UE Hilbert-Fourier, Sujets d'oral

Ces sujets doivent être traités en binôme, illustrés par des exemples (ou contre-exemples si nécessaire), des applications¹, comme si vous deviez présenter le sujet devant une classe ou un auditoire *a priori* non spécialiste. Chaque sujet doit vous donner l'opportunité de travailler à fond le cours. Exploitez les guides dans le contrat sous Ulysse.

Autour du volet « Hilbert » du cours.

1. Le théorème de projection sur une partie convexe fermée d'un espace de Hilbert ; exemples, applications (par exemple en optimisation).
2. L'adjoint d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert dans lui-même : sa définition, ses propriétés, son intérêt pratique sur des exemples (*shift*, opérateurs intégraux à noyau, *etc.*)
3. Le théorème de dualité dans le cadre des espaces de Hilbert et ses applications.
4. Itération de projections orthogonales et application à la résolution de systèmes d'équations affines de manière approchée (méthode de Kaczmarz, voir le polycopié, Proposition 1.16 et section 2.6.1).
5. La « traque » d'une information suivant un algorithme « glouton » (par exemple le *matching*, section 1.12 du polycopié) : le principe, comment les projections orthogonales jouent un rôle, l'intérêt, *etc.*
6. La base de Haar dans $L^2(\mathbb{R})$ (*cf.* le problème 1 dans le guide d'activités 4 sous Ulysse). Applications au traitement de l'information.
7. Comment réaliser des systèmes biorthogonaux ? (voir le polycopié, Proposition 1.17). Exemples et intérêt pratique.
8. Projection orthogonale et conditionnement en probabilités (voir le polycopié, fin de la section 1.4), ainsi que votre cours de Probabilités.
9. Norme de Hilbert-Schmidt, opérateurs de Hilbert-Schmidt (voir les exercices ou problèmes du guide d'activités 4 sous Ulysse, ou ceux faits en TD).
10. Quelques exemples de bases hilbertiennes données par des systèmes de fonctions polynomiales (dans les espaces $L^2_{\mathbb{C}}(I, \omega(t) dt)$, I désignant un intervalle de $\mathbb{R}$ et ω un poids).

Autour du volet « Fourier » du cours.

11. La transformation de Fourier sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$: intérêt pratique (du point de vue analytique, algébrique, arithmétique) ; la multiplication rapide des polynômes ; pourquoi les puissances de 2 ?
12. La convolution dans $l^1(\mathbb{Z})$ ou $l^2(\mathbb{Z})$: pourquoi est-ce une opération omniprésente ? Qu'est-ce que permet de faire la transformation de Fourier par rapport à cette opération ?
13. Les noyaux de Dirichlet et de Fejér comparés. Application aux théorèmes de Jordan-Dirichlet et de Fejér (cadre local, cadre $L^1(\mathbb{T})$, cadre $C^0(\mathbb{T})$). Le phénomène de Gibbs.
14. Qu'est-ce qu'un filtre stationnaire ? Exemples et intérêt pratique.
15. Séries de Fourier et propagation de la chaleur (retour aux sources ...).
16. La transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ (dans le cadre L^1). Formule d'inversion dans le cadre L^1 .
17. La formule sommatoire de Poisson : applications en théorie des nombres ; resommation de séries de fonctions ; exemples.
18. La transformation de Fourier et le théorème limite central en probabilités (section 2.4.4 du polycopié et cours de Probabilités).
19. La transformation de Fourier en physique : relation avec l'optique (diffraction), principe d'incertitude de Heisenberg (sections 2.4.2, 2.4.4 et 2.5.3 du polycopié).
20. Le théorème de Shannon-Nyquist et son intérêt (section 2.5.4 du polycopié, voir aussi le texte de l'examen 2011-2012).
21. La transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et le principe du CAT-scanner (section 2.6.1 du polycopié).

1. Vraiment important dans cette UE ! Y compris, si cela est possible, hors du champ strictement mathématique (il n'y a aucune honte à exploiter intelligemment **internet** et par exemple **wikipedia** pour trouver des pistes).