

## COURS SM 411

### Devoir Surveillé 1, Vendredi 12 Mars

Durée: 1 heure 20 mn

*Documents non autorisés*

**Exercice 1.** Soit  $R = [a, b] \times [c, d]$  un rectangle du plan s'écrivant comme union de pavés  $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ ,  $k = 1, \dots, N$ , tels que les intérieurs  $]a_k, b_k[ \times ]c_k, d_k[$  soient deux à deux disjoints. On suppose que chaque pavé  $R_k$  est tel que l'un de ses côtés au moins a pour longueur un nombre entier. En calculant de deux manières différentes l'intégrale sur  $R$  de la fonction

$$(x, y) \rightarrow \exp(2i\pi(x + y)),$$

montrer que l'un au moins des côtés de  $R$  a pour longueur un nombre entier.

**Exercice 2.**

**a.** Rappeler comment la sphère pleine de  $\mathbb{R}^3$  de rayon  $R$  définie par

$$B(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

est paramétrée en fonction de  $r$  et des angles d'Euler  $\theta$  et  $\varphi$ .

**b.** Calculer, en utilisant le paramétrage de  $B(R)$  introduit au **a** et la formule de changement de variables, l'intégrale

$$I = \iiint_{B(R)} z \cos(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

**Exercice 3.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres strictement positifs et  $E$  le domaine plan défini par

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Calculer l'aire de  $E$ , par exemple en utilisant la formule de Green-Riemann.

**Exercice 4.** Calculer, si  $a > 0$ , la longueur de l'arc de chaînette

$$y = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}, \quad x \in [0, b].$$