ANNÉE 2003-2004 SESSION DE SEPTEMBRE 2004

GU : MIAS 3, MIAS 2', IUP MIAGE **UE** : 301 M ALG

Date : Lundi 06 Septembre 2004, 14.00-17.00 Durée : 3 h.

TEXTE (en italiques) et CORRIGÉ

Problème d'analyse

Partie I

On note sinc *(abréviation de sinus-cardinal) la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\operatorname{sinc}(t) := \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0\,. \end{cases}$$

1. *Montrer que la fonction* sinc *est une fonction analytique sur* $\mathbb{R}$ *et écrire son développement de Taylor à l'origine. Quel est le rayon de convergence de la série entière correspondant à ce développement de Taylor ?*

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

le rayon de convergence de la séie entière $[(-1)^k X^{2k+1}/(2k+1)!]_{k\geq 0}$ valant d'après la règle de d'Alembert (par exemple) $R = +\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a donc, en divisant par t l'identité ci-dessus

$$\operatorname{sinc}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}\,. \qquad (*)$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $[(-1)^k X^{2k}/(2k+1)!]_{k\geq 0}$ vaut aussi $R = +\infty$, la somme de cette série définit une fonction analytique U sur $\mathbb{R}$ dont le développement de Taylor au voisinage de $t = 0$ est

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}\,.$$

Comme $U(0) = 1 = \operatorname{sinc}(0)$ et que les deux fonctions U et sinc sont continues en $t = 0$, la relation $(*)$ est valable pour tout t, ce qui prouve que la fonction sinc est analytique sur $\mathbb{R}$, que son développement de Taylor au voisinage de $t = 0$ est donné par la formule $(*)$, la série de Taylor en $t = 0$ ayant pour rayon de convergence $+\infty$.

2. *Soit $\{u_k\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$ une famille de nombres complexes telle que les deux séries numériques $[|u_k|^2]_{k\geq 0}$ et $[|u_{-k}|^2]_{k\geq 1}$ soient convergentes. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (empruntée au cours d'algèbre et que l'on rappellera), montrer que, quelque soient p et q avec $0\leq p\leq q$, on a*

$$\Big|\sum_{\{k\,;\,p\leq|k|\leq q\}} u_k \mathrm{sinc}(\pi(t-k))\Big| \leq \sqrt{\sum_{\{k\,;\,p\leq|k|\leq q\}}|u_k|^2}\times\sqrt{\sum_{\{k\,;\,p\leq|k|\leq q\}}|\mathrm{sinc}(\pi(t-k))|^2}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^n$ assure que si $Z := (z_1,...,z_N)$ et $W := (w_1,...,w_N)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{C}^N$ et si $\langle\,,\,\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{C}^N$, alors

$$|\langle Z\,,\,W\rangle| \leq \|Z\|\times\|W\|\,.$$

On applique cette inégalité en prenant pour $z_1,...,z_N$ les nombres complexes u_k avec $p\leq|k|\leq q$ rangés dans un certain ordre (par exemple suivant les indices k croissants) et pour $w_1,...,w_N$ les nombres $\sin(\pi(t-k))$ rangés dans le même ordre.

3. *Montrer que les deux séries de fonctions*

$$\Big[|\mathrm{sinc}\,(\pi(t-k))|^2\Big]_{k\geq 0}\qquad,\qquad\Big[|\mathrm{sinc}\,(\pi(t+k))|^2\Big]_{k\geq 1}$$

convergent normalement sur tout intervalle $[-T,T]$ de $\mathbb{R}$ et en déduire que l'on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant

$$S(t) := \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=-n}^{k=n}|\mathrm{sinc}\,(\pi(t-k))|^2\,.$$

Soit $T>0$; si k est un entier relatif tel que $|k|>2T$, on a, pour tout $t\in[-T,T]$, $|t\pm k|\geq(|k|-T)\geq|k|-|k|/2=|k|/2$. Il existe donc un entier n_T (la partie entière de $2T$) tel que

$$\forall t\in[-T,T]\,,\ \forall k\geq n_T\,,\ |\mathrm{sinc}\,(\pi(t-k))|^2=\frac{\sin^2(\pi(t-k))}{\pi^2(t-k)^2}\leq\frac{4}{\pi^2k^2}\,;$$

de même

$$\forall t\in[-T,T]\,,\ \forall k\geq n_T\,,\ |\mathrm{sinc}\,(\pi(t+k))|^2=\frac{\sin^2(\pi(t-k))}{\pi^2(t-k)^2}\leq\frac{4}{\pi^2k^2}\,.$$

Comme la série de Riemann $[1/k^2]_{k\geq n_T}$ est convergente, on est bien pour les deux séries

$$\Big[|\mathrm{sinc}\,(\pi(t-k))|^2\Big]_{k\geq 0}\qquad,\qquad\Big[|\mathrm{sinc}\,(\pi(t+k))|^2\Big]_{k\geq 1}$$

sous les hypothèses de convergence normale sur $[-T,T]$. La suite des sommes partielles

$$\Big(\sum_{k=0}^{n}|\text{sinc},(\pi(t-k))|^2\Big)_{n\geq 0}$$

converge donc vers une fonction continue S_+ sur $[-T,T]$ (la convergence de cette suite de fonctions étant uniforme puisque la série correspondante converge normalement sur $[-T,T]$). De même la suite des sommes partielles

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|\text{sinc}\,(\pi(t+k))|^2\Big)_{n\geq 1}$$

converge donc vers une fonction continue S_- sur $[-T,T]$ (pour les mêmes raisons). En additionnant ces deux suites, on trouve le résultat voulu avec $S = S_+ + S_-$; la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ puisque T peut être choisi arbitrairement grand.

4. *Montrer que la fonction S définie au* **I.3** *est une fonction continue 1-périodique et en déduire qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout couple d'entiers p,q avec $0\leq p\leq q$, on ait*

$$\sum_{\{k\,;\,p\leq|k|\leq q\}}|\text{sinc}(\pi(t-k))|^2\leq C\,.$$

On a, par un simple décalage d'indice (k changé en $k-1$)

$$S(t)=\sum_{\{k\,;\,p\leq|k|\leq q\}}|\text{sinc}(\pi(t+1-k))|^2=S(t+1)\,.$$

La fonction S est donc 1-périodique ; comme elle est aussi continue, elle est bornée par une constante C (une fonction continue sur $[0,1]$ est bornée et atteint ses bornes).

5. *Rappeler le critère de Cauchy uniforme puis expliquer comment on l'utilise pour déduire du résultat établi en* **I.2** *la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions*

$$\Big(\sum_{k=-n}^{n}u_k\,\text{sinc}\,(\pi(t-k))\Big)_{n\geq 0}$$

lorsque la famille $\{u_k\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$ vérifie les hypothèses du **I.2**.

Le critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ s'énonce ainsi :

$$\forall\epsilon>0\,,\exists N\in\mathbb{N}\ \forall q>p\geq N\,,\ \forall t\in\mathbb{R}\,,\ |S_q(t)-S_p(t)|\leq\epsilon\,.$$

Il implique la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$. On l'applique ici en prenant

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} u_k \mathrm{sinc}\left(\pi(t-k)\right).$$

Si $q > p \geq 0$, on a

$$S_q(t) - S_p(t) = \sum_{\{k\,;\,p+1\leq |k|\leq q\}} u_k \mathrm{sinc}\left(\pi(t-k)\right).$$

En combinant l'inégalité obtenue à la question **I.2** et le résultat de la question **I.4**, on a donc, pour tout $q \geq p \geq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|S_q(t) - S_p(t)| \leq \sqrt{C}\sqrt{\sum_{\{k\,;\,p+1\leq |k|\leq q\}} |u_k|^2}.$$

Comme les deux séries numériques $[|u_k|^2]_{k\geq 0}$ et $[|u_{-k}|^2]_{k\geq 1}$ sont convergentes, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un entier $N(\epsilon)$ tel que si p et q sont deux entiers avec $q > p \geq N(\epsilon)$, on ait

$$\sum_{\{k\,;\,p+1\leq |k|\leq q\}} |u_k|^2 \leq \epsilon^2.$$

Pour $q > p \geq N(\epsilon)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc

$$|S_q(t) - S_p(t)| \leq \sqrt{C}\,\epsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit F une fonction continue sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$; on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)e^{itu}du.$$

1. *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(k)$ est le coefficient de Fourier complexe d'indice k de la fonction g définie par*

$$\forall u \in [-\pi,\pi[,\ g(u) = F(-u),$$

puis prolongée sur $\mathbb{R}$ tout entier en une fonction 2π-périodique (on rappelera la définition du coefficient de Fourier complexe d'indice k, noté $c_k(g)$, d'une fonction réglée 2π-périodique).

Par définition et changement de variables ($t \longrightarrow -t$) sous l'intégrale, on a

$$f(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)e^{iku}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(-u)e^{-iku}du\,;$$

ceci est exactement la définition du k-ème coefficient de Fourier complexe $c_k(g)$ de la fonction 2π-périodique g égale à $u \to F(-u)$ sur $[-\pi,\pi[$ (en effet, intégrer une fonction 2π-périodique sur $[-\pi,\pi]$ ou $[0,2\pi]$ revient au même).

2. *Montrer (en utilisant le* **1** *et en citant un résultat du cours concernant la théorie des séries de Fourier) que*

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |f(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(u)|^2 du\,.$$

On applique la formule de Plancherel à la fonction g, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(u)|^2 du &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(u)|^2 du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(-u)|^2 du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(u)|^2 du \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2\,.\end{aligned}$$

3. *Calculer, si t est un nombre réel fixé, la suite des coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π périodique s_t définie par*

$$\forall\, u \in [-\pi,\pi[\,,\;\; s_t(u) = \exp(iut)$$

et prolongée ensuite à $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique (on exprimera ces coefficients à partir de la fonction sinc*).*

On a, par définition, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}c_k(s_t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_k(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_t(u)e^{-iku}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iu(t-k)}du = \mathrm{sinc}(\pi(t-k))\end{aligned}$$

puisque quand $t \neq k$, une primitive de $t \to \exp(iu(t-k))$ est

$$u \mapsto \frac{\exp(iu(t-k))}{i(t-k)}\,.$$

De plus $c_k(s_k) = 1 = \mathrm{sinc}\,(0)$.

4. *On constate que la famille $\{f(k)\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$ des échantillons de f aux entiers relatifs vérifie les hypothèses du* **I.2** *et que par conséquent (d'après le* **I.5***), la suite de fonctions*

$$\Big(\sum_{k=-n}^{k=n} f(k)\,\mathrm{sinc}(\pi(t-k))\Big)_{n\geq 0}$$

converge uniformément vers une fonction limite sur $\mathbb{R}$. Montrer (en utilisant la théorie des séries de Fourier et les résultats établis au **II.1** *et* **II.3***) qu'en fait cette fonction limite est la fonction f et que l'on peut ainsi reconstruire f à tout instant t à partir de ses valeurs aux entiers relatifs par la formule (due à Shannon)*

$$\forall t\in\mathbb{R}\,,\ f(t)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=-n}^{k=n} f(k)\,\mathrm{sinc}\,(\pi(t-k))\,,$$

la convergence étant une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Pourquoi la fonction f est-elle automatiquement continue ?

D'après la formule de Plancherel (cette fois sous la forme dédoublée de Parseval), appliquée aux fonctions g et s_t pour $t\in\mathbb{R}$ fixé, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)\overline{c_k(s_t)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)\overline{s_t(u)}du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\overline{s_t(u)}du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(-u)e^{-itu}du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)e^{itu}du = f(t)\,.\end{aligned}$$

La convergence de la suite de fonctions

$$\left(\sum_{k=-n}^{n} f(k)\mathrm{sinc}\,(\pi(t-k))\right)_{n\geq 0}$$

étant uniforme d'après la partie **I**, la fonction f, limite uniforme de cette suite, est une fonction continue (on aurait pu aussi le voir dès le début de la partie **II** à partir de la définition de f).

Problème d'algèbre

Soit A une matrice $n\times n$ à coefficients complexes et A^* la matrice adjointe de A, définie, on le rappelle, comme la conjuguée de la transposée de A.

1. *Montrer (en citant précisément le résultat du cours d'algèbre auquel vous faites référence) que la matrice AA^* est une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que ses valeurs propres sont positives ou nulles. Exprimer à partir des valeurs propres (distinctes) $\mu_1, ..., \mu_s$ de cette matrice le polynôme minimal de l'opérateur $T \circ T^* : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, où T est l'opérateur de $\mathbb{C}^n$ dans lui-même dont A représente la matrice dans la base canonique.*

La matrice AA^* est hermitienne car $(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$; or on sait d'après le cours que toute matrice hermitienne est diagonalisable sur $\mathbb{C}$; mieux, on peut l'écrire

$$AA^* = UBU^*\,,$$

où B est diagonale réelle et U unitaire ($U^{-1} = U^*$). Les valeurs propres de A (donc les éléments diagonaux de B) sont positives : soit en effet λ une telle valeur propre et $\vec{V}$ un vecteur propre (non nul) associé ; on a

$$\langle AA^*(\vec{V})\,,\,\vec{V}\rangle = \langle \lambda\vec{V}\,,\,\vec{V}\rangle = \lambda\|\vec{V}\|^2\,;$$

or, par la formule d'adjonction,

$$\langle AA^*(\vec{V})\,,\,\vec{V}\rangle = \langle A^*(\vec{V})\,,\,A^*(\vec{V})\rangle = \|A^*(\vec{V})\|^2\,,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\|A^*(\vec{V})\|^2}{\|\vec{V}\|^2} \geq 0\,.$$

L'opérateur $T \circ T^*$ a pour matrice AA^* dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$; si $\mu_1, ..., \mu_s$ sont les valeurs propres (distinctes) de cette matrice diagonalisable, le polynôme minimal de l'opérateur correspondant $T \circ T^*$ est, d'après le cours,

$$P(X) = (X - \mu_1) \cdots (X - \mu_s)\,.$$

2. *On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la question* **5** *incluse que A est inversible. Montrer que les valeurs propres de la matrice AA^* sont des nombres strictement positifs (non nécessairement distincts) que l'on peut donc écrire $\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2$, avec $\lambda_j > 0$ quelque soit j dans $\{1, ..., n\}$.*

Comme A est inversible, A^* l'est aussi et par conséquent AA^* également ; la matrice diagonale B est donc inversible, ses éléments diagonaux (qui sont les valeurs propres de AA^*) sont donc strictement positifs. Tout nombre strictement positif s'écrivant comme le carré d'un nombre strictement positif, on peut bien écrire les valeurs propres de AA^* sous la forme $\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2$ avec $\lambda_j > 0$ pour $j = 1, ..., n$.

3. *Montrer (en citant encore précisément le théorème du cours d'algèbre auquel vous faites référence) qu'il existe une matrice unitaire U telle que, si D est la matrice diagonale dont la diagonale est donnée par la suite $\lambda_1, ..., \lambda_n$,*

$$AA^* = (UD) \times (UD)^* .$$

On a vu (résultat du cours rappelé au **1**) que AA^* pouvait s'écrire

$$AA^* = UBU^*$$

avec B diagonale et U unitaire. On sait maintenant de plus (résultat du **2**) que B peut s'écrire D^2, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous strictement positifs. On a donc, comme $D^* = D$ (en tant que matrice diagonale réelle)

$$AA^* = UD^2U^* = UDD^*U^* = (UD) \times (UD)^* .$$

Les coefficients diagonaux de D sont les nombres $\lambda_1, ..., \lambda_n$, racines strictement positives des valeurs propres de AA^*.

4. *Vérifier, si $\langle \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{C}^n$, que l'on a, pour tout vecteur colonne X de $\mathbb{C}^n$,*

$$\langle A^*X \, , \, A^*X \rangle = \langle (UD)^*X \, , \, (UD)^*X \rangle$$

et en déduire que la matrice $V := A^*[(UD)^*]^{-1}$ est unitaire.

On utilise deux fois la formule d'adjonction : pour tout vecteur colonne X de $\mathbb{C}^n$, on a

$$\langle A^*X \, , \, A^*X \rangle = \langle (A^*)^*AX \, , \, X \rangle = \langle AA^*X \, , \, X \rangle .$$

Mais on a aussi, en remplacant A par UD et en répètant le raisonnement,

$$\langle (UD)^*X \, , \, (UD)^*X \rangle = \langle (UD) \times (UD)^*X \, , \, X \rangle = \langle AA^*X \, , \, X \rangle$$

d'après le résultat de la question **3**, ce qui en combinant les formules précédentes donne la formule voulue.

La matrice UD, donc $(UD)^*$ est bien inversible (U est unitaire, D est diagonale avec valeurs propres strictement positives) ; en posant $X = [(UD)^*]^{-1}Y$ avec Y arbitraire dans $\mathbb{C}^n$ dans la formule

$$\langle A^*X \, , \, A^*X \rangle = \langle (UD)^*X \, , \, (UD)^*X \rangle$$

que l'on vient d'établir, on voit que, si $V := A^*[(UD)^*]^{-1}$, on a, pour tout $Y \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle VY \,,\, VY \rangle = \|Y\|^2 \,,$$

ce qui prouve que V est unitaire.

5. *Déduire des résultats établis aux* **3** *et* **4** *qu'il existe deux matrices $n \times n$ unitaires U et V et une suite de nombres réels positifs $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ tels que*

$$A = U \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \times V^* \,.$$

De $A^*[(UD)^*]^{-1} = V$, on déduit par multiplication à droite par $(UD)^*$ que

$$A^* = V(UD)^* = VD^*U^* = VDU^*$$

puisque D est diagonale réelle (donc $D = D^*$) ; par transposition, il vient donc

$$A = (U^*)^* DV^* = UDV^* \,,$$

les matrices U et V étant unitaires, ce qui est la formule voulue.

6. *On ne suppose plus A inversible ; montrer que néanmoins l'opérateur T dont A représente la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ réalise un isomorphisme entre le sous espace $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ et le sous-espace $(\operatorname{Ker} T^*)^\perp$.*

L'orthogonal du noyau de T^* est, d'après le cours, l'image de l'opérateur $(T^*)^* = T$. La restriction de T au sous-espace $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ est donc un homomorphisme de $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ dans un sous-espace de $\operatorname{Im} T$. Mais les deux sous-espaces vectoriels $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ et $\operatorname{Im} T$ ont même dimension (le rang de T est le même que celui de T^* d'après le cours) et la restriction de T à $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ est injective puisque $\operatorname{Ker} T \cap (\operatorname{Ker} T)^\perp = \{0\}$; d'après le théorème du rang, la restriction de T à $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ est donc un isomorphisme entre ce sous-espace et le sous-espace $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$.

7 (hors barème). *Montrer, en choisissant des bases orthonormées convenables des sous-espaces $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ et $(\operatorname{Ker} T^*)^\perp$ et en les complétant en des bases de $\mathbb{C}^n$, qu'il existe deux matrices $n \times n$ unitaires U et V et et une suite* *de nombres réels positifs* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ *tels que, comme au* **5**,

$$A = U \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \times V^* .$$

Cette décomposition (très importante dans l'étude de l'action d'opérateurs en mathématiques appliquées) est dite décomposition en valeurs singulières de la matrice A.

On choisit une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ et une base orthonormée de $\mathcal{B}_2$ de $\operatorname{Im} T$. Il existe un opérateur unitaire H de $\mathbb{C}^n$ dans lui-même transformant la base $\mathcal{B}_2$ en la base $\mathcal{B}_1$. L'opérateur $\widetilde{T} := H \circ T$ restreint à $F = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ devient ainsi un isomorphisme de F dans lui-même. Ce sous-espace F est de dimension $m = \operatorname{rang} T$ et, en appliquant les résultats des questions précédentes à $\widetilde{T}$ considéré comme opérateur inversible de $\mathbb{C}^m$ dans lui-même, on voit qu'il existe deux bases orthonormées de F telles que la matrice de $\widetilde{T}$ exprimée dans ces bases (une au départ, l'autre à l'arrivée) soit diagonale à coefficients strictement positifs. On complète ces bases en des bases orthonormées de $\mathbb{C}^n$ en utilisant le procédé de Gram-Schmidt. Dans ces nouvelles bases, la matrice de $H \circ T$ est diagonale positive avec exactement $n-m$ zéros sur la diagnale. Il existe donc deux bases orthormées de $\mathbb{C}^n$ telles que la matrice de $T = H^{-1} \circ (H \circ T)$ (avec H unitaire) exprimée dans ces bases (à l'arrivée et au départ) soit diagonale positive avec exactement $n-m$ zéros sur la diagnale. En revenant aux matrices, on a la conclusion voulue.

FIN