

Propositions de sujets de TER (Alain Yger)

I. Théorie des distributions et Analyse Complexe. Le but du TER est d'appréhender l'importance du concept de distribution (*resp.* de courant) en analyse (*resp.* géométrie) complexe. On envisagera deux exemples :

- le fait que l'on puisse caractériser les singularités isolées inessentiels par le fait que ce soient celles que la théorie des distributions permet d'« effacer » ;
- la formule de Lelong-Poincaré, que l'on envisagera pour un diviseur équipé d'une métrique hermitienne sur une surface de Riemann (avec une première initiation au principe de la théorie d'Arakelov en géométrie arithmétique). On introduira certains aspects de la théorie du potentiel en dimension 1 (fonctions et courants de Green).

Ce sujet traite de questions transverses aux trois UE : Analyse Complexe, Analyse spectrale et distributions, Géométrie (surfaces de Riemann). Certains aspects renvoient aussi à l'UE de Théorie des nombres. Il s'agit d'un sujet très transverse.

Références :

[1] S. Lang, Introduction to Arakelov theory, 1988 (chapitre 1).

[2] A. Yger, Analyse Complexe et Distributions, Ellipses 2001.

[3] A. Yger, cours d'Analyse Complexe (Automne 2011) et Distributions (Printemps 2010) :

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursAC-2011.pdf>

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht836.pdf>

[3] A. Hénaut et A. Yger, Éléments de Géométrie, Ellipses 2004.

II. Séries de Dirichlet, fonction ζ de Riemann. Les séries de Dirichlet sont les séries de fonctions holomorphes de la forme $\sum_k a_k e^{-\lambda_k z}$, où $a_k \in \mathbb{C}$ et $(\lambda_k)_k$ désigne une suite strictement croissante de réels positifs. L'exemple de la fonction de Riemann $\sum_{k \geq 1} k^{-z}$ en constitue une importante illustration. Ce TER sera l'occasion à la fois d'une exploration des diverses notions d'abscisse de convergence pour une telle série de Dirichlet (abscisse de convergence, d'absolue convergence, d'holomorphicité) et d'une « promenade » dans le monde fascinant de la fonction zêta (ses relations avec Γ , les diverses manières de la prolonger analytiquement, le sens mystérieux de la « valeur numérique » que les physiciens attribuent par exemple à $1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots$ lorsque $\alpha \neq -1$, la transposition de la fonction zêta au cadre de la dynamique, etc.). Ce sujet est aussi transverse avec l'UE de Théorie des nombres (volet analytique).

Références :

[1] C.A. Berenstein et R. Gay, Complex variables, an introduction, Springer GTM 125, 1991.

[2] E. C. Titchmarsh, the Theory of the Riemann zeta function, Oxford University Press, 1967.

[3] V. Petkov et A. Yger, Singularités analytiques des séries de Dirichlet, DEA (Bordeaux 2006) :

<http://www.math.u-bordeaux.fr/~yger/dirichlet.pdf>

III. La méthode du col et la phase stationnaire. Le choix d'un cheminement judicieux privilégiant les accidents de relief permet l'étude du comportement asymptotique de certaines intégrales fonctions d'un paramètre, l'intégration portant sur un chemin continu du plan complexe. C'est la méthode du col, fondée sur le principe de la déformation de contours *via* le théorème des résidus. L'objet du TER est de présenter la méthode sur des exemples (par exemple celui de la phase stationnaire) et, si possible, d'en étudier des applications simples en théorie analytique des nombres. Ce sujet est donc transverse avec l'UE de Théorie des nombres (volet analytique).

Références : J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, 1997.

IV. Les fonctions elliptiques de Weierstraß. Les fonctions elliptiques $\wp$ et $\wp'$ de Weierstraß attachées à un réseau Λ de $\mathbb{C}$ sont des exemples de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et Λ -périodiques. Elles jouent le rôle que jouent les fonctions trigonométriques $\cos$ et $-\sin = \cos'$, fonctions qui, elles, ne présentent qu'une périodicité unidirectionnelle et non bidirectionnelle. On étudiera dans ce TER ces fonctions $\wp$ et $\wp'$, leur rôle dans la paramétrisation des cubiques lisses (et non plus des coniques comme c'était le cas pour $\cos$ et $\sin$), les formes différentielles qui leur sont attachées sur les surfaces $\mathbb{C}/\Lambda$, etc. Ce sujet transverse combine Analyse complexe et Géométrie.

Références :

[1] C.A. Berenstein et R. Gay, Complex variables, an introduction, Springer GTM 125, 1991.

[2] A. Yger, cours d'Analyse Complexe (Automne 2011) :

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursAC-2011.pdf>

[3] A. Hénaut et A. Yger, Éléments de géométrie, Ellipses, 2004.

V. Autour du théorème de Louis de Branges. La conjecture de Bieberbach fut proposée en 1907 par Ludwig Bieberbach et seulement résolue en 1985 par Louis de Branges : si f est une fonction holomorphe injective dans $D(0,1)$, normalisée par $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors $f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^k$ dans $D(0,1)$, avec, pour tout k , $|a_k| \leq k$. L'objet du TER est de présenter une preuve de $|a_2| \leq 2$ (théorème de Koebe), puis de $|a_3| \leq 3$ (au travers de la notion de « déchirure » et de l'équation introduite par Charles Loewner). On esquissera (si le temps le permet) le programme d'attaque proposé par de Branges. Ce TER sera aussi l'occasion d'une démarche bibliographique autour de l'histoire de la résolution de la conjecture de Bieberbach et des concepts que les diverses tentatives de résolution ont véhiculé au fil des années. Ce sujet de TER, même s'il est d'obédience plus analytique, combine les UE d'Analyse complexe et de Géométrie. Il s'agit d'un sujet transverse.

Références :

- [1] C.A. Berenstein et R. Gay, Complex variables, an introduction, GTM 125, Springer.
- [2] A. Yger, Analyse Complexe et Distributions, Ellipses 2001.
- [3] A. Yger, cours d'Analyse Complexe (Automne 2011)

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursAC-2011.pdf>

- [4] Mémoire de Master de S. Leurent et S. Pocchiola (Orsay, 2006, sous la direction de W. Werner) :

<http://www.fimfa.ens.fr/fimfa/IMG/File/exposes/2006/leurent-pocchiola.pdf>