

Courants résiduels et théorie de l'intersection*

Alain Yger

Laboratoire de Mathématiques pures
Université Bordeaux 1, 33405 Talence, France

16 mars 2000

Résumé

Après une brève présentation de quelques développements récents de la théorie de l'intersection dus à l'école Polonaise et à J. Kollár, on mettra en évidence dans cet exposé le rôle que pourrait être amené à jouer le calcul résiduel multi-variables rendu opérationnel, tant dans le cadre intersection complète que hors de ce cadre. On présentera quelques objets résiduels introduits récemment dans des travaux en collaboration avec C. A. Berenstein, M. Passare, A. Tsikh, A. Vidras et leur implication dans certaines questions liées à la théorie arithmétique de l'intersection.

C'est un très grand plaisir pour moi de dédier cet exposé à Jean-Baptiste Poly; inutile de redire combien ses idées ont inspiré les développements de la théorie des résidus depuis les années 70; j'ajouterai, pour en avoir à chacune de nos (trop brèves!) reconcontres fait l'expérience, que ses remarques, sa gentillesse, m'ont beaucoup apporté.

1 Quelques rudiments de la théorie analytique de l'intersection

Étant donnée une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n , sa diagonale $\Delta = \{(x, x) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}\}$, deux sous-ensembles analytiques irréductibles

*AMS classification number: 32A27, (32A25, 32C30).

Z_1 et Z_2 , on sait ([27]) définir un “indice de contact” $\nu(Z_1 \times Z_2, \Delta; (x, x))$ entre $Z_1 \times Z_2$ et la sous-variété lisse Δ en tout point (x, x) de Δ , et ce de manière à ce que

$$x \in \mathcal{X} \mapsto \nu(Z_1 \times Z_2, \Delta; (x, x))$$

soit une fonction analytiquement constructible de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{N}$ au sens de Łojasiewicz [24]. À une telle fonction, correspond un cycle analytique $Z_1 \bullet Z_2$, et l’on induit ainsi un procédé naturel pour définir le produit d’intersection de deux cycles analytiques

$$C_1 = \sum_{j_1} \alpha_{j_1} C_{1,j_1}, \quad C_2 = \sum_{j_2} \beta_{j_2} C_{2,j_2}, \quad \alpha_{j_1}, \beta_{j_2} \in \mathbb{Z},$$

(définis à partir de deux collections $(C_{1,j_1})_{j_1}$, $(C_{2,j_2})_{j_2}$ localement finies de sous-ensembles analytiques irréductibles et distincts), soit

$$C_1 \bullet C_2 := \sum_{j_1} \sum_{j_2} \alpha_{j_1} \beta_{j_2} C_{1,j_1} \bullet C_{2,j_2}.$$

Ce procédé s’itère et l’on est donc en mesure de définir ainsi le produit d’intersection $C_1 \bullet \dots \bullet C_N$ de N cycles analytiques $C_1, \dots, C_N$.

À tout cycle effectif

$$C = \sum_j \alpha_j Z_j$$

de $\mathcal{X}$, est associé naturellement un faisceau d’idéaux

$$\mathcal{I}(C) = \prod_l \mathcal{I}(Z_j)^{\alpha_j},$$

où

$$\mathcal{I}(Z_j)_x := \{f \in \mathcal{O}_x(\mathcal{X}), f = 0 \text{ sur } Z_j\}.$$

Il existe d’ailleurs une correspondance réciproque (à tout faisceau cohérent d’idéaux, on sait associer un cycle analytique, voir par exemple [18]) qui, même si elle n’est pas aussi parfaite que la correspondance classique faisceaux cohérents d’idéaux $\leftrightarrow$ sous-schémas de $(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{X}))$, permet de jeter malgré tout un pont entre les points de vue géométrique et algébrique.

Les outils que propose l’analyse sont plus en relation étroite avec ce que l’on convient d’appeler le *faisceau d’idéaux de Chow d’un cycle* (voir par exemple [18]). Rappelons brièvement comment est défini l’idéal de Chow d’un cycle

effectif C de dimension pure $0 \leq k < n$ de $\mathcal{X}$ en un point x de son support. Pour simplifier, nous supposons que $\mathcal{X}$ est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ et que $x = 0$. Supposons que $C = \sum_j \alpha_j Z_j$ et notons $|C|$ le support de C , soit l'union des sous-ensembles analytiques irréductibles Z_j . Si π est une application linéaire surjective de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{k+1}$ telle que 0 soit un point isolé de $\text{Ker } \pi \cap |C|$ (on dit encore une *projection admissible*), il existe un voisinage U de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ tel que la restriction de π à $U \cap |C|$ soit une application propre de $U \cap |C|$ sur $\pi(U)$. À chaque composante irréductible Z_j du cycle contenant 0, correspond un nombre μ_{π, Z_j} qui est le nombre de feuillets du revêtement

$$\pi|_{Z_j \cap U} : Z_j \cap U \mapsto \pi(U).$$

Alors, la projection $\pi(Z_j \cap U)$ est un sous ensemble analytique de dimension k de $\pi(U)$, c'est à dire une hypersurface, que l'on peut donc définir par une équation f_{π_j} dans $\pi(U)$ (au voisinage de 0). On peut relever cette équation et définir une fonction analytique dans U (éventuellement restreint) par

$$F(\pi, z) : z \mapsto \prod_j f_{\pi_j}(\pi(z))^{\alpha_j \mu_{\pi, Z_j}}.$$

En considérant toutes les projections admissibles possibles, on construit un idéal dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en 0, que l'on appelle *idéal de Chow* associé au cycle C à l'origine, défini par

$$I^{\text{chow}}(C)_0 = (F(\pi, \cdot), \pi \text{ admissible}).$$

L'un des résultats majeurs illustrant le rôle que joue cette notion d'idéal de Chow dans le cadre de la théorie de l'intersection que nous venons d'évoquer est la proposition suivante, dont on trouvera la preuve dans [18]:

Proposition 1.1 *Si $C_1, \dots, C_N$ sont N cycles effectifs de $\mathcal{X}$, alors, pour tout $x \in |C_1| \cap \dots \cap |C_N|$,*

$$\mathcal{I}_x^{\text{chow}}(C_1 \bullet \dots \bullet C_N) \subset \overline{(\mathcal{I}_x(C_1), \dots, \mathcal{I}_x(C_N))},$$

la barre ci-dessus désignant la prise de clôture intégrale dans l'anneau local $\mathcal{O}_x(\mathcal{X})$.

Ce résultat se doit d'être complété par le résultat (d'inspiration à l'origine analytique) qu'est le théorème de Briançon-Skoda [9, 22, 23], selon lequel, étant donné un idéal I dans un anneau local régulier de dimension n , on a

toujours l'inclusion $\overline{I^{n+k-1}} \subset I^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, et en donc particulier l'inclusion $\overline{I^n} \subset I$. Ainsi donc, si $C_1, \dots, C_N$ sont N cycles effectifs de $\mathcal{X}$, on a, pour tout point x de l'intersection des supports de ces cycles, l'inclusion algébrique

$$\left(\mathcal{I}_x^{\text{chow}}(C_1 \bullet \dots \bullet C_N)\right)^n \subset (\mathcal{I}_x(C_1), \dots, \mathcal{I}_x(C_N)).$$

Ce sont ces remarques qui conduisent aujourd'hui à une relativement bonne compréhension des résultats d'effectivité en géométrie algébrique en ce qui concerne par exemple les estimations optimum de degré dans les questions de type Nullstellensatz. On peut en effet montrer, via l'introduction de cette notion d'indice de contact, que deux sous-ensembles algébriques Z_1 et Z_2 de l'espace $\mathbf{A}^n$, de dimension pure, et s'intersectant suivant une variété algébrique affine de dimension 0, donc finie, sont tels qu'il existe $R > 0$ et $\gamma > 0$, avec

$$\|z\| \geq R \implies d(z, Z_1) + d(z, Z_2) \geq \gamma \|z\|^{1 - \deg X \deg Y + \deg X \bullet Y} \quad (1.1)$$

(d désigne ici la fonction distance) [11]. Cette information, lorsqu'on la couple avec l'utilisation du théorème de Bézout, se répercute (via le théorème de Skoda) en un résultat de nature algébrique au niveau de l'effectivité du Nullstellensatz (voir [18]) en termes de degré: Si $I_1, \dots, I_N$, sont N idéaux dans $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$, sans zéros comuns dans $\widetilde{\mathbf{K}}^n$, où $\widetilde{\mathbf{K}}$ désigne une clôture intégrale du corps $\mathbf{K}$, il existe des polynômes $Q_1 \in I_1, \dots, Q_N \in I_N$, avec

$$1 = Q_1 + \dots + Q_N$$

et surtout

$$\deg Q_j \leq (n+1) \prod_{j=1}^N \deg I_j.$$

Cependant, un tel résultat n'est pas totalement satisfaisant, au sens où l'un des outils intermédiaires majeurs, à savoir le théorème de Skoda, réalisant le pont entre l'information de nature géométrique (du type par exemple hypothèse de régulière séparation à l'infini telle que (1.1)) et sa contrepartie algébrique (du type par exemple Nullstellensatz effectif), joue le rôle d'une boîte noire masquant toute information à caractère arithmétique.

La solution du Nullstellensatz sous l'angle arithmétique (telle qu'elle est proposée dans [3]) passe (au moins dans un cas particulier important) par une relecture des conditions de séparation à l'infini en termes d'annulation de

symboles résiduels. Soient par exemple $P_1, \dots, P_n$ n polynômes en n variables à coefficients dans un corps commutatif infini $\mathbf{K}$, définissant une famille normale (toute sous-famille extraite de $\{P_1, \dots, P_n\}$ définit une suite quasi-régulière, ce qui s'interprète dans le cas $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ en disant que cette sous-famille définit une intersection complète dans $\mathbb{C}^n$). Si $\| \cdot \|$ désigne une norme sur $\widetilde{\mathbf{K}}^n$ induite par une valeur absolue non triviale sur $\mathbf{K}$, une condition naturelle de séparation à l'infini se lit en termes d'"inégalités de Lojasiewicz à l'infini"

$$\exists R > 0, \exists q \in \mathbb{N}, \exists \gamma > 0, \text{ tels que } \|X\| \geq R \implies |P_1(X)| + \dots + |P_n(X)| \geq \gamma \|X\|^{-q}.$$

En voici une conséquence plus algébrique, que l'on trouvera dans [3], section 4: si $L_1, \dots, L_n$ sont des formes affines génériques, l'application

$$F : X \mapsto (L_1(X)^{q+1}P_1(X), \dots, L_n(X)^{q+1}P_n(X))$$

(q désignant l'exposant de Lojasiewicz à l'infini figurant dans (1.1)) est une application polynomiale propre satisfaisant

$$\forall \epsilon > 0, \exists R_\epsilon(L) > 0, \exists \tilde{\gamma}_\epsilon(L) > 0, \text{ tels que } \|X\| \geq R_\epsilon(L) \implies |F_1(X)| + \dots + |F_n(X)| \geq \tilde{\gamma}_\epsilon(L) \|X\|^{1-\epsilon}.$$

Comme conséquence, on peut montrer, en utilisant toute la force du calcul résiduel multi-variables, que, précisément pour un tel choix de q , tous les éléments du corps

$$\mathbf{K}(u_{10}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{n0}, \dots, u_{nn})$$

que sont les symboles résiduels (pris au sens de [21], chapitre 3)

$$\text{Res} \left[\begin{array}{c} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_n \\ [L_1^{q+1}(u, X)P_1(X)]^{\beta_1+1}, \dots, [L_n^{q+1}(u, X)P_n(X)]^{\beta_n+1} \end{array} \right], \quad (1.2)$$

où

$$L_j(u, X) := u_{j0} + \sum_{k=1}^n u_{jk} X_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

sont nuls dès que

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n < |\beta| := \beta_1 + \dots + \beta_n.$$

La nullité de tous ces symboles résiduels fournit une information plus exploitable algébriquement que ne l'étaient les inégalités de Lojasiewicz. Si l'on pense en termes d'analyse, c'est en effet cette fois l'utilisation de la formule de Cauchy-Weil, et non plus les méthodes de résolution du $\bar{\partial}$ sous-jacentes au théorème de Skoda, qui permettent de faire le pont entre cette nouvelle information (nullité des symboles résiduels) et le Nullstellensatz énoncé pour l'idéal $(P_1, \dots, P_n)$. Cette fois, la résolution de ce problème algébrique se fait via une formule algébrique, et ce de manière totalement explicite, permettant un contrôle tant des numérateurs que des dénominateurs des expressions obtenues, lorsque $\mathbf{K}$ est par exemple le corps des fractions d'un anneau équipé d'une taille [3].

Revenons maintenant au cas complexe; les symboles résiduels du type (1.2) intervenant ci-dessus peuvent s'interpréter en termes de "résidus à l'infini" (en tant que sommes complètes de résidus à distance finie). Il subsiste cependant dans cette approche un obstacle de taille: les homogénéisés des $L_j(u, \cdot)^{q+1} P_j$, s'ils définissent bien une variété discrète dans $\mathbb{C}^n$ (ils y définissent une intersection complète), définissent des hypersurfaces qui n'ont aucune raison de s'intersecter proprement à l'infini. C'est là la motivation majeure pour tenter d'étendre certains aspects du calcul résiduel au cadre de situations non-intersection complète, ce aux fins d'applications tant de nature algébrique que géométrique. L'objectif soutendant notre approche reste l'interprétation, précisément en termes d'annulation de certains symboles résiduels, des conditions de régulière séparation à l'infini; l'annulation de tels symboles se devra ensuite d'être exploitée par le fait qu'elle conduit à ce que les développements du type Bergman-Weil les impliquant [1] se tronquent automatiquement, et par là même, génèrent des formules de division-interpolation qui auraient dû n'être qu'analytiques a priori, mais deviennent, précisément à cause de ces annulations, des identités algébriques. Ce sont quelques techniques sous-jacentes à ces idées, et quelques unes de leurs conséquences, que nous présenterons dans cet exposé.

2 Courants résiduels

La transcription naturelle de l'objet géométrique rigide qu'est le résidu de Grothendieck relatif à une intersection complète au cadre des courants (ce qui permettrait d'en faire un objet beaucoup plus souple) pose de délicats problèmes d'analyse. On sait en effet que, si $f_1, \dots, f_p$ sont par exemple $p \leq n$

fonctions holomorphes en n variables dans un voisinage v de l'origine où elles y définissent une intersection complète, la limite

$$\lim_{\vec{\epsilon} \rightarrow 0} \frac{1}{(2i\pi)^p} \int_{|f_1|=\epsilon_1, \dots, |f_p|=\epsilon_p} \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_p}$$

peut, pour certaines $(n, n-p)$ -formes test φ qui ne sont plus $\bar{\partial}$ -fermées au voisinage de l'ensemble analytique $V(f) := \{f_1 = \cdots = f_p = 0\}$, ne pas exister. Des exemples aussi simples que ceux proposés dans [25] ou [6] ($p = n = 2$, $f_1(\zeta) = \zeta_1^m$, m convenable, $f_2(\zeta) = \zeta_2^3 + \zeta_1 + \zeta_1^2$, $\varphi(\zeta) = f_2(\zeta) \bar{\zeta}_2 d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$, en témoignent. En revanche, le fait de moyenniser la fonction

$$\vec{\epsilon} \mapsto \frac{1}{(2i\pi)^p} \int_{|f_1|=\epsilon_1, \dots, |f_p|=\epsilon_p} \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_p}$$

sur le simplexe $\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_p = \eta$ et de faire tendre ensuite η vers 0 conduit à une limite. Si nous nous plaçons du point de vue semi-local ($f_1, \dots, f_p$ sont cette fois des fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ qui définissent une intersection complète dans cet ouvert), nous réalisons ainsi un $(n, n-p)$ -courant dans U qui n'est rien d'autre, dans ce cas, que celui proposé par N. Coleff et M. Herrera [10]; l'action de ce courant sur une $(n, n-p)$ forme test φ sera notée

$$\text{Res} \left[\frac{\varphi}{f_1, \dots, f_p} \right]$$

ou

$$\left\langle \bigwedge_{j=1}^p \bar{\partial} \frac{1}{f_j}, \varphi \right\rangle$$

suivant que l'on soit plutôt de sensibilité algébrique ou analytique; nous privilégierons dans cet exposé la notation algébrique, car c'est elle qui autorise le plus de souplesse au niveau des notations que nous utiliserons pour les généralisations ultérieures de cet objet. Il est intéressant de lier ce courant avec la fonction méomorphe $\Gamma_{f_1, \dots, f_p}$ de $\mathbb{C}^p$ dans $'\mathcal{D}^{(0,p)}(U)$

$$\Gamma_{f_1, \dots, f_p} : (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto |f_1|^{2(\lambda_1-1)} \cdots |f_p|^{2(\lambda_p-1)} \bigwedge_{j=1}^p \overline{df_j}.$$

C'est par le biais d'une pseudo-intégrale de Mellin-Barnes à p variables faisant précisément intervenir cette fonction $\Gamma_{f_1, \dots, f_p}$ que se représente (voir [26, 28])

l'action du courant résiduel de Coleff-Herrera

$$\begin{aligned} & \text{Res} \left[\begin{array}{c} \varphi \\ f_1, \dots, f_p \end{array} \right] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(2i\pi)^p} \int_{\gamma_1 + i\mathbb{R}} \dots \int_{\gamma_p + i\mathbb{R}} \tau^{-|s|} \Gamma(|s| + 1) \prod_{j=1}^p \Gamma(1 - s_j) \Gamma_f(s) [\varphi] ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ est un point de $]0, 1[^p$ et la notation $|s|$ désigne $|s| = s_1 + \dots + s_p$ si $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{C}^p$.

Cette approche du courant résiduel est d'autant plus intéressante qu'elle continue à garder un sens même si $f_1, \dots, f_p$ ne définissent plus une suite régulière; on peut définir un courant résiduel exactement suivant le mode (2.1), c'est à dire

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\begin{array}{c} \varphi \\ f_1, \dots, f_p \end{array} \right] &:= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(2i\pi\eta)^p} \int_{\|f\|^2 = \eta} \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \overline{f_k} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^p \overline{df_l} \right) \wedge \varphi \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(2i\pi)^p} \int_{\tilde{\gamma} + i\mathbb{R}^p} \tau^{-|s|} \Gamma(|s| + 1) \prod_{j=1}^p \Gamma(1 - s_j) \Gamma_f(s) [\varphi] ds. \end{aligned}$$

La différence majeure entre le cas intersection complète et le cas où les f_j sont quelconques est que, dans cette dernière situation, il n'y a aucune raison de privilégier ce courant par rapport aux courants

$$\begin{aligned} & \text{Res} \left[\begin{array}{c} \varphi \\ f_1, \dots, f_p \end{array} \right]^q := \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(2i\pi\eta)^p} \times \\ & \times \int_{|f_1|^{2q_1} + \dots + |f_p|^{2q_p} = \eta} \prod_{j=1}^p |f_j|^{2(q_j-1)} \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} q_k \overline{f_k} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^p \overline{df_l} \right) \wedge \varphi \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} q_1 \dots q_p}{(2i\pi)^p} \times \\ & \times \int_{\tilde{\gamma} + i\mathbb{R}^p} \tau^{-|s|} \Gamma(|s| + 1) \prod_{j=1}^p \Gamma(1 - s_j) \Gamma_f(q_1 s_1, \dots, q_p s_p) [\varphi] ds \end{aligned}$$

où $\underline{q} = (q_1, \dots, q_p)$ est un p -uplet d'entiers strictement positifs. Si $f_1, \dots, f_p$ définissent une intersection complète, on peut montrer que tous ces courants

définissent le même courant résiduel, et ce indépendamment de $\underline{q}$, ce qui se répercute au niveau de la fonction Γ_f dans le fait que les projections sur $\mathbf{R}^p$ des composantes de son lieu polaire passant par l'origine sont nécessairement incluses dans l'union des hyperplans de coordonnées. Tel n'est pas le cas dans la situation non-intersection complète, comme on le voit par exemple lorsque les f_j sont des monômes et où le calcul de tous ces courants se fait de manière explicite ([26], section 3).

Si $\rho_1, \dots, \rho_p$ sont des fonctions réelles analytiques ne s'annulant pas sur U , on peut élargir encore notre classe de courants résiduels en posant, pour toute forme test φ dans $\mathcal{D}^{n,n-p}(U)$,

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\begin{array}{c} \varphi \\ f_1, \dots, f_p \end{array} \right]^{q, \underline{\rho}} &:= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(2i\pi\eta)^p} \times \\ &\times \int_{\rho_1^2 |f_1|^{2q_1} + \dots + \rho_p^2 |f_p|^{2q_p} = \eta} f^{q-1} \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \rho_k^2 \overline{f_k^{q_k}} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^p \overline{\partial}[\rho_l^2 \overline{f_l^{q_l}}] \right) \wedge \varphi, \end{aligned}$$

avec

$$f^{q-1} := \prod_{j=1}^p f_j^{q_j-1}.$$

La justification de l'existence de ces courants se fait indirectement, et passe par l'utilisation du puissant outil qu'est la transformation de Mellin [26, 5]. Il s'avère que ces courants sont tous $\overline{\partial}$ -fermés et annulés par l'idéal des fonctions holomorphes dans U appartenant localement à la clôture intégrale de l'idéal $(f_1, \dots, f_p)^p$. Il est en général impossible de dire plus, sauf dans le cas intersection complète, où l'on sait qu'ils sont tous égaux (indépendamment de $\underline{q}$ et $\underline{\rho}$) et annulés par l'idéal des fonctions holomorphes dans U appartenant localement à $(f_1, \dots, f_p)$. Autre fait significatif: comme le courant de Coleff-Herrera, ces courants ont la propriété suivante, dont l'importance (relativement au concept de "courant de Coleff-Herrera") a été soulignée par Jan Erik Björk dans [6]: pour toute fonction $h \in \mathcal{H}(U)$ s'annulant sur l'ensemble analytique $\{f_1 = \dots = f_p = 0\}$, on a

$$\text{Res} \left[\begin{array}{c} \overline{h} \varphi \\ f_1, \dots, f_p \end{array} \right]^{q, \underline{\rho}} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{(n,n-p)}(U).$$

Enfin, comme le courant de Coleff-Herrera dans le cas intersection complète, ces courants, une fois multipliés par la forme jacobienne $df_1 \wedge \dots \wedge df_p$, génèrent

une collection de (p, p) -courants positifs fermés

$$[V(f)]^{\underline{q}, \underline{\rho}} : \varphi \in \mathcal{D}^{(n-p, n-p)}(U) \mapsto \left[\frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_p \wedge \varphi}{f_1, \dots, f_p} \right]^{\underline{q}, \underline{\rho}}. \quad (2.2)$$

Dans le cas intersection complète, il s'agit là du courant d'intégration (avec multiplicités) sur le cycle analytique attaché au faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(f)$ (et ce quelque soient les pondérations $\underline{p}$ et $\underline{\rho}$). Dans le cas où la codimension de $V(f) := \{f_1 = \cdots = f_p = 0\}$ est strictement inférieure à p , il ne saurait en aller de même, puisque les (p, p) -courants $[V(f)]^{\underline{p}, \underline{\rho}}$ n'ont pas le type adéquat.

Cette remarque nous incite à étendre notre classe de courants résiduels, une fois les pondérations $\underline{p}$ et $\underline{\rho}$ choisies, en en attachant un à toute sous-famille ordonnée $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_r}\}$ extraite de la famille $\{f_1, \dots, f_p\}$, auquel cas la restriction $p \leq n$ n'a plus lieu d'être et on l'oublie. Étant donnée une telle sous-famille, de cardinal r , on définit un $(0, r)$ -courant en posant

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{\varphi}{f_{i_1}, \dots, f_{i_r}} \right]^{\underline{q}, \underline{\rho}} &:= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}}{(2i\pi\eta)^r} \times \\ &\times \int_{\rho_1^2 |f_1|^{2q_1} + \dots + \rho_p^2 |f_p|^{2q_p} = \eta} \left(\prod_{k=1}^r f_{i_k}^{q_{i_k}-1} \right) \left(\sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \rho_{i_k}^2 \overline{f_{i_k}^{q_{i_k}}} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^r \overline{\partial} [\rho_{i_l}^2 \overline{f_{i_l}^{q_{i_l}}}] \right) \wedge \varphi \end{aligned}$$

Ces courants certes ne sont plus $\overline{\partial}$ -fermés, mais satisfont toujours cette propriété qu'ont les courants de Coleff-Herrera d'être annulés par toute fonction antiholomorphe de U s'annulant sur $V(f)$. De plus, ils sont (éventuellement) non triviaux uniquement si $\text{codim}(V(f)) \leq r \leq \inf(n, p)$ et le courant correspondant à une sous-famille de cardinal r est annulé par toute fonction holomorphe dans U et appartenant localement à la clôture intégrale de I^r . Enfin, convenablement combinés (dans leur ensemble) avec les mineurs de la matrice jacobienne, ils génèrent des courants positifs fermés $[V(f)]_r^{\underline{p}, \underline{\rho}}$, $\text{codim}(V(f)) \leq r \leq \inf(n, p)$, de types respectifs (r, r) , définis par

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}^{(n-r, n-r)}(U), \\ [V(f)]_r^{\underline{p}, \underline{\rho}}(\varphi) := \frac{1}{q_1 \cdots q_p} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p} \left(\prod_{l=1}^r q_{i_l} \right) \text{Res} \left[\frac{\varphi}{f_{i_1}, \dots, f_{i_r}} \right]^{\underline{q}, \underline{\rho}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pour la preuve de tous ces résultats, on se reportera à [5].

3 Quelques versions infinitésimales de la formule de Cauchy-Weil

Comme on le sait (pour une présentation des formules ci-dessous dans le cadre classique et le pont entre elles et les formules de Bochner-Martinelli, voir [16]), étant données $p \geq n$ fonctions $f_1, \dots, f_p$ au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, définissant un idéal $\mathcal{M}$ -primaire dans ${}_n\mathcal{O}$, et $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ dans $]0, \infty[$, suffisamment petits et génériques, on a, pour toute fonction h holomorphe au voisinage du polyèdre de Weil

$$\Pi_f(\vec{\epsilon}) := \{|f_1| < \epsilon_1, \dots, |f_p| < \epsilon_p\},$$

pour tout z à l'intérieur de ce même polyèdre, la formule de représentation intégrale de Cauchy-Weil

$$h(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq p} \int_{\gamma_{i_1, \dots, i_n}(\vec{\epsilon})} h(\zeta) \frac{\bigwedge_{k=1}^n g_{i_k}(z, \zeta)}{\prod_{k=1}^n (f_{i_k}(\zeta) - f_{i_k}(z))}, \quad (3.1)$$

où les formes différentielles

$$g_l(z, \zeta) = \sum_{j=1}^n g_{lj}(z, \zeta) d\zeta_j$$

sont attachées à des systèmes de diviseurs $(g_{lj})_j$ de Oka-Hefer pour les g_l , $l = 1, \dots, p$, de manière à ce que

$$g_l(\zeta) - g_l(z) = \sum_{j=1}^n g_{lj}(z, \zeta)(z_j - \zeta_j), \quad l = 1, \dots, p,$$

et $\gamma_{i_1, \dots, i_n}(\vec{\epsilon})$ représente le sous-ensemble de la frontière de $\Pi_f(\vec{\epsilon})$ défini comme

$$\{\zeta \in \overline{\Pi_f(\vec{\epsilon})}, |f_{i_1}(\zeta)| = \epsilon_1, \dots, |f_{i_n}(\zeta)| = \epsilon_n\},$$

convenablement orienté. C'est là une formule purement analytique, puisque l'intégration sur $\gamma_{i_1, \dots, i_n}$ correspond, notons le, à une intégration sur une portion de la chaîne semi-analytique $\partial\Pi_f(\vec{\epsilon})$. Dans le cas $p = n$, la formule de Cauchy-Weil, que l'on peut penser (en développant le noyau et en supposant que 0 est le seul point de $V(f)$ intérieur à $\Pi_f(\vec{\epsilon})$), sous la forme

$$h(z) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^n} \text{Res} \left[\frac{h(\zeta) g_1(z, \zeta) \wedge \dots \wedge g_n(z, \zeta)}{f_1^{m_1+1}, \dots, f_n^{m_n+1}} \right] f_1(z)^{m_1} \dots f_n(z)^{m_n} \quad (3.2)$$

(développement valide, et ce avec convergence normale, dans $\Pi_f(\vec{\epsilon})$), s'avère être la réalisation analytique d'une formule algébrique beaucoup plus générale [8].

De fait, le cheminement homotopique qui conduit des formules de Bochner-Martinelli aux formules de Cauchy-Weil (voir [16]) suggère, dans le cas $p > n$, que les courants résiduels que nous avons introduits dans la section 2 entrent en jeu dans des formules de nature plus algébrique que la formule de Cauchy-Weil (3.1) tout en étant directement inspirées. Pour énoncer de telles formules, il nous faut élargir la “gamme” de nos courants résiduels pour explorer, non seulement l'idéal $(f_1, \dots, f_p)$, mais encore les idéaux $(f_1^{m_1+1}, \dots, f_p^{m_p+1})$, $\underline{m} \in \mathbb{N}^p$. C'est à cette fin qu'il nous faut introduire les courants

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\begin{array}{c} (\cdot) \\ f_{i_1}, \dots, f_{i_r} \\ f_1, \dots, f_p \end{array} \right]^{q, \underline{m}; \underline{\rho}} &:= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} (|m| + r - 1)!}{(2i\pi)^r m! \eta^{|m|+r}} \times \\ &\times \int_{\rho_1^2 |f_1|^{2q_1} + \dots + \rho_p^2 |f_p|^{2q_p} = \eta} \left(\prod_{j=1}^p \rho_j^{2m_j} |f_j|^{2(q_j-1)m_j} \overline{f_j}^{m_j} \right) \times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^r f_{i_k}^{q_{i_k}-1} \right) \left(\sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \rho_{i_k}^2 \overline{f_{i_k}}^{q_{i_k}} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^r \overline{\partial} [\rho_{i_l}^2 \overline{f_{i_l}}^{q_{i_l}}] \right) \wedge (\cdot), \end{aligned}$$

avec les notations standard

$$|m| = m_1 + \dots + m_p, \quad m! = m_1! \dots m_p!.$$

Alors, si $f_1, \dots, f_p$ sont p germes de fonctions holomorphes en n variables définissant l'origine comme zéro isolé, nous avons, pour une fonction h holomorphe au voisinage de 0, tous les développements possibles

$$h(z) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq p} \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^p} \text{Res} \left[\begin{array}{c} h(\zeta) \bigwedge_{k=1}^n g_{i_k}(z, \zeta) \\ f_{i_1}, \dots, f_{i_n} \\ f_1, \dots, f_p \end{array} \right]^{q, \underline{m}; \underline{\rho}} f_1^{m_1}(z) \dots f_p^{m_p}(z), \quad (3.3)$$

associés aux divers choix des “pondérations” algébrique ou géométrique $\underline{q}$ et $\underline{\rho}$. Ces développements sont tous normalement convergents au voisinage de l'origine. On soulignera la nature algébrique des formules du type (3.3), tenant au fait que les calculs de résidus qui y sont impliqués ne font entrer

en jeu que l'action d'opérateurs différentiels du type $\partial/\partial z^\underline{\nu}$, $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n$. Lorsque $p = n$, tous ces développements se fondent bien sûr en un seul, à savoir le développement (3.2) de Cauchy-Weil (ou Bergman-Weil) classique. Il existe d'autres alternatives pour générer, étant donnée une pondération algébrique $\underline{p}$, d'autres définitions pour les symboles résiduels $\text{Res}[\]^{\underline{p}, \underline{m}}$ ci-dessus; une fois la gamme de ces symboles explicitée, un mécanisme de développement du type Bergman-Weil lui est associé (voir [29], section 3).

Enfin, l'hypothèse que les f_j définissent un idéal $\mathcal{M}$ -primaire peut aussi être levée et l'on construit aisément (voir [29], section 3), si $d = \text{codim } V(f)$, des formes $(\zeta, z) \mapsto \sigma_k(\zeta, z)$, $k = d, \dots, n$, de types respectifs $(n - k, n - k)$ en ζ , $(0, 0)$ en z , à coefficients C^∞ et holomorphes en z dans un voisinage de $V(f) \times \{0\}$, telles que, via les mêmes outils (de fait, les formules de Bochner-Martinelli à poids), on dispose, pour toute fonction holomorphe au voisinage de 0, des développements du type Cauchy-Weil

$$h(z) = \sum_{r=d}^{\min(p,n)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p} \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^p} \text{Res} \left[\begin{array}{c} h(\zeta) \sigma_k(z, \zeta) \wedge \bigwedge_{k=1}^r g_{i_k}(z, \zeta) \\ f_{i_1}, \dots, f_{i_r} \\ f_1, \dots, f_p \end{array} \right]^{\underline{q}, \underline{m}; \underline{\rho}} f^{\underline{m}}(z)$$

avec $f^{\underline{m}}(z) = f_1^{m_1}(z) \cdots f_p^{m_p}(z)$, $\underline{q}$ et $\underline{\rho}$ étant des pondérations algébrique et géométrique arbitraires.

4 Où les idées locales se transposent globalement

Cette idée, consistant à jouer avec les pondérations de nature algébrique ou géométrique pour réaliser (dans le cadre non intersection complète) des objets résiduels distincts, se répercute au niveau de questions algébriques globales, et permet d'établir des résultats dont on espère qu'ils pourraient servir de base pour une nouvelle approche de la théorie de l'intersection arithmétique. Nous avons ainsi le résultat suivant, étendant un résultat classique de Jacobi (voir [14]). Ce théorème admet d'ailleurs aussi un pendant torique (voir [28]).

Théorème 4.1 *Soient $(P_1, \dots, P_n)$ n polynômes de n variables à coefficients complexes, tels qu'il existe des réels $\delta_1, \dots, \delta_n$, ainsi que $R > 0$ et $\gamma > 0$, pour*

lesquels

$$\|z\| \geq R \implies \sum_{j=1}^n \frac{|P_j(z)|}{\|z\|^{\delta_j}} \geq \gamma.$$

Alors, pour tout polynôme Q , on a

$$\deg Q \leq \delta_1 + \dots + \delta_n - n - 1 \implies \operatorname{Res}_{P_1, \dots, P_n} \left[\frac{Q(X) dX_1 \wedge \dots \wedge dX_n}{P_1, \dots, P_n} \right] = 0. \quad (4.1)$$

La preuve de ce résultat repose précisément sur la souplesse que présentent les pondérations. On peut représenter le symbole résiduel figurant dans (4.1), soit sous la forme

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=R} \frac{Q \prod_{j=1}^n |f_j|^{2(q_j-1)} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} q_k \overline{P_k} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \overline{dP_l} \right)}{\left(|P_1|^{2q_1} + \dots + |P_n|^{2q_n} \right)^n} \wedge \bigwedge_{j=1}^n d\zeta_j,$$

où les q_k sont des entiers strictement positifs, soit sous la forme

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{\|\zeta\|=R} \frac{Q \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \rho_k^2 \overline{P_k} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \overline{\partial}[\rho_l^2 \overline{P_l}] \right)}{\left(\rho_1^2 |P_1|^2 + \dots + \rho_n^2 |P_n|^2 \right)^n} \wedge \bigwedge_{j=1}^n d\zeta_j,$$

où ρ est par exemple la pondération géométrique

$$(\rho_1^2, \dots, \rho_n^2) = \left(\frac{1}{(1 + \|\zeta\|^2)^{M+\delta_1}}, \dots, \frac{1}{(1 + \|\zeta\|^2)^{M+\delta_n}} \right),$$

M désignant un entier tel que $M + \delta_k - D_k \geq 0$ pour tout k . Cette somme complète de résidus s'exprime comme l'opposé d'un résidu à l'infini, que l'on représente cette fois par l'action sur une forme $(n, 0)$ -forme C^∞ d'un $(0, n)$ -courant résiduel (du type courant résiduel dans une situation à priori non intersection complète) porté par l'union des supports des composantes à l'infini du cycle défini par les homogénéisés des P_j . La proposition se ramène donc à l'étude des propriétés d'annulation de ce courant résiduel. Les deux approches (pondération algébrique ou géométrique comme ci-dessus) conduisent au même résultat, à savoir la nullité de ce résidu à l'infini dès que le degré de Q n'excède pas $\delta_1 + \dots + \delta_n - n - 1$.

Tandis que la pondération géométrique semble utiliser très fortement des outils analytiques, la pondération algébrique génère un mécanisme (basé sur

le recours au théorème de Lipman-Teissier [23] dans l’anneau local régulier $_{n+1}\mathcal{O}$ et à la loi de transformation) que l’on peut adapter (c’est ce qui a été fait sous certaines restrictions dans [3], restrictions que M. Hickel [17] a levé très récemment) au cadre plus général où les polynômes sont à coefficients dans un corps de caractéristique quelconque. De là proviennent les résultats évoqués dans l’introduction et dont le corollaire le plus marquant est sans doute la solution explicite (et économique cette fois du point de vue non seulement géométrique, mais arithmétique) du Nullstellensatz algébrique avec entrées dans un anneau équipé d’une taille.

Théorème 4.2 [3] *Soit $\mathbf{A}$ un anneau intègre factoriel infini (de corps des fractions $\mathbf{K}$), équipé d’une taille logarithmique h au sens de Mahler. Étant donnés des polynômes $P_1, \dots, P_N$ de $\mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ de degrés au plus D , de taille au plus H , engendrant l’idéal (1) dans $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$, il existe $a \in \mathbf{A}$, et des polynômes $Q_1, \dots, Q_N$ de degrés au plus $\kappa_n D^n$ tels que*

$$a = P_1 Q_1 + \dots + P_N Q_N \quad (4.2)$$

et

$$\max(h(a), h(Q_j)) \leq \tilde{\kappa}(n) D^{\mathbf{O}(n)} (H + D + \log[ND]).$$

La théorie arithmétique de l’intersection permettait jusque là d’estimer la taille d’un dénominateur a dans une identité de Bézout du type (4.2). Pour-suivant en effet les idées inspirées du travail d’Arakelov [2, 19], G. Faltings [12], puis H. Gillet, C. Soulé et J. B. Bost [13, 7], ont introduit une notion de hauteur arithmétique pour les cycles du schéma projectif $\text{Proj}(\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n])$; la construction de la hauteur va de pair avec la construction d’une théorie arithmétique de l’intersection, où les objets sont les paires (Z, G_Z) constituées d’une part d’un cycle arithmétique Z de codimension pure r , d’autre part, d’un courant G_Z de type $(r-1, r-1)$ dans $\mathbf{P}^n$ (donc un être cette fois analytique), courant de Green pour le cycle analytique complexe $Z = Z(\mathbb{C})$, c’est à dire tel que $dd^c G_Z + [Z]$ soit une forme lisse. Nous ne donnerons pas ici le détail de la construction du produit d’intersection ni la définition de la hauteur et renvoyons à [13, 7] (on pourra aussi consulter l’introduction de [4] pour une présentation succincte). La règle majeure à laquelle obéit la hauteur par rapport à l’opération d’intersection est que l’on a un théorème de Bézout cette fois arithmétique, et non plus géométrique

$$h(Z_1 \bullet Z_2) \leq h(Z_1) \deg Z_2 + h(Z_2) \deg Z_1 + \kappa(\dim Z_1, \dim Z_2) \deg Z_1 \deg Z_2.$$

Cette inégalité permet de prévoir que si $P_1, \dots, P_{n+1}$ sont par exemple des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, sans zéros communs dans $\mathbb{C}^n$, et tels que les cycles arithmétiques induits par leurs homogénéisés dans $\text{Proj}(\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n])$ soient de hauteur arithmétique au plus $\mathcal{H}$, il est possible de résoudre l'identité de Bézout (4.2) avec un dénominateur a de taille logarithmique contrôlée par

$$\kappa(n)\mathcal{H}D_1 \cdots D_{n+1} \left(\frac{1}{\mathcal{H}} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{D_j} \right).$$

Si le maniement du calcul résiduel ne permet pas (voir théorème 4.2) de rendre compte d'un résultat aussi précis en ce qui concerne le dénominateur a , il fournit –ce que ne donne pas la théorie de l'intersection arithmétique de l'intersection telle que l'avons très brièvement présenté– un moyen de contrôler la taille des numérateurs dans (4.2), c'est à dire la taille des Q_j , soit le mécanisme non plus d'intersection, mais de division, et ce au niveau arithmétique.

Il fournit aussi, et c'est là un fait plus nouveau ([4, 5]), un moyen de calculer, étant donnés N polynômes homogènes $P_1, \dots, P_N$ en $n + 1$ variables $(X_0, \dots, X_n)$ définissant une sous variété algébrique de codimension pure r dans $\mathbf{P}^n$, un courant de Green normalisé pour le cycle effectif $[Z]$ correspondant, c'est à dire un $(r - 1, r - 1)$ -courant lisse hors du support de ce cycle, et tel que

$$dd^c G + [Z] = (\deg Z)\omega^r,$$

où ω désigne la forme volume dans $\mathbf{P}^n$. Ce courant se calcule comme la valeur du résidu en zéro d'une certaine fonction ζ , dont l'expression est explicite en termes des polynômes $P_1, \dots, P_N$ définissant le cycle. Dans le cas simple où $N \leq n$ et les P_j sont de même degré D et définissent une intersection complète dans $\mathbf{P}^n$, cette fonction ζ est simple à expliciter; il suit en effet facilement de l'utilisation d'une formule classique due à H. Levine [20, 15], que l'on peut prendre ([5], proposition 3.3) comme fonction ζ la fonction

$$\lambda \mapsto -\|P\|_{\underline{\rho}}^{2\lambda} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (dd^c \log \|P\|_{\underline{\rho}}^2)^k \wedge (D\omega)^{N-1-k} \right),$$

où

$$\|P(\zeta)\|_{\underline{\rho}}^2 := \sum_{j=1}^N \frac{|P_j(\zeta)|^2}{\|\zeta\|^{2D}}.$$

Le cas non-intersection complète est plus complexe et est intimement lié aux constructions de la section 2. Pour simplifier, on supposera encore que $P_1, \dots, P_N$ ont le même degré D et que $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_r$ sont des combinaisons linéaires génériques des P_j définissant une intersection complète dans $\mathbf{P}^n$. Le courant $[Z]$ peut alors se réaliser comme un courant du type $[V(F)]_r^{\underline{q}, \underline{\rho}}$ (comme dans la section 2), où (exprimés en coordonnées homogènes)

$$\begin{aligned} F &= (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_r, P_1, \dots, P_N), \\ \underline{q} &= (1, \dots, 1, M, \dots, M) \\ \underline{\rho} &= (\|\zeta\|^{-2D}, \dots, \|\zeta\|^{-2D}, \|\zeta\|^{-2MD}, \dots, \|\zeta\|^{-2MD}), \end{aligned}$$

avec $M > rD^r$, la pondération géométrique étant là pour assurer que le courant est bien défini comme un courant global sur $\mathbf{P}^n$, la pondération algébrique pour que les contributions des r premiers polynômes de la liste (à savoir les $\tilde{P}_j$) aient un rôle privilégié. Le courant $[Z]$ se réalise donc comme la valeur en zéro d'une certaine fonction $\zeta = \zeta_{[Z]}$ particulière. Notons que cette fonction s'exprime en termes des P_j . Pour construire à partir de là un courant de Green normalisé, voici comment l'on procède: on introduit la fonction méromorphe de $\mathbb{C}$ dans $'\mathcal{D}^{(n,n)}(\mathbf{P}^{2n+1})$ définie par

$$\begin{aligned} L(\xi) &= \frac{-1}{\xi} \times \\ &\times \left(\frac{\|x - y\|^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2} \right)^\xi \left(\sum_{k=0}^n (dd^c \log \|x - y\|^2)^k \wedge (dd^c \log(\|x\|^2 + \|y\|^2))^{n-k} \right) \end{aligned}$$

(approche méromorphe du courant de Green correspondant à la diagonale de $\mathbf{P}^{2n+1}$). On relève cette fonction en une fonction $\xi \mapsto \Upsilon_\xi$ méromorphe de $\mathbb{C}$ dans $'\mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n)$ par

$$\Upsilon_\xi(x, y) = \int_{\beta \in \mathbf{P}^1} L_\xi(\beta_0 x, \beta_1 y).$$

Le résidu en $\lambda = 0$ de la fonction méromorphe de $\mathbb{C}$ dans $'\mathcal{D}^{(r-1,r-1)}(\mathbf{P}^n)$ qui à λ associe

$$\lambda^2 \int_{\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n} \zeta_{[Z]}(\lambda^2)[y] \wedge \Upsilon_\lambda(x, y)$$

est un courant de Green normalisé pour Z (voir [5], théorème 3.2). Une formule close pour la hauteur arithmétique du cycle en résulte.

5 Conclusion

Les résultats d'effectivité en géométrie motivent, dès qu'ils concernent non seulement des questions de nature géométrique, mais encore arithmétique, l'utilisation des symboles résiduels. La souplesse de l'analyse permet (tout au moins en ce qui concerne la réalisation effective de boîtes noires telles que le recours au théorème de Skoda) d'envisager, comme on l'a vu dans la section 3, la situation non-intersection complète; or, dans cette situation, il s'avère pour l'instant difficile d'exploiter algébriquement le calcul résiduel sous l'angle opérationnel. Ce sont les mêmes outils qui permettent la construction de courants de Green, et par la même donnent la possibilité d'exprimer directement en termes des générateurs de l'idéal qui le définissent, la contribution analytique à la hauteur d'un cycle arithmétique $\mathcal{Z}$ tel que $\mathcal{Z}(\mathbb{C})$ soit de dimension pure, cette hauteur étant pour l'instant celle définie dans le cadre de la théorie arithmétique de l'intersection. Ces quelques remarques laissent augurer d'une théorie arithmétique de l'intersection-division où de tels objets, directement issus de l'analyse, seraient appelés à jouer un rôle intéressant.

Références

- [1] L. Aizenberg, A. P. Yuzhakov, *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis*, Transl. Amer. Math. Soc 58, American Mathematical Society, Providence, 1979.
- [2] S. J. Arakelov, Intersection theory of divisors on an arithmetic surface, Math USSR Izv. 8, 1974, 1167-1180.
- [3] C. A. Berenstein, A. Yger, Residue Calculus and effective Nullstellensatz, American Journal of Mathematics, 121, 4, 1999, 723-796.
- [4] C. A. Berenstein, A. Yger, Green currents and analytic continuation, Journal d'Analyse Mathématique 75, 1998, 1-50.
- [5] C. A. Berenstein, A. Yger, Residue currents, integration currents in the non complete intersection case, math.e-prints CV/9905051.
- [6] J. E. Björk, Residue currents and $\mathcal{D}$ -modules on complex manifolds, *preprint*, Stockholm, 1996.
- [7] J.-B. Bost, H. Gillet, and C. Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, J. Amer. Math. Soc. 7, 1994, 903-1027.

- [8] J. Y. Boyer, M. Hickel, Extension dans un cadre algébrique d’une formule de Weil, *Manuscripta Math.* 98, 1999, 1-29.
- [9] J. Briançon, H. Skoda, Sur la clôture intégrale d’un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbf{C}^n$, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, série A*, 278, 1974, 949-951.
- [10] N. Coleff, M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Springer-Verlag (Lecture Notes in Math. 633), Berlin, New-York, 1978.
- [11] E. Cygan, T. Krasinski, P. Tworzewski, Separation of algebraic sets and the Lojasiewicz exponent of a polynomial mapping, *Inventiones math.* 136, 1, 1999, 75-87.
- [12] G. Faltings, Diophantine approximation on Abelian varieties, *Ann. of Math.* (2) 133, 1991, 549-576.
- [13] H. Gillet, C. Soulé, Arithmetic intersection theory, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 72, 1990, 93-74.
- [14] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Interscience, New York, 1978.
- [15] P. Griffiths, J. King, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math.* 130, 1973, 145-220.
- [16] R. Harvey, Integral formulae connected by Dolbeault’s isomorphism, *Rice University Studies* 56, 2, 1969, 77-97.
- [17] M. Hickel, communication orale, Bordeaux 1998.
- [18] J. Kollár, Effective Nullstellensatz, preprint, **math.ag**/9805091.
- [19] S. Lang, *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1988.
- [20] H. Levine, A theorem on holomorphic mappings into complex projective space, *Ann. of Math.* 71 (1960), 529-535.
- [21] J. Lipman, *Residues and traces of differential forms via Hochschild homology*, Contemporary Mathematics 61, American Mathematical Society, Providence, 1987.
- [22] J. Lipman, A. Sathaye, Jacobian ideals and a theorem of Briançon-Skoda, *Michigan Math Journal* 28, 1981, 199-222.
- [23] J. Lipman, B. Teissier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, *Michigan Math. J.* 28, 1981, 97-116.

- [24] S. Lojasiewicz, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser, Basel, 1991.
- [25] M. Passare, A. Tsikh, Defining the residue of a complete intersection, dans *Complex variables, harmonic analysis and applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 347, Addison Wesley Longman, Harlow, 1996.
- [26] M. Passare, A. Tsikh, A. Yger, Residue currents of the Bochner-Martinelli type, Publicacions Matemàtiques (Barcelona, SP), to appear.
- [27] P. Tworzewski, Intersection theory in complex analytic geometry, Ann. Polon. Math. 62, 1995, 177-191.
- [28] A. Vidras, A. Yger, On some generalizations of Jacobi's residue formula, math.e-prints AG/9905044.
- [29] A. Yger, Aspects opérationnels de la théorie des résidus hors du cadre intersection complète, dans *Actes du Colloque de Géométrie Analytique Complexe*, Paris 1998 (à paraître).