rangle. \tag{4.28}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$\begin{aligned} F(z) &= \Big\langle T_x\,,\, e^{-i(z_1x_1+\cdots+z_nx_n)}\Big\rangle \\ &= \Big\langle T_x\,,\, \rho(x)\, e^{-i(z_1x_1+\cdots+z_nx_n)}\Big\rangle. \end{aligned}$$

La fonction F est continue sur $\mathbb{C}^n$ (du fait que T_x est une distribution) et le théorème de Morera (voir [**Charp**]), couplé avec le théorème de Fubini, implique aussi que F est une fonction entière en les n variables $z_1, ..., z_n$. En utilisant le critère (3.4) de la Proposition 3.3 et le fait que pour x tel que $d(x,K) \leq \epsilon$ et $z \in \mathbb{C}$, on ait

$$|\exp(-i(z_1x_1+\cdots+z_nx_n))| = \exp\Big(\sum_{j=1}^n x_j \operatorname{Im} z_j\Big) \leq \exp(H_K(\operatorname{Im} z) + \epsilon\|\operatorname{Im} z\|),$$

on montre que les estimations (4.27) sont satisfaites (l'entier M qu'il convient de prendre est ici l'ordre de T). En appliquant le même critère (3.4), mais cette fois au second membre de (4.28), on constate que la fonction de ω figurant précisément dans ce second membre est aussi en $O(\|\omega\|^M)$ au voisinage de l'infini. Ceci montre que F est bien une fonction à croissance lente.

On ne donnera dans ce cours une preuve de la réciproque que dans le cas $n = 1$ et $K = [-R, R]$ (en fait, dans le cas $n = 1$, on ramène aisément le cas où K est un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à ce cas). On se donne une fonction entière F en n variables

9. On retrouve ici l'argument utilisé plusieurs fois dans ce cours, par exemple lors de la preuve de la Proposition 2.2.

complexes satisfaisant aux estimations (4.27) (ici $H_K(\mathrm{Im}\, z)$ est donc à remplacer par $R\,|\mathrm{Im}\, z|$) puisqu'on se place en dimension un. Du fait que

$$\forall\, \omega \in \mathbb{R}^n,\ |F(\omega)| \leq C_1(1+|\omega|)^M$$

(prendre $\epsilon = 1$ et $z = \omega \in \mathbb{R}^n$ dans (4.27)), on constate (il suffit d'invoquer les batteries de formules (4.9)) que l'on définit une distribution tempérée T sur $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),\ \langle T, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n} F(-\omega)\widehat{\varphi}(\omega)\, d\omega.$$

On a en particulier

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),\ \langle T, \widehat{\varphi}\rangle \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n} F(-\omega)\,\widehat{\widehat{\varphi}}(\omega)\, d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} F(\omega)\,\varphi(\omega)\, d\omega$$

d'après l'expression (4.10) de la transformation de Fourier inverse au niveau des fonctions-test, et par voie de conséquences, au niveau des distributions par dualité. On a donc bien $\widehat{T} = F_{|\mathbb{R}^n}$ au sens des distributions tempérées. Il reste à prouver que le support de T est bien inclus dans $[-R, R]$. Pour cela, nous montrons que si $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset [R+\epsilon_0, +\infty[$ pour un certain $\epsilon_0 > 0$, alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$ (de manière tout à fait symétrique, on prouverait qu'il en est de même si $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset]-\infty, -R-\epsilon_0]$). Prenons donc une fonction-test φ de support dans $[R+\epsilon_0, +\infty[$ pour un certain $\epsilon_0 > 0$. On a donc, compte-tenu du choix de φ,

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{[R+\epsilon_0[} \varphi(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_{[R+\epsilon_0[} \varphi(t) e^{-izt}\, dt.$$

Cette intégrale converge du fait que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. De plus, on peut utiliser le théorème de Morera [**Charp**], toujours couplé avec celui de Fubini, pour montrer que $z \longmapsto \widehat{\varphi}(z)$ est une fonction entière. En utilisant des intégrations par parties (comme pour la seconde des batteries de formules 4.9), on constate que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(iz)^k \widehat{\varphi}(z) = \int_{[R+\epsilon_0, +\infty[} \frac{d^k}{dt^k}[\varphi](t)\, e^{-izt}\, dt$$

et donc qu'il existe une constante γ telle que

$$\forall\, z = x+iy \text{ avec } y<0,\ |\widehat{\varphi}(z)| \leq \frac{\gamma}{(1+|z|)^{M+2}}\, e^{-(R+\epsilon_0)|\mathrm{Im}\, z|}. \tag{4.29}$$

Soit, pour $T > 0$ et $y > 0$, $\Gamma_{T,y}$ la lacet de $\mathbb{C}$ correspondant au bord du rectangle $[-y, 0] \times [-T, T]$ orienté dans trigonométrique. La formule de Cauchy (voir le cours d'analyse complexe [**Charp**]) implique

$$\int_{\Gamma_{T,y}} F(-\zeta)\, \widehat{\varphi}(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Du fait des estimations (4.27) et (4.29), les deux intégrales

$$\int_{[-T-iy, -T]} F(-\zeta)\, \widehat{\varphi}(\zeta)\, d\zeta \quad \& \quad \int_{[T-iy, T]} F(-\zeta)\, \widehat{\varphi}(\zeta)\, d\zeta$$

(sur les segment verticaux du contour $\Gamma_{T,y}$) sont toutes deux majorées en module par $y\,\gamma\,C_1\,(1+T)^{-2}e^{(R+1)y}$ et tendent donc vers 0 lorsque $y>0$ est fixé et T tend vers $+\infty$. Il en résulte l'égalité des deux intégrales (toutes deux absolument convergentes en vertu des estimations (4.27) et (4.29)) :

$$\int_{\mathbb{R}} F(-\omega)\,\widehat{\varphi}(\omega)\,d\omega = \int_{\mathbb{R}} F(-\omega+iy)\,\widehat{\varphi}(\omega-iy)\,d\omega. \tag{4.30}$$

Or les estimations (4.27) et (4.29) impliquent

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}} F(-\omega+iy)\,\widehat{\varphi}(\omega-iy)\,d\omega\Big| \leq \int_{\mathbb{R}} |F(-\omega+iy)|\,|\widehat{\varphi}(\omega-iy)|\,d\omega \\
&\leq \gamma\,C_{\epsilon_0/2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(R+\epsilon_0/2)y-(R+\epsilon_0)y}}{(1+|\omega|)^2}\,d\omega \leq \gamma\,C_{\epsilon_0/2}\,e^{-\epsilon_0 y/2}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\omega}{(1+|\omega|)^2}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

En faisant tendre y vers l'infini dans (4.31) et en utilisant (4.30), il vient bien

$$\Big(\operatorname{Supp}\varphi \subset [R+\epsilon_0,+\infty[\Big) \Longrightarrow \langle T,\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F(-\omega)\,\widehat{\varphi}(\omega)\,d\omega = 0.$$

Le même raisonnement vaut si $\operatorname{Supp}\varphi \subset]-\infty,-R-\epsilon_0]$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon_0>0$, il en résulte bien que $\operatorname{Supp} T\subset[-R,R]$. La distribution-fonction $F_{|\mathbb{R}^n}$ est donc bien transformée de Fourier d'une distribution à support dans $[-R,R]$. Le second volet du théorème de Paley-Wiener est bien démontré dans ce cas particulier ($n=1$, $K=[-R,R]$). La preuve dans le cas général suivrait les mêmes lignes, mais exige une plus grande familiarité avec les fonctions de plusieurs variables réelles ou complexes (il faut aussi exploiter le fait qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est intersection de tous les demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^n$ qui le contiennent). □

À l'occasion de la preuve du second volet du théorème de Paley-Wiener (Théorème 4.16), nous avons en fait utilisé (dans sa version directe) le critère donnant la caractérisation des transformées de Fourier des fonctions-test $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, où K est un convexe compact $K\subset\mathbb{R}^n$ donné. Ce critère constitue un second théorème de Paley-Wiener, plus facile que le Théorème 4.16 (pour nous ici, il s'en déduira en fait), mais tout aussi utile.

Theorème 4.17 (théorème de Paley-Wiener, version fonctions-test). *Nous avons le résultat en deux volets suivant.*

— *Soit $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, où K est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. La transformée de Fourier $\widehat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ de φ est la restriction à $\mathbb{R}^n$ d'une fonction entière de n variables (notée aussi $\widehat{\varphi}$) telle que*

$$\forall\,p\in\mathbb{N},\ \exists\,\gamma_p>0,\ \forall\,z\in\mathbb{C}^n\,,\ |\widehat{\varphi}(z)|\leq\gamma_p\frac{e^{H_K(\operatorname{Im}z)}}{(1+\|z\|)^p}. \tag{4.32}$$

— *Réciproquement, si Φ est une fonction entière de n variables vérifiant (4.32), alors la restriction $\Phi_{|\mathbb{R}^n}$ de Φ à $\mathbb{R}^n$ définit une fonction de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ qui est la transformée de Fourier d'un élément $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.*

Démonstration. Le premier volet se prouve aisément. Si $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, le théorème de Morera (couplé avec Fubini, voir le cours d'Analyse Complexe

[**Charp**]), permet de montrer que

$$
\begin{aligned}
z \in \mathbb{C}^n \longmapsto & \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, \exp(-i(z_1 x_1 + \cdots + z_n x_n)) \, dx = \\
= & \int_K \varphi(x) \, \exp(-i(z_1 x_1 + \cdots + z_n x_n)) \, dx
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

est une fonction entière (en n variables). Les estimations (4.32) s'obtiennent (comme celles de la seconde batterie de formules (4.9)) par intégrations par parties successives.

Pour ce qui est du second volet (volet réciproque), on peut appliquer le Théorème 4.16 (volet réciproque aussi) qui assure que $\Phi_{|\mathbb{R}^n}$ est la transformée de Fourier d'une distribution T à support compact (inclus dans K). Comme Φ est entière, la formule de Cauchy (voir [**Charp**], chapitre II) assure (c'est un résultat connu comme théorème de Weierstrass, conséquence en fait des inégalités de Cauchy) que les dérivées à tout ordre de $\Phi_{|\mathbb{R}^n}$ sont contrôlées de la même manière que $\Phi_{|\mathbb{R}^n}$, c'est-à-dire en $O((1 + \|\omega\|)^{-p})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ lorsque $\|\omega\|$ tend vers l'infini (estimations (4.32) lorsque $\mathrm{Im}\, z = 0$). La restriction $\Phi_{|\mathbb{R}^n}$ de Φ à $\mathbb{R}^n$ est donc un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, donc T en est un aussi (d'après le Théorème 4.2). Comme T est à support compact inclus dans K, $T = [\varphi]$, où $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Le second volet du Théorème 4.17 est ainsi démontré. □

Exercice 4.18 (transformation de Fourier et fonctions de Bessel). Montrer que la transformée de Fourier de la fonction caractéristique du disque fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan est la fonction

$$
(\omega_1, \omega_2) \longmapsto \pi \frac{J_1(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}},
$$

où J_1 est la fonction de Bessel d'indice 1 :

$$
J_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin\theta - \theta) \, d\theta = \frac{z}{2} \sum_{k=\max(0,-1)}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}, \ z \in \mathbb{C}.
$$

Montrer que la transformée de Fourier de la distribution $d\sigma_{|z|=1}/2\pi$ (mesure uniforme de masse totale 1 sur le cercle de centre 0 et de rayon 1) est la fonction

$$
(\omega_1, \omega_2) \longmapsto J_0(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}),
$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'indice 0 :

$$
J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin\theta) \, d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k}, \ z \in \mathbb{C}.
$$

Le fait que les fonctions de Bessel J_0 et J_1 interviennent dans ce cadre explique leur importance en optique.

Exercice 4.19 (fonctions moyenne-périodiques). Soit T une distribution à support compact dans $\mathbb{R}$ et z_0 un zéro complexe du prolongement de $\widehat{T}$ en une fonction entière. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{iz_0 t}$ est solution de l'équation de convolution $T * f \equiv 0$[10]. Montrer que si z est un nombre complexe, la fonction $t \mapsto e^{izt}$ est vecteur propre de l'opérateur

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow T * f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

(voir l'exemple 3.18) ; quelle est la valeur propre correspondante ?

4.2.2. Transformation de Fourier et convolution. La transformation de Fourier (lorsqu'il est possible de la définir) présente l'intérêt d'échanger les opérations de convolution et de multiplication. Comme aucune de ces deux opérations n'est bien définie (c'est-à-dire sans restriction) dans le cadre des distributions, même tempérées, il faut prendre garde au fossé existant entre ce qui relève de l'heuristique et ce qui relève de la rigueur mathématique. Compte tenu de l'omniprésence de l'opération de convolution (boites noires, filtres, *etc.*) et de la simplicité de l'opération de multiplication par rapport à la complexité que présente l'opération de convolution, on comprendra cependant l'importance que revêt, lorsque cela s'avère possible, la possibilité de profiter de la transformation de Fourier.

Les fonctions entières $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ vérifiant la condition

$$\exists\, M \in \mathbb{N},\ \exists\, C > 0,\ \exists\, R > 0,\ |F(z)| \le C(1 + \|z\|)^M\, e^{R\|\mathrm{Im}(z)\|} \tag{4.34}$$

constituent une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions entières (les opérations étant l'addition, la multiplication, et la multiplication externe par un scalaire), appelée *algèbre de Paley-Wiener*. L'algèbre de Paley-Wiener $\mathrm{PW}(\mathbb{C}^n)$ contient les fonctions polynomiales en n variables complexes. D'après le théorème de Paley-Wiener (Théorème 4.16), les restrictions à $\mathbb{R}^n$ des éléments de $\mathrm{PW}(\mathbb{C}^n)$ sont exactement les transformées de Fourier au sens des distributions tempérées des éléments de l'algèbre de convolution $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. De plus, on a la proposition suivante :

Proposition 4.5 (transformée de Fourier des distributions et convolution). *Si $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, on a $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et la transformée de Fourier de $S * T$ au sens des distributions tempérées est donnée par*

$$\widehat{S * T} = \widehat{T} \cdot \widehat{S} \tag{4.35}$$

où le produit à droite dans (4.35) *est le produit de la fonction $F = \widehat{T}$ (à croissance lente sur $\mathbb{R}^n$) par la distribution tempérée $\widehat{S}$. En particulier, la transformation de Fourier réalise un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre l'algèbre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et l'algèbre des restrictions à $\mathbb{R}^n$ de l'algèbre de Paley-Wiener* $\mathrm{PW}(\mathbb{C}^n)$.

Démonstration. La première assertion a déjà été mentionnée (exemple 4.8). Le calcul de la transformée de Fourier de $S * T$ donne :

$$\langle \widehat{S * T}, \varphi \rangle = \Big\langle S_\xi, \langle T_\eta, \widehat{\varphi}(\xi + \eta) \rangle \Big\rangle. \tag{4.36}$$

Or

$$\big\langle T_\eta, \widehat{\varphi}(\xi + \eta) \big\rangle = \big\langle T(\eta - \xi), \widehat{\varphi}(\xi) \big\rangle = \Big\langle \widehat{T * \delta_{\eta - \xi}}, \varphi \Big\rangle = \langle [F_T(\cdot), e^{-i\xi(\cdot)}], \varphi \rangle,$$

où F_T désigne la fonction correspondant à la distribution fonction $\widehat{T}$. On a donc

$$\langle \widehat{S * T}, \varphi \rangle = \Big\langle S_\xi, \big\langle [F_T(\cdot)\, e^{-i\xi(\cdot)}], \varphi \big\rangle \Big\rangle = \langle S, \widehat{F_T \varphi} \rangle = \langle F_T \cdot \widehat{S}, \varphi \rangle,$$

d'où la formule (4.35) si l'on utilise l'abus de notation (licite) $F_T = [F_T] = \widehat{T}$. $\square$

10. Les solutions d'une telle équation de convolution ($T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$) ou d'un système de telles équations sont dites *moyenne-périodiques*.

Exercice 4.20 (opérateur de Riesz, transformation de Hilbert). Montrer que l'opérateur

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longmapsto \mathrm{VP}[1/x] * \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

se prolonge en une isométrie $\mathcal{H}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_x, \mathcal{B}(\mathbb{R}_x), dx)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\omega), d\omega)$. L'opérateur $\mathcal{H}$ ainsi défini est le prototype d'une classe importante d'opérateurs, les *opérateurs de Riesz*. On utilisera pour cela la transformation de Fourier des distributions tempérées et le résultat établi dans l'exemple 4.12, ainsi que la Proposition 4.5. L'opérateur $\mathrm{Id} + \mathcal{H}$ s'appelle *transformation de Hilbert* et est d'un usage très courant en ingénierie. Comment agit justement la transformée de Hilbert dans le domaine fréquentiel (c'est là tout son intérêt pratique) ?

Exercice 4.21. Soit T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n_x$ dont la transformée de Fourier est la distribution-fonction correspondant à une fonction mesurable essentiellement bornée sur $\mathbb{R}^n_\omega$. Montrer que l'opérateur

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \longmapsto T * \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$$

se prolonge en un opérateur linéaire continu de l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_x, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_x), dx)$ dans l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n_\omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_\omega), d\omega)$.

4.2.3. Transformation de Fourier et distributions périodiques. Les distributions périodiques relativement à un réseau [11] Λ de $\mathbb{R}^n$ sont des distributions tempérées (exemple 4.5). Il est d'autant plus intéressant d'en étudier le spectre que l'on sait qu'il existe une opération de convolution (voir la Définition 3.16 dans le cas où $\Lambda = (2\pi\mathbb{Z})^n$) entre distributions périodiques.

L'une des plus intéressantes (parmi les distributions périodiques relativement à un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$) est le *peigne de Dirac* relatif à ce réseau Λ. Cette distribution a déjà été introduite dans le cas particulier $n = 1$, $\Lambda = 2\pi\mathbb{Z}$, dans l'exercice 2.5. Elle joue un rôle important dans nombre de situations concrètes : cristallographie, optique, cryptographie, empilements et réseaux, *etc.* C'est la distribution Λ-périodique (donc tempérée) δ_Λ définie par

$$\langle \delta_\Lambda, \varphi\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\lambda).$$

Avant d'énoncer le résultat majeur de cette section, à savoir la *formule sommatoire de Poisson*, nous devons préciser une définition algébrique, celle de *réseau dual.*

Définition 4.22 (réseau dual). Soit Λ un réseau de $\mathbb{R}^n$, $\Lambda = \mathbb{Z}\, e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\, e_n$, où $(e_1, ..., e_n)$ désigne une base de $\mathbb{R}^n$. On appelle *réseau dual* de Λ le réseau de $(\mathbb{R}^n)^*$ défini par

$$\Lambda^* = \mathbb{Z}\, e_1^* \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\, e_n^*,$$

où $(e_1^*, ..., e_n^*)$ désigne la base duale de la base $(e_1, ..., e_n)$.

Remarque 4.23. On rappelle que si A désigne la matrice des coordonnées (en colonne) des vecteurs e_j exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, celle des coordonnées (en colonne) des vecteurs e_j^* exprimés dans la base canonique de $(\mathbb{R}^n)^*$ (*i.e.* la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) est la matrice ${}^t[A^{-1}] = [{}^tA]^{-1}$.

11. Un réseau de $\mathbb{R}^n$ est par définition un sous-groupe libre de $\mathbb{R}^n$ de rang n, donc de la forme $\Lambda = \mathbb{Z}\, e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\, e_n$, où $(e_1, ..., e_n)$ désigne une base de $\mathbb{R}^n$.

Theorème 4.24 (formule sommatoire de Poisson[12]). *Soit* Λ *un réseau de* $\mathbb{R}^n_x$. *Si l'on assimile l'espace* $\mathbb{R}^n_\omega$ *à l'espace* $(\mathbb{R}^n_x)^*$, *le spectre du peigne de Dirac* δ_Λ *relatif au réseau* $\Lambda = \mathbb{Z}\, e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\, e_n$ *est donné par*

$$\widehat{\delta_\Lambda} = \frac{(2\pi)^n}{|\det \Lambda|}\, \delta_{2\pi\Lambda^*}, \tag{4.37}$$

où $\Lambda^* = \mathbb{Z}\, e_1^* \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\, e_n^*$ *désigne le réseau dual de* Λ *et* $\det \Lambda := \det(e_1, ..., e_n)$.

Remarque 4.25. En cristallographie, cette formule sommatoire de Poisson se concrétise physiquement : l'image d'un réseau cristallin après diffraction au travers d'un prisme correspond (aux constantes d'échelle près) au réseau cristallin dual. On retrouve bien ici le fait que la transformation de Fourier (matérialisée optiquement par la diffraction) échange les objets localisés et les objets diffus (et correspond du point de vue mathématique à la dualité en algèbre linéaire).

Démonstration. On remarque que, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et si A est une matrice (n, n) réelle inversible (correspondant à un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^n_x$), on a, par changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n_\omega$,

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{-i\langle \omega, x\rangle}\, dx = \frac{1}{\det A} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(A^{-1}\cdot y)\, e^{-i\langle \omega\,,\, A^{-1}\cdot y\rangle}\, dy \\ &= \frac{1}{\det A} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(A^{-1}\cdot y)\, e^{-i\left\langle {}^t[A^{-1}]\cdot \omega\,,\, y\right\rangle}\, dy.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Comme le spectre de δ_Λ est donné par

$$\langle \widehat{\delta_\Lambda}, \varphi\rangle = \langle \delta_\Lambda, \widehat{\varphi}\rangle, \tag{4.39}$$

prouver la formule sommatoire de Poisson (4.37) pour un réseau Λ quelconque revient (après changement linéaire de variable $x \mapsto A\cdot x$ dans $\mathbb{R}^n_x$ transformant la base canonique en la base $(e_1, ..., e_n)$) à prouver cette formule dans le cas où $\Lambda = \mathbb{Z}^n$. Comme

$$\delta_{\mathbb{Z}^n} = \delta_{\mathbb{Z}} \otimes \cdots \otimes \delta_{\mathbb{Z}} \quad (n \text{ fois})$$

et que l'on observe immédiatement (en utilisant (4.39)) que l'on a

$$\widehat{\delta_{\mathbb{Z}^n}} = \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}},$$

il suffit de prouver la formule (4.37) dans le cas $n = 1$, $\Lambda = \mathbb{Z}$, ce que nous ferons.

On se place donc en dimension $n = 1$ avec $\Lambda = \mathbb{Z}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a

(4.40)

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}, \varphi\rangle &= \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\lambda) \sum_{\lambda=-N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, e^{-i\lambda t}\, dt\Big) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \Big(\sum_{\lambda=-N}^{N} e^{-i\lambda t}\Big)\, dt\Big) = \lim_{N\to+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \Big(\frac{\sin(N+1/2)t}{\sin(t/2)}\Big)\, dt\Big)\end{aligned}$$

12. Mathématicien français, Siméon-Denis Poisson (1781-1840), fut l'un des pionniers de la théorie des séries et des intégrales de Fourier. Ses contributions à la théorie naissante des probabilités (loi de Poisson, processus de Poisson) sont aussi très significatives.

en utilisant l'expression du noyau de Dirichlet (voir [**Y2**], section 2.3.3). Pour N dans $\mathbb{N}$, on a, si $\operatorname{Supp}\varphi \subset [-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\Big(\frac{\sin(N+1/2)t}{\sin(t/2)}\Big)\,dt = 2\pi \sum_{k=-M}^{M} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \varphi(t)\Big(\frac{\sin(N+1/2)t}{2\pi\,\sin(t/2)}\Big)\,dt.$$

Pour k entier fixé entre $-M$ et M, il résulte du théorème de Jordan-Dirichlet (voir [**Y2**], Théorème 2.1) que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \varphi(t)\Big(\frac{\sin(N+1/2)t}{2\pi\,\sin(t/2)}\Big)\,dt = \varphi(2k\pi).$$

En reportant dans (4.40), on obtient bien

$$\langle \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}, \varphi\rangle = 2\pi \sum_{k=-M}^{M} \varphi(2k\pi) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2k\pi),$$

ce qui traduit le fait que $\widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} = 2\pi\delta_{\mathbb{Z}^*}$. La formule sommatoire de Poisson est démontrée. □

La formule sommatoire de Poisson se lit aussi, non en termes de distributions, mais en termes de fonctions-test (ou de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$). On a ainsi :

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}),\ \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\lambda) = \frac{(2\pi)^n}{\det\Lambda} \sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} \widehat{\varphi}(2\pi\lambda^*). \tag{4.41}$$

En dimension 1, pour tout $\tau > 0$,

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k\tau) = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2k\pi/\tau). \tag{4.42}$$

Sous cette forme (4.42), la formule sommatoire de Poisson peut apparaitre comme une *formule de resommation* permettant d'exprimer la somme d'une série convergeant lentement comme la somme d'une série convergeant très rapidement : c'est par exemple le cas si $\varphi(t) = \exp(-t^2/2)$ (cette fonction est fonction propre de la transformation de Fourier, correspondant à la valeur propre $\sqrt{2\pi}$) et τ est très petit ; la série de gauche dans (4.42) converge très lentement, tandis que la série de droite converge excessivement rapidement, au point que les premiers termes permettent immédiatement de calculer numériquement sa somme. C'est là l'un des intérêts majeurs de la formule sommatoire de Poisson en mathématiques fondamentales, par exemple en théorie analytique des nombres. On profite ici, avantageusement cette fois, du principe d'incertitude d'Heisenberg (plus φ est localisé, plus son spectre est diffus).

Exercice 4.26. Montrer que la formule sommatoire de Poisson (4.42) s'applique pour la fonction $t \mapsto \exp(-|t|)$ (qui n'est pas C^∞ au voisinage de 0, mais qui sinon satisfait les propriétés de décroissance à l'infini partagées par les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$). Montrer que l'on obtient alors, pour $\tau > 0$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\tau|k|} = 2\tau \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\tau^2 + 4\pi^2 k^2}. \tag{4.43}$$

Exercice 4.27. Soit

$$f\ : t \in]0,\infty[\longmapsto \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\Big). \tag{4.44}$$

En utilisant les développements limités à droite de 0, montrer que f se prolonge continuement sur $[0,+\infty[$, avec $f(0) = 1/12$. En utilisant la formule (4.43) établie à l'exercice 4.26, montrer que

$$\forall\, t \geq 0,\ \ f(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

En déduire que f est décroissante sur $[0,+\infty[$ (ceci peut-il se voir directement sur l'expression (4.44) de f ?) et retrouver le fait que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Une application importante de la formule sommatoire de Poisson est liée à l'importante question de l'*échantillonnage* en ingénierie mathématique. Cette question conditionne le passage du digital à l'analogique et *vice-versa*. Il est facile de se convaincre intuitivement que si une fonction continue $F\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définissant une distribution tempérée $[F]$ présente des oscillations trop rapides, il est impossible de restituer cette fonction F à partir de la suite de ses échantillons $(F(k\tau))_{k\in\mathbb{Z}}$, τ étant un pas d'échantillonnage *a priori* fixé. En revanche, si les fréquences présentes dans la décomposition spectrale de F restent en module en dessous d'un seuil Ω donné (le spectre de $[F]$, considéré comme distribution tempérée sur $\mathbb{R}_\omega$, est nul hors de $[-\Omega,\Omega]$), on peut espérer que la restitution de F soit possible à partir de la suite des valeurs échantillonnées $(F(k\tau))_{k\in\mathbb{Z}}$ pourvu que le pas τ soit assez petit (en fonction bien sûr de Ω). C'est dans ce sens que va précisément le théorème de Shannon-Nyquist [13] que nous énonçons ci-dessous, dans sa version « distributions ».

Theorème 4.28 (théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist, version distributions). *Soit F une fonction C^∞ à croissance lente (voir exemple 4.7) sur $\mathbb{R}$ telle que la transformée de Fourier de la distribution $[F]$ soit une distribution à support compact, inclus dans $[-\Omega,\Omega]$. Si $\tau < \pi/\Omega$, la connaissance de la liste des échantillons $(F(k\tau))_{k\in\mathbb{Z}}$ suffit à la restitution complète de la fonction F.*

Démonstration. Soit T la distribution (de support inclus dans $[-\Omega,\Omega]$) définie par

$$\langle T,\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{[F]}, \varphi(-t)\rangle.$$

D'après la Proposition 4.5 et la formule sommatoire de Poisson (Théorème 4.24) la transformée de Fourier (au sens des distributions tempérées) de la distribution

$$T * \delta_{2\pi/\tau\,\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T(\cdot + 2k\pi/\tau)$$

est

$$\widehat{T * \delta_{2\pi/\tau\mathbb{Z}}} = 2\pi\widehat{T}\ \cdot \delta_{\tau\mathbb{Z}}.$$

13. Ingénieur électrique américain, Claude Elwood Shannon (1916-2001) fut un des pionniers de la théorie de l'information ; on lui doit l'introduction de la notion d'entropie et la mise en évidence de son rôle majeur dans les problèmes de gain ou de compression d'information, les bases de la théorie du codage, *etc.*. Le résultat que nous citons ici, attribué à Shannon et à Harry Nyquist (1889-1976), physicien suédois collaborateur de Shannon aux Bell Labs, est un principe majeur en théorie de la communication et dans le traitement des signaux ou des images.

D'après la formule d'inversion de Fourier (voir la formule 4.10 au niveau des fonctions-test, donc aussi des distributions tempérées par dualité), on a $\widehat{T} = [F]$. La transformée de Fourier inverse de la distribution

$$T \cdot \delta_{\tau\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(k\tau)\, \delta_{k\tau}$$

est donc la distribution

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} T(\cdot + 2k\pi/\tau).$$

Si $\tau < \pi/\Omega$, on remarque que, si ρ est une fonction plateau de support dans l'ouvert $]-\pi/\tau, \pi/\tau[$ identiquement égale à 1 au voisinage de $[-\Omega, \Omega]$, on a

$$\rho \cdot \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} T(\cdot + 2k\pi/\tau)\Big) = T \ ;$$

en effet les divers translatés de $[-\Omega, \Omega]$ (contenant $\mathrm{Supp}\, T$) par les multiples de $2\pi/\tau$ ne se chevauchent pas dans ce cas. La détermination de F se fait alors au sens des distributions par $[F] = \widehat{T}$. La distribution T, puis la distribution-fonction $[F]$, se calculent donc directement *via* les opérations suivantes :

(1) on calcule la transformée de Fourier inverse S de la distribution tempérée $F \cdot \delta_{\tau\mathbb{Z}}$;

(2) on « restreint » S à l'ouvert $]-\pi/\tau, \pi/\tau[$, par exemple en multipliant cette distribution par une fonction plateau ρ de support dans l'ouvert $]-\pi/\tau, \pi/\tau[$ identiquement égale à 1 au voisinage de $[-\Omega, \Omega]$;

(3) on calcule enfin le spectre de la distribution $\widetilde{S}$ ainsi construite en « tronquant » S.

□

Remarque 4.29. Lorsque le spectre de $[F]$ est dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\omega), d\omega)$ et que de plus $\mathrm{Supp}\, \widehat{[F]} \subset [-\Omega, \Omega]$, la restitution de F à partir de ses échantillons est donnée (lorsque $\tau \leq \pi/\Omega$) par

$$F(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(k\tau)\, \mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi(t-k\tau)}{\tau}\Big), \tag{4.45}$$

où la fonction $t \mapsto \mathrm{sinc}\,(\pi t)$ est la fonction

$$t \mapsto \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

correspondant à la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique de l'intervalle fréquentiel $[-\pi, \pi]$. De plus, la série au second membre de (4.45) converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Ce résultat se démontre à partir de la formule de Plancherel du cours de L3 (voir [**Y2**], Théorème 2.8). Dans le cas où F est toujours dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, \mathcal{B}(\mathbb{R}_t), dt)$, mais vérifie seulement

$$\int_{|\omega|\geq\Omega} |\widehat{F}(\omega)|\, d\omega \leq \pi\, \epsilon \quad \Big(\text{au lieu de } \int_{|\omega|\geq\Omega} |\widehat{F}(\omega)|\, d\omega = 0\Big)$$

pour un certain $\epsilon > 0$, l'erreur uniforme que l'on commet en remplaçant F par le membre de droite de (4.45) lorsque $\tau \leq \pi/\Omega$ est majorée en module par ϵ. Ce seuil π/Ω au delà duquel apparait le problème du sous-échantillonnage est dit *seuil de Nyquist*.

4.3. Solutions fondamentales d'opérateurs différentiels

4.3.1. Le théorème de B. Malgrange et L. Ehrenpreis. Les distributions tempérées fournissent un cadre pour l'inversion (relativement à l'opération de convolution) des opérateurs différentiels à coefficients constants. Commençons ici par introduire une définition.

Définition 4.30 (solution fondamentale d'un opérateur de convolution par un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$). Soit T une distribution à support compact dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ est dite *solution fondamentale* de l'opérateur de convolution [14]

$$\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \to \Phi * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \tag{4.46}$$

si $S * T = T * S = \delta_0$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

Le résultat majeur de cette section est le très important théorème prouvé indépendamment par Bernard Malgrange et Léon Ehrenpreis [15] s'énonçant ainsi.

Theorème 4.31 (théorème de Malgrange-Ehrenpreis, 1954-1955). *Tout opérateur de convolution avec une distribution de support l'origine à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *(i.e. de la forme* $P(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)[\delta_0]$*, où* $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ *d'après la Proposition 3.4) admet une solution fondamentale (à valeurs dans* $\mathbb{K}$*) tempérée. Ou encore, étant donné un polynôme quelconque* $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$*, il existe toujours une distribution* $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ *telle que*

$$P\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)[S] = \delta_0. \tag{4.47}$$

Démonstration. Ce résultat repose sur un théorème d'algèbre du au mathématicien russe Joseph Bernstein (1945, –) que nous admettrons (ce théorème est une conséquence assez directe, mais subtile, de la nœthériannité de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$).

Theorème 4.32 (théorème de Bernstein, 1971). *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique zéro et* $\mathbf{P} \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$*. Il existe un polynôme non identiquement nul* $\mathbf{p} \in \mathbb{K}[T]$*, un polynôme* $\mathbf{Q}[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n, T]$ *tel que l'on ait (formellement) la relation (dite équation fonctionnelle de Bernstein ou relation de Bernstein)*

$$\mathbf{p}(\lambda) \times \mathbf{P}^{\lambda}(X_1, ..., X_n) = \mathbf{Q}\Big(X_1, ..., X_n, \frac{\partial}{\partial X_1}, ..., \frac{\partial}{\partial X_n}, \lambda\Big)\Big[P^{\lambda+1}(X_1, ..., X_n)\Big]. \tag{4.48}$$

Admettons ici ce résultat d'obédience algébrique. Pour prouver que l'opérateur différentiel $P(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)$ admet une solution fondamentale tempérée, il suffit, si l'on utilise la transformation de Fourier des distributions tempérées et la

14. Cet opérateur est bien défini du fait de la Proposition 3.7.

15. Bernard Malgrange (1928,–) mathématicien français contemporain, fut, dans le sillage de Laurent Schwartz, l'un des pionniers de l'étude des équations de convolution (1950-1960). On doit surtout au mathématicien américain Léon Ehrenpreis (1930-2010), avec le mathématicien russe contemporain Victor Palamodov, le *Principe Fondamental*, extension au cadre des systèmes d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants du célèbre principe d'Euler suivant lequel, en une variable, toute solution C^∞ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à coefficients constants est combinaison linéaire des fonctions du type $x \mapsto x^k e^{\lambda x}$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, qui en sont solutions.

Proposition 4.5, de montrer qu'il existe une distribution tempérée $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\omega, \mathbb{C})$ telle que

$$P(i\omega_1, ..., i\omega_n) \cdot \Psi = 1$$

au sens des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^n_\omega$; en effet la transformée de Fourier de la distribution $P(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)\,[\delta_0]$ est la distribution fonction $[P(i\omega_1, ..., i\omega_n)]$ (Proposition 4.4). On posera alors $S = \mathcal{F}^{-1}(\Psi)$ ($\mathcal{F}$ désignant la transformation de Fourier, isomorphisme entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{C})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\omega, \mathbb{C})$) pour avoir la solution fondamentale tempérée voulue (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on prendra la partie réelle de cette distribution S).

Voici comment on procède pour construire Ψ. On introduit sur $\mathbb{R}^n_\omega$ la fonction polynomiale positive ou nulle

$$\omega \in \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbf{P}(\omega) = |P(i\omega_1, ..., i\omega_n)|^2.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_\omega, \mathbb{C})$. La fonction

$$\lambda \in \{\operatorname{Re}\lambda > 1\} \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n_\omega} \mathbf{P}^{\lambda-1}(\omega)\, \overline{P(i\omega)}\, \varphi(\omega)\, d\omega \tag{4.49}$$

est une fonction holomorphe dans le demi-plan ouvert $\{\operatorname{Re}\lambda > 1\}$ (cela résulte du théorème de Morera, voir [**Charp**], combiné avec le théorème de Fubini). Du fait de la relation de Bernstein (4.48) et de la formule d'intégration par parties (en fait la formule de Stokes à plusieurs variables) appliquée de manière répétitive en les variables $x_1, ..., x_n$ les unes après les autres, on voit que, si $\operatorname{Re}\lambda >> 1$, on a la relation

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^{\lambda-1}(\omega)\, \overline{P(i\omega)}\, \varphi(\omega)\, d\omega = \\ &= \frac{1}{\mathbf{p}(\lambda-1)} \int_{\mathbb{R}^n_\omega} \mathbf{P}^{\lambda}(\omega)\, \mathbf{Q}\Big(\omega_1, ..., \omega_n, -\frac{\partial}{\partial\omega_1}, ... -\frac{\partial}{\partial\omega_n}, \lambda\Big)\, [\overline{P(i\,\cdot)}\, \varphi]\, d\omega.\end{aligned} \tag{4.50}$$

La relation (4.50) permet de prolonger la fonction (4.49) en une fonction méromorphe (notée $\lambda \mapsto \langle \Psi^\lambda, \varphi\rangle$) dans tout le plan complexe [16]. Il n'y a aucune raison *a priori* pour que $\lambda = 0$ ne soit pas un pôle 1 de ce prolongement ; cependant, la fonction méromorphe $\lambda \mapsto \langle \Psi^\lambda, \varphi\rangle$ se développe en série de Laurent au voisinage de $\lambda = 0$ (l'ordre de ce pôle est fini) et l'on convient de noter $\langle \Psi, \varphi\rangle$ le coefficient de λ^0 dans ce développement. Comme

$$\mathbf{P}^\lambda(\omega) = \exp\Big(\lambda \log(\mathbf{P}(\omega))\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log(P(\omega)))^k}{k!}\, \lambda^k$$

et que toutes les distributions fonction $[\omega_1^{l_1} \dots \omega_n^{l_n}\, (\log(P(\omega)))^k]$ sont tempérées pour tout multi-indice $\underline{l}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on voit que

$$\varphi \longmapsto \langle \Psi, \varphi\rangle$$

définit une distribution tempérée. Mais il résulte de la relation (4.50) que

$$\langle P(i\omega)\cdot\Psi, \varphi\rangle = \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^{\lambda-1}(\omega)\, \overline{P(i\omega)}\, P(i\omega)\, \varphi(\omega)\, d\omega\Big]_{\lambda=0} = \langle [1], \varphi\rangle.$$

---

16. Pensez par exemple à la manière dont on prolonge la fonction $\lambda \to \Gamma(\lambda)$ (holomorphe *a priori* dans le demi-plan $\{\operatorname{Re}\lambda > 0\}$ du plan complexe en une fonction $\lambda \mapsto \langle \Psi^\lambda, \varphi\rangle$ méromorphe dans $\mathbb{C}$, ce en exploitant la relation fonctionnelle $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$ sous la forme $\Gamma(\lambda) = \Gamma(\lambda+1)/\lambda$. C'est un peu plus compliqué ici car la relation fonctionnelle (4.50) est plus complexe, mais l'idée est essentiellement la même.

On a donc bien trouvé la distribution tempérée Ψ cherchée, donc aussi par Fourier inverse la solution fondamentale S. $\square$

Des exemples importants émaillent les cours précédents (en particulier le cours d'Analyse Complexe [**Charp**]). En voici une liste des plus importants.

Exemple 4.33 (solution fondamentale du laplacien). Une solution fondamentale tempérée de l'opérateur de Laplace (ou encore *laplacien*)

$$\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

est donnée lorsque $n = 2$ par

$$S(x, y) := \frac{1}{2\pi}\Big[\log\sqrt{x^2 + y^2}\Big] = \frac{1}{2\pi}[\log|x + iy|]$$

et lorsque $n > 2$ par

$$S(x_1, ..., x_n) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}\,(n-2)}\,[\|x\|^{2-n}]$$

(ceci résulte de la formule de Green, voir [**Charp**], chapitre 3). On note que comme $2 - n > -n$, $x \mapsto \|x\|^{2-n}$ est bien une fonction localement intégrable. La norme ici est la norme euclidienne.

Exemple 4.34 (solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann). Lorsque $n = 2$, une solution fondamentale de l'*opérateur de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

est la distribution fonction

$$S = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{x + iy}\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{z}\Big].$$

Ceci résulte de la formule de Cauchy-Pompeiu (voir [**Charp**]) qui assure que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ (en fait C^1 à support compact suffit),

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2i\pi}\int\!\!\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}\,\frac{dxdy}{\zeta - z}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Exemple 4.35 (Le cas de la dimension 1). Attention ! Si $P(d/dx)$ est un opérateur différentiel tel que

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{\nu_j} \frac{\gamma_{jl}}{(X - \alpha_j)^{\nu_j}}$$

(les α_j, $j = 1, ..., m$, étant les racines de P et les ν_j leurs multiplicités) et que l'on note

$$S = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{\nu_j} \gamma_{jl} L_{\alpha_j, l},$$

la distribution causale S vérifie $P(d/dx)[S] = \delta_0$ (voir la Proposition 3.11) mais elle n'est pas en général tempérée (sauf si les α_j sont tous de partie réelle négative ou nulle). L'opérateur $P(d/dx)$ admet bien une solution fondamentale tempérée [17]

17. On pourra en calculer une en exercice.

d'après le Théorème 4.31, mais elle n'est pas en général causale ! On pourra en calculer une en exercice.

4.3.2. L'équation de la chaleur. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

$$(t,x) \mapsto \Theta(x,t)$$

un champ de température dans ce domaine (t désignant ici le temps), le premier principe de la thermodynamique, couplé avec l'équation de Green (qui affirme [18] que le flux du gradient de Θ sortant d'un volume fermé est égal à l'intégrale dans ee volume de la divergence de ce champ de gradient, c'est-à-dire du Laplacien $\Delta\Theta$), assure que Θ obéit (en les variables (t,x), $t>0$, $x \in \Omega$), à l'*équation de la chaleur* (on dit aussi *équation de Fourier*)

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma\,\Delta_x\Big)\,[\Theta] = \frac{\mathrm{PT}}{\rho c}\,, \tag{4.51}$$

où γ désigne le *coefficient de diffusivité thermique*, PT la *productivité thermique*, ρ la masse volumique du matériau dans lequel s'effectue la propagation, et c la *chaleur spécifique* de ce même matériau. Au coefficient près, l'opérateur différentiel en jeu ici est l'*opérateur de la chaleur*

$$\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x. \tag{4.52}$$

Il est important de disposer d'une solution fondamentale tempérée pour cet opérateur. Il est possible dans ce cas particulier de calculer pareille solution, ce que nous allons faire ici en exercice.

Si S est une telle distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, on définit une distribution tempérée $\mathcal{F}_x[S]$ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_\omega$ en utilisant la règle de dualité :

$$\langle \mathcal{F}_x[S], \varphi(t,x)\rangle := \Big\langle S\,,\,(t,x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t,\omega)\, e^{-i\langle \omega, x\rangle}\, d\omega \Big\rangle. \tag{4.53}$$

La distribution $\mathcal{F}_x[S]$ définie par (4.53) est appelée *transformée de Fourier partielle* de S *suivant les variables* x (de variables duales ω).. Dans le cas particulier étudié ici, exiger que $\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x, \mathbb{C})$ soit une solution fondamentale tempérée de l'opérateur (4.52) équivaut (d'après les Propositions 4.5 et 4.4) à dire que $\mathcal{F}_x[S]$ est solution de

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2\,\mathrm{Id}\Big)\,[\mathcal{F}_x[S]] = \mathcal{F}_x[\delta_0(t) \otimes \delta_0(x)] = \delta_0(t) \otimes [1]\,(\omega).$$

En utilisant la formule des sauts dans le cadre multi-D (Proposition 2.8), U étant l'ouvert $\{t>0\} \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, combinée ici avec la Proposition 2.7, on constate qu'une distribution (d'ailleurs tempérée) sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_\omega$ solution de

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2\,\mathrm{Id}\Big)\,[\Psi] = \delta_0(t) \otimes [1]\,(\omega)$$

est la distribution

$$\Psi\ : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_\omega, \mathbb{R}) \longmapsto \Big\langle H(t)\, \exp(-t\|\omega\|^2)\,,\, \varphi(t,\omega)\Big\rangle.$$

18. C'est la formule de Green-Ostrogradski, voir par exemple [**Charp**].

En utilisant la transformation de Fourier inverse $\mathcal{F}_\omega^{-1}$ (toujours partielle suivant les variables ω, de variables duales x) :

(4.54)
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\omega^{-1}[\Psi]\ :\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x,\mathbb{C})&\longmapsto\Big\langle\Psi\,,\,(t,\omega)\mapsto\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t,x)\,e^{i\langle\omega,x\rangle}\,dx\Big\rangle\\ &=\Big\langle H(t)\,\exp(-t\|\omega\|^2)\,,\,(t,\omega)\mapsto\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t,x)\,e^{i\langle\omega,x\rangle}\,dx\Big\rangle,\end{aligned}$$

on construit avec $S=\mathcal{F}_\omega^{-1}[\Psi]$ une solution fondamentale tempérée de support dans $\{t\geq 0\}$ de l'opérateur de la chaleur (4.52). Or pour $t>0$ fixé, la gaussienne

$$\omega\mapsto\exp(-t\|\omega\|^2)$$

se transforme *via* la transformée de Fourier inverse en la gaussienne

$$\begin{aligned}x\mapsto\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t\|\omega\|^2}\,e^{i\langle\omega,x\rangle}\,d\omega&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|\omega'\|^2/2}\,e^{i\langle\omega',x/\sqrt{2t}\rangle}\,\frac{d\omega'}{(2t)^{n/2}}\\ &=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,e^{-\|x\|^2/4t}.\end{aligned}$$

Ceci implique, si on le reporte dans (4.54), qu'une solution fondamentale tempérée réelle de l'opérateur de la chaleur (4.52) est la distribution tempérée (causale en t) :

$$S\ :\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x,\mathbb{R})\longmapsto\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\Big\langle H(t)\,e^{-\|x\|^2/4t}\,,\,\varphi(t,x)\Big\rangle. \tag{4.55}$$

Voici comment on peut exploiter la connaissance d'une telle solution fondamentale. Considérons une distribution $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_x,\mathbb{R})$ et la distribution $\mathbf{T}=\delta_0(t)\otimes T(x)$ dans $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x$. On peut convoler les distributions S et $\mathbf{T}$ (puisque $\mathbf{T}$ est à support compact) et construire ainsi une solution distribution $S*\mathbf{T}$ de

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x\Big)[S*\mathbf{T}]=\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x\Big)[S]\Big]*\mathbf{T}=\mathbf{T}=\delta_0(t)\otimes T(x).$$

La distribution ainsi construite est solution de l'équation de la chaleur

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x\Big)[\Theta]\equiv 0 \tag{4.56}$$

dans l'ouvert $\{t>0\}$ puisque la restriction de la distribution $\mathbf{T}$ à cet ouvert est la distribution nulle. D'autre part, si $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite de nombres strictement positifs tendant vers 0_+, on constate que la suite des distributions fonction

$$\Big(\frac{1}{(4\pi t_k)^{n/2}}\Big[\exp(-\|x\|^2/4t_k)\Big]\Big)_{k\geq 0}$$

converge vers la masse de Dirac $\delta_0(x)$ dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi [19], lorsque $T=[g]$, où g est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^n$, la distribution

$$S*\mathbf{T}_g=S*(\delta_0(t)\otimes[g](x))$$

correspond dans $\{t>0\}$ à la solution de l'équation de la chaleur (4.56) dont la « valeur au bord » (c'est-à-dire la valeur initiale sur l'hyperplan $\{t=0\}$, *i.e.* à l'instant $t=0$) est la distribution fonction $x\mapsto g(x)$ sur $\mathbb{R}^n_x$. Cette distribution

19. Pour justifier proprement ceci, ce que l'on pourra faire en exercice, il faut dans un premier temps supposer que $T=[\varphi]$, où $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_x,\mathbb{R})$, puis utiliser la Proposition 2.2 qui permet la régularisation de $[g]$.

$S * \mathbf{T}_g$ rend donc compte (dans l'ouvert $\{t > 0\}$) du phénomène de propagation de la chaleur généré par la donnée initiale $[g] \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à l'instant $t = 0$.

4.3.3. L'équation des ondes. Dans un milieu homogène et isotrope, la propagation des ondes est régie dans l'espace temps $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ ($x = (x_1, ..., x_n)$) par l'*équation de propagation*

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Big) [E] = 0, \tag{4.57}$$

où c désigne la vitesse de propagation dans le milieu (ce peut-être celle du son [20], celle de la lumière, etc.). Cette équation est appelée *équation des ondes*. Dans le cas $n = 1$, on l'appelle *équation des cordes vibrantes*; dans le cas $n = 2$, c'est l'*équation des membranes vibrantes*.

L'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \, \Delta_x \tag{4.58}$$

est appelé *d'alembertien* et noté $\Box_c$ ou simplement $\Box$ s'il est normalisé avec $c = 1$. Le cône fermé de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ défini par

$$\Gamma := \{(t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \, ; \, t \geq \|x\|/c\}$$

est appelé (pensez à la théorie de la relativité lorsque c est interprété comme la vitesse de la lumière) *cône du futur*.

a) *Le cas $n = 1$ (« cordes vibrantes »)*

Lorsque $n = 1$, l'équation (4.57) (dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$) se résout en effectuant le changement de variables $(x, y) \leftrightarrow (X, Y)$, où $X = ct + x$, $Y = ct - x$. Elle se ramène en effet dans ce cas à

$$\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} [E] = 0,$$

ce qui s'intègre, si l'on suppose que l'on cherche les solutions $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x, \mathbb{K})$, en disant que

$$E(t, x) = \Phi(ct + x) - \Psi(ct - x),$$

où Φ et Ψ sont deux distributions quelconques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note qu'il existe (dans ce cas $n = 1$) une solution fondamentale tempérée de support inclus dans le cône du futur, à savoir la distribution $E_{1,c}$ définie par

$$E_{1,c} = H(ct - x) \otimes H(ct + x).$$

Remarque 4.36 (cordes vibrantes). L'étude de l'équation des ondes en dimension $n = 1$ peut aussi être envisagée sous un angle tout à fait différent (c'est précisément le point de vue des « cordes vibrantes ») lorsque $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ est remplacé par $\mathbb{R}_t \times]0, L[$. On étudie cette fois les vibrations d'une corde de longueur L, soumise à une tension T à ces deux extrémités (fixes). La recherche de solutions stationnaires (c'est-à-dire du type $E(x, t) = f(x) \times g(t)$, correspondant au fait que la corde vibre « en fuseaux ») de l'équation des ondes

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) [E](t, x) \equiv 0\,, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in]0, L[,$$

20. En l'occurrence, 343 mètres par seconde dans l'air.

conduit à la résolution de

$$f(x) \times g''(t) = c^2 f''(x) \times g(t) \Longleftrightarrow c^2 \, \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)} = -\omega^2 \in \mathbb{C},$$

où ω^2 est une constante. Le système à résoudre est donc

$$g''(t) + \omega^2 \, g(t) = 0 \quad \& \quad f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} \, f(x) = 0.$$

Ceci conduit à

$$f(x) = A\cos((\omega/c)\, x) + B\sin((\omega/c)\, x) \quad \& \quad g(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t.$$

Nous n'approfondirons pas ici cet aspect, relevant plus de l'analyse harmonique que de la théorie des distributions.

b) *Le cas* $n = 3$.

Lorsque $n = 3$ et $c = 1$, vérifions qu'une solution fondamentale tempérée de l'opérateur des ondes, *i.e.* une solution tempérée de

$$\Box\, [E_{t,X}] \equiv \delta_0(t, X) \quad (\text{ici } X := (x, y, z))$$

de support inclus dans le cône du futur $\{t \geq \|X\|\}$ (en fait ici plus précisément dans la frontière de ce cône) est donnée par

$$\langle E_3, \varphi(t, X)\rangle = \int_{]0,\infty[} t \Big(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(t, t\vec{\theta})\, d\sigma_2(\theta)\Big)\, dt, \tag{4.59}$$

où $d\sigma_2$ désigne la mesure de Lebesgue sur la sphère unité $\mathbb{S}^2_X$ de $\mathbb{R}^3_X$.

Vérifions le en exercice. On note que, dans l'expression proposée en (4.59) pour décrire l'action de E_3, l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(t, t\vec{\theta})\, d\sigma_2(\vec{\theta}) = \mathbf{M}_{t\mathbb{S}^2}[X \to \varphi(t, X)].$$

représente la moyenne de la fonction $X \mapsto \varphi(t, X)$ sur la sphère de centre l'origine et de rayon t. On note que pour $\tau > 0$, par dérivation par rapport au paramètre sous l'intégrale,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[\mathbf{M}_{\tau\mathbb{S}^2}[X \to \varphi(t, X)]\Big] = \mathbf{M}_{\tau\mathbb{S}^2}\Big[X \mapsto \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, [\varphi(t, X)]\Big]. \tag{4.60}$$

D'autre part

$$\mathbf{M}_{\tau\mathbb{S}^2}\Big[x \mapsto \Delta_X\, [\varphi(t, X)]\Big] = \Big(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau}\, \frac{\partial}{\partial \tau}\Big)\Big[\mathbf{M}_{\tau\mathbb{S}^2}[X \mapsto \varphi(\tau, t)]\Big] \tag{4.61}$$

puisque le Laplacien d'une fonction radiale $r \mapsto \theta(r)$, $r = \|X\|$, s'exprime en dimension 3 dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par

$$\Delta_X[\theta(\|X\|)] = \theta''(\|X\|) + \frac{2}{\|X\|}\, \theta'(\|X\|).$$

On a donc, en reportant dans (4.59) :

$$\begin{aligned}
\big\langle \Box\, E_3, \varphi \big\rangle &= \big\langle E_3, \Box\, \varphi \big\rangle = \int_{]0,\infty[} \Big[\tau\, \mathbf{M}_{\tau \mathbb{S}^2} [X \mapsto \Box\, \varphi(t,X)] \Big]_{\tau = t} dt \\
&= \int_{]0,\infty[} \Big[\tau \Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{2}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \Big) \Big[\mathbf{M}_{\tau \mathbb{S}^2} \big[X \mapsto \varphi(t,X) \big] \Big] \Big]_{\tau = t} dt \\
&= \int_{]0,\infty[} \Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Big) \Big[\tau\, \mathbf{M}_{\tau \mathbb{S}^2} \big[X \mapsto \varphi(t,X) \big] \Big] \Big]_{\tau = t} dt \\
&= \int_{]0,\infty[} \frac{d}{dt} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau} \Big) \Big[\tau\, \mathbf{M}_{\tau \mathbb{S}^2} \big[X \mapsto \varphi(t,X) \big] \Big]_{\tau = t} \Big] dt \\
&= \Bigg[\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau} \Big) \Big[\tau\, \mathbf{M}_{\tau \mathbb{S}^2} \big[X \mapsto \varphi(t,X) \big] \Big]_{\tau = t} \Bigg]_0^\infty \\
&= -\Bigg[\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau} \Big) \Big[\tau\, \mathbf{M}_{\tau \mathbb{S}^2} \big[X \mapsto \varphi(t,X) \big] \Big]_{\tau = t} \Bigg]_{t=0} \\
&= \lim_{\tau \to 0^+} \mathbf{M}_{\tau \mathbb{S}^2} [X \mapsto \varphi(0,X)] = \varphi(0,0).
\end{aligned}$$

On a bien ainsi vérifié que la distribution $E_3 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_X, \mathbb{R})$ définie par (4.59) vérifie au sens des distributions dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_X$ l'équation

$$\Box\, E_3 = \delta_0(t,X).$$

c) *Le cas $n = 2$ (« membranes vibrantes »)*

On prend ici encore $c = 1$. On rapporte le plan aux coordonnées (x,y) $(z = x + iy)$. Le fait de disposer d'une solution fondamentale tempérée E_3 de support inclus dans le cône du futur $\{t \geq \|(x,y,z)\|\}$ (donnée par (4.59)) pour l'opérateur des ondes dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ induit la construction d'une solution fondamentale tempérée E_2 pour l'opérateur des ondes dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{x,y}$ (supportée aussi par le cône du futur dans cet espace). Il suffit en effet de poser, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{x,y}, \mathbb{K})$,

$$\langle E_2(t,x,y), \varphi(t,x,y) \rangle = \langle E_3(t,x,y,z)\,,\, \varphi(t,x,y) \otimes 1(z) \rangle\ ; \tag{4.62}$$

le fait que E_3 soit supportée dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ par le cône du futur justifie en effet la définition (4.62) ci-dessus, même si la fonction

$$(t,x,y,z) \longmapsto \varphi(t,x,y) \otimes 1(z)$$

n'est plus à support compact. On vérifie en effet que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{x,y}, \mathbb{K})$,

$$\begin{aligned}
\big\langle E_2(t,x,y), \Box_{t,x,y} \varphi \big\rangle &= \big\langle E_3(t,x,y,z)\,,\, \Box_{t,x,y}\, \varphi \otimes 1(z) \big\rangle \\
&= \Big\langle E_3(t,x,y,z)\,,\, \Box_{t,x,y,z} \Big[\varphi(t,x,y) \otimes 1(z) \Big] \Big\rangle \\
&= \Big[\varphi(t,x,y) \otimes 1(z) \Big]_{t=x=y=z=0} = \varphi(0,0,0).
\end{aligned}$$

Le calcul de E_2 à partir de la définition (4.59) de E_3 se conduit ainsi. En utilisant les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$, puis le changement de variables consistant à poser $\rho := \tau \sin\xi$, on a

$$\begin{aligned}
&\tau \mathbf{M}_{\tau\mathbb{S}^2}\Big[X \mapsto \varphi(t,x,y)\otimes 1(z)\Big] = \\
&= \frac{\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \varphi(t,\tau\cos\theta\sin\xi,\tau\sin\theta\sin\xi)\,\sin\xi\,d\theta\,d\xi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\tau} \varphi(t,\tau\,\cos\theta,\tau\,\sin\theta)\,\frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{\tau^2-\rho^2}}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

En reportant (4.63) dans (4.60) (*via* l'expression de l'action de E_3 donnée par (4.59)) on trouve que la solution fondamentale tempérée E_2 pour $\Box$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{x,y}$ est donnée par

$$\big\langle E_2(t,x,y),\varphi(t,x,y)\big\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\int\int_{t\geq |z|} \frac{\varphi(t,x,y)}{\sqrt{t^2-|z|^2}}\,dx\,dy\,dt. \tag{4.64}$$

Il s'agit d'une distribution fonction tempérée et de support inclus dans le cône du futur (mais non plus cette fois portée par la frontière de ce cône comme c'était le cas pour E_3 dans $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3_{x,y,z}$). La distribution $(t,x,y)\mapsto E_2(t,x,y)$ dans $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2_{t,x,y}$ est solution fondamentale de l'opérateur des ondes $\Box$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{x,y}$.

Exercice 4.37 (propagation d'onde à partir de conditions initiales données). Soient T_1 et T_2 deux distributions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_{x,y},\mathbb{R})$. En utilisant la distribution E_2 introduite en (4.64), montrer qu'il existe une unique distribution réelle $\mathbf{E}$ sur $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2_{x,y}$, de support dans $\{t\geq 0\}$, telle que

$$\Box\,\mathbf{E} = \delta_0(t)\otimes T_1(x,y) + \delta_0'(t)\otimes T_2(x,y).$$

Si $T_1=[g_1]$ et $T_2=[g_2]$, où g_1 et g_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, montrer que $\mathbf{E}$ est la distribution fonction C^∞ dans $[0,\infty[\times\mathbb{R}^2_{x,y}$ correspondant à la fonction

$$(t,x,y)\longmapsto u(t,x,y) = \mathcal{L}[g_1](t,x,y) + \frac{\partial}{\partial t}\Big[\mathcal{L}\big[g_2\big]\Big],$$

où

$$\mathcal{L}[h](t,x,y) = \frac{t}{2\pi}\int\int_{\zeta=\xi+i\eta\in D(0,1)} \frac{h(x+t\xi,y+t\eta)}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\,d\xi\,d\eta.$$

On remarque que $\mathbf{E}$ satisfait $\Box\,\mathbf{E}=0$ dans $\{t>0\}$, donc obéit bien à l'équation des ondes. Les conditions initiales $(x,y)\mapsto g_1(x,y)$ et $(x,y)\mapsto g_2(x,y)$ (imposées en $t=0$) régissent la propagation de l'onde.

Remarque 4.38 (membranes vibrantes). Comme pour le cas $n=1$ (cordes vibrantes, voir la Remarque 4.36), on peut envisager le problème sous un tout autre angle en supposant que l'on ne travaille plus dans $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^2_{x,y}$ mais dans $\mathbb{R}_t\times U$, où U est un ouvert borné de frontière régulière dans $\mathbb{R}^2$ (la surface d'un tambour par exemple). On étudie les vibrations d'une membrane tendue fixée au bord (comme la peau d'un tambour précisément). Comme en dimension $n=1$, on peut chercher les solutions stationnaires $(x,y)\mapsto f(x,y)\times g(t)$ de l'équation des ondes

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta_{x,y}\Big)\,[E]\equiv 0$$

dans l'ouvert $\mathbb{R}_t\times U$ cette fois. Il s'agit ici encore d'un problème d'analyse harmonique que nous n'étudierons pas dans ce cours.

4.3.4. Hypoellipticité. Plusieurs opérateurs importants introduits dans ce cours (et déjà de fait présents dans le cours d'Analyse complexe, voir [**Charp**]), tels l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{R}^n$, celui de Cauchy-Riemann dans $\mathbb{R}^2$, les opérateurs $P(d/dx)$ en dimension 1, *etc.*, partagent une propriété importante : ils admettent tous une solution fondamentale dont le support singulier est inclus dans $\{0\}$. De fait, nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 4.6 (caractérisations de l'hypoellipticité). *Soit*

$$P\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) = P(D)$$

un opérateur différentiel en n variables à coefficients constants ($P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) Toutes les solutions fondamentales de l'opérateur $P(D)$, i.e. les distributions T telles que $P(D)[T] = \delta_0$ au sens des distributions, ont leur support singulier inclus dans $\{0\}$.

(2) Il existe au moins une solution fondamentale pour l'opérateur $P(D)$ dont le support singulier est inclus dans $\{0\}$.

(3) Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{SS}\,(T) \subset \mathrm{SS}\,\big(P(D)[T]\big) \tag{4.65}$$

(autrement dit, l'opérateur $P(D)$ respecte en les préservant les singularités de la distribution sur laquelle il agit) ; en particulier

$$\begin{aligned} &\Big[\mathrm{SS}\,\big(P(D)[T]\big) = \emptyset \Longleftrightarrow \Big(P(D)[T] = [g],\ g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{K})\Big)\Big] \\ &\Longrightarrow \Big[\mathrm{SS}\,(T) = \emptyset \Longleftrightarrow \Big(T = [f],\ f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{K})\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{4.66}$$

DÉMONSTRATION. Que le point (1) implique le point (2) est immédiat. Il en est de même pour l'implication (3) $\Longrightarrow$ (1) (si $P(D)[T] = \delta_0$, le support singulier de T est, d'après (4.66), inclus dans celui de δ_0, qui est égal à $\{0\}$). Reste la seule implication délicate de la Proposition, à savoir l'implication (2) $\Longrightarrow$ (3).

On suppose donc que la condition (2) est remplie, c'est-à-dire qu'il existe au moins une distribution $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ telle que $P(D)[T_0] = \delta_0$ et que la restriction de T_0 à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ soit une distribution fonction correspondant à une fonction C^∞ $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{K}$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$. Pour montrer que le support singulier de T est inclus dans celui de $P(D)[T]$, il suffit de vérifier que le support singulier de $\rho_K \cdot T$ est inclus dans celui de $P(D)[\rho_K \cdot T]$ pour toute fonction plateau $\rho_K \in \mathcal{D}(\Omega, [0, 1])$ subordonnée à un compact K arbitraire de Ω : en effet les distributions $P(D)[T]$ et $P(D)[\rho_K \cdot T]$ coincident au voisinage de K et leurs restrictions à un voisinage ouvert ω de K (où $\rho_K \equiv 1$) ont donc même support singulier ; si le support singulier de $\rho_K \cdot T$ est inclus dans celui de $P(D)[\rho_K \cdot T]$, le support singulier de la restriction de $\rho_K \cdot T$ à ω sera donc inclus dans celui de la restriction à ω de $P(D)[T]$; comme T et $\rho_K T$ coincident dans ω, le support singulier de la restriction de T à ω sera dans ce cas inclus dans celui de la restriction à ω de $P(D)[T]$ et, K pouvant être un compact arbitraire de Ω, on aura bien ainsi montré $\mathrm{SS}\,(T) \subset \mathrm{SS}\,(P(D)[T])$. Ceci montre que l'on peut, pour prouver (2), se ramener à supposer $\Omega = \mathbb{R}^n$, ce que nous ferons.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{SS}\,(P(D)[T])$. Le but est de montrer que $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{SS}\,(T)$. La restriction de la distribution $P(D)[T]$ à une boule ouverte $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\epsilon)$ de rayon assez petit ($\mathrm{SS}\,(P(D)[T])$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, donc de complémentaire ouvert) coincide donc avec une distribution fonction $[\psi_\epsilon]$, où $\psi_\epsilon\ : B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\epsilon) \to \mathbb{K}$ est une fonction C^∞. Considérons une fonction plateau $\rho_\epsilon \in \mathcal{D}(B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\epsilon), [0,1])$ identiquement égale à 1 au voisinage de la boule fermée $\overline{B(x_0, \epsilon)}$. On peut écrire (en utilisant la règle de Leibniz)

$$P(D)[\rho_\epsilon \cdot T] = P(D)[T] + S_\epsilon, \tag{4.67}$$

où S_ϵ est une distribution de support inclus dans $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \epsilon)}$. Tous les points de la boule ouverte $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \epsilon)$ sont donc inclus dans le support singulier de $P(D)[\rho_\epsilon \cdot T]$ puisque la distribution $P(D)[T]$ coincide avec la distribution fonction $[\psi_\epsilon]$ dans la boule ouverte $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, 2\epsilon)$. Multiplions (4.67) avec l'identité de partitionnement $1 = \rho_\epsilon + (1 - \rho_\epsilon)$. On en déduit

(4.68)
$$\begin{aligned} P(D)[\rho_\epsilon \cdot T] &= \rho_\epsilon \cdot P(D)[T] + (1-\rho_\epsilon)\cdot P(D)[T] + \Big(S_\epsilon - P(D)[(1-\rho_\epsilon)\cdot T]\Big) \\ &= [\varphi_\epsilon] + \widetilde{S}_\epsilon, \quad \varphi_\epsilon \in \mathcal{D}(B_{\mathbb{R}^n}(0, 2\epsilon), \mathbb{K}),\ \mathrm{Supp}\, \widetilde{S}_\epsilon \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \epsilon)}. \end{aligned}$$

Comme les deux distributions $\rho_\epsilon \cdot T$ et $P(D)[\delta_0]$ sont à support compact, il résulte de la Proposition 3.10 (associativité du produit de convolution lorsque deux des entrées au moins sur les trois sont à support compact) que

$$\begin{aligned} \rho_\epsilon \cdot T &= \delta_0 * (\rho_\epsilon T) = P(D)[T_0] * (\rho_\epsilon \cdot T) \\ &= (P(D)[\delta_0] * T_0) * (\rho_\epsilon \cdot T) = (T_0 * P(D)[\delta_0]) * (\rho_\epsilon \cdot T) \\ &= T_0 * \Big(P(D)[\delta_0] * \rho_\epsilon \cdot T\Big) = T_0 * P(D)[\rho_\epsilon \cdot T]. \end{aligned} \tag{4.69}$$

On fixe maintenant une nouvelle fonction plateau $\sigma_\epsilon \in \mathcal{D}(B_{\mathbb{R}^n}(0, 2\epsilon/3), [0,1])$, identiquement égale à 1 au voisinage de $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(0, \epsilon/3)}$. On a, en découpant au second membre de (4.69) T_0 en $T_0 = \sigma_\epsilon \cdot T_0 + (1-\sigma_\epsilon)\cdot T_0$,

$$\rho_\epsilon \cdot T = (\sigma_\epsilon \cdot T_0) * P(D)[\rho_\epsilon \cdot T] + ((1-\sigma_\epsilon)\cdot T_0) * P(D)[\rho_\epsilon \cdot T]. \tag{4.70}$$

Or la distribution $(1-\sigma_\epsilon)\cdot T_0$ est une distribution fonction du type $[\Phi_\epsilon]$ avec $\Phi_\epsilon\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ une fonction C^∞ puisque par hypothèse le support singulier de la solution fondamentale T_0 est inclus dans $\{0\}$. D'après l'exemple 3.18, la convolée de la distribution à support compact $P(D)[\rho_\epsilon \cdot T]$ avec la distribution fonction $[\Phi_\epsilon]$ est une distribution fonction $[\Psi_\epsilon]$, où $\Psi_\epsilon\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ est une fonction C^∞. D'autre part, en utilisant (4.68), on voit que

$$(\sigma_\epsilon \cdot T_0) * P(D)[\rho_\epsilon \cdot T] = (\sigma_\epsilon \cdot T_0) * [\varphi_\epsilon] + (\sigma_\epsilon \cdot T_0) * S_\epsilon. \tag{4.71}$$

Toujours suivant l'exemple 3.18, la distribution $(\sigma_\epsilon \cdot T_0) * [\varphi_\epsilon]$ est une distribution fonction correspondant à une fonction $\Theta_\epsilon\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ de classe C^∞ (de support d'ailleurs inclus dans la boule ouverte de centre x_0 et de rayon $\epsilon/3 + 2\epsilon$). Enfin, comme le support de S_ϵ est inclus dans $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \epsilon)}$ et que celui de la distribution à support compact $\sigma_\epsilon \cdot T_0$ est inclus dans $B_{\mathbb{R}^n}(0, 2\epsilon/3)$, celui de la distribution $(\sigma_\epsilon \cdot T_0) * S_\epsilon$ est inclus dans le complémentaire de la boule fermée de centre x_0 et de rayon $\epsilon - 2\epsilon/3 = \epsilon/3$. Dans la boule ouverte $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \epsilon/3)$, la distribution T coincide avec $\rho_\epsilon \cdot T$, soit, d'après (4.70) et (4.71), avec la distribution fonction correspondant à la fonction C^∞ $\Psi_\epsilon + \Theta_\epsilon$. Le point x_0 est donc bien dans le complémentaire du support singulier de T. On a ainsi vérifié (en passant aux complémentaires) l'inclusion $\mathrm{SS}\,(T) \subset \mathrm{SS}\,(P(D)[T])$ et achevé la preuve de la Proposition 4.6. $\square$

Cette proposition nous amène naturellement à la Définition suivante.

DÉFINITION 4.39 (notion d'hypoellipticité). Un opérateur différentiel $P(D)$ en n variables à coefficients constants ($P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dit *hypoelliptique* s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes de la Proposition 4.6.

EXEMPLE 4.40 (distributions harmoniques, distributions holomorphes, *etc.*). Le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$, l'opérateur de Cauchy-Riemann $\partial/\partial\overline{z}$ dans $\mathbb{R}^2$, tous les opérateurs différentiels à coefficients constants en une variable, sont hypoelliptiques. Si T est une distribution dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ telle que $\Delta T \equiv 0$ au sens des distributions dans Ω, alors $T = [F]$, où F est une fonction harmonique (donc C^∞) dans Ω. Si T est une distribution dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que $(\partial/\partial\overline{z})[T] \equiv 0$ au sens des distributions dans Ω, alors $T = [f]$, où f est une fonction holomorphe (voir [**Charp**]) dans Ω. Si T est une distribution dans un ouvert de $\mathbb{R}$ telle que $P(D)[T] \equiv 0$ dans cet ouvert, $T = [g]$, où g est une exponentielle polynôme solution de l'équation différentielle à coefficients constants $P(D)[g] \equiv 0$ dans $\mathbb{R}$ (d'après le théorème d'Euler).

EXERCICE 4.41 (distributions et méromorphie). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, A un sous ensemble de Ω sans point d'accumulation dans Ω. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega\backslash A$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

— la distribution fonction $[f] \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{C})$ se prolonge en une distribution sur Ω ;

— la fonction f est la restriction à $\Omega \setminus A$ d'une fonction méromorphe dans Ω.

EXERCICE 4.42 (puissances du laplacien). Soit N un entier naturel non nul. On note $\Delta^N = \Delta \circ \cdots \circ \Delta$ (N fois) l'opérateur de Laplace étant entendu ici à n variables. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$ (à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$) telle que $\Delta^N[T] \equiv 0$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T = [F]$, où $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Peut-il exister des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^n$ telles que $\Delta^N[T] \equiv 0$ pour un certain N ? Énoncer et retrouver le théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^n$ (on appliquera ce qui précède avec $N = 1$).

EXERCICE 4.43 (vecteurs propres « distributions » de l'opérateur de Laplace). Soit T une distribution dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ telle que $\Delta T \equiv \lambda T$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ (T est « vecteur propre » du Laplacien, de valeur propre associée λ). En vous référant au problème du DS (que vous adapterez), montrer que $T = [F]$, où F est une fonction C^∞ dans Ω.

Bibliographie

[Charp] P. Charpentier, *Analyse Complexe*, polycopié de l'UE MHT734 :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pcharpen/enseignement/fichiers-master1/Analyse_Complexe.pdf

[Horm] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I : Distribution theory and Fourier Analysis* (second edition), Springer Study Edition, Springer Verlag, 1990.

[Kant] J.M. Kantor, Mathématiques d'Est en Ouest, Théorie et pratique : l'exemple des distributions, Gazette de la SMF, vol. 100, Avril 2004,

http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2004/100/smf_gazette_100_33-43.pdf

[Marc] J.P. Marco (ed.), *Mathématiques L3 Analyse*, Pearson Education, Paris, 2009.

[Rud] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris.

[Sch] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Vil] C. Villani, Cours sur les distributions,

http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/villani/Cours/PDFFILES/ana-chap3.pdf

[Y0] A. Yger, *Analyse complexe et Distributions*, Ellipses Marketing éditions, Paris, 2001.

[Y1] A. Yger, *Théorie de l'Intégration*, polycopié de l'UE MHT512 :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf

[Y2] A. Yger, *Espaces de Hilbert et Analyse de Fourier*, polycopié de l'UE MHT613 :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht613.pdf

Index