

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Formes différentielles dans le plan | 1 |
| 1.1 | Formes différentielles dans \mathbb{R}^2 d'ordre 0 ou 1 | 1 |
| 1.2 | Différentiation des 0-formes | 2 |
| 1.3 | Formes d'ordre 2 ; différentiation des 1-formes | 3 |
| 1.4 | Intégration d'une 1-forme sur un chemin C^1 par morceaux | 5 |
| 1.5 | 1-formes exactes, 1-formes fermées | 7 |
| 1.6 | Le lemme de Poincaré | 8 |
| 1.7 | Intégration d'une 2-forme sur une 2-chaîne | 11 |
| 1.8 | La formule de Cauchy-Pompeiu | 15 |
| 1.9 | La formule de Green-Riemann | 17 |
| 1.10 | Solutions des exercices de compréhension | 19 |
| 1.11 | Quelques sujets de problèmes | 26 |
| 1.11.1 | Comment une formule analytique peut se substituer à un algorithme algébrique | 26 |
| 1.11.2 | Le théorème du point fixe de Brouwer dans le disque unité | 27 |
| 2 | Holomorphie, analyticité, harmonicité | 29 |
| 2.1 | Fonctions holomorphes | 29 |
| 2.2 | Fonctions analytiques dans un ouvert de \mathbb{R}^2 | 33 |
| 2.3 | Rappels concernant les séries entières | 36 |
| 2.4 | Le lien entre holomorphie et analyticité | 42 |
| 2.5 | Les inégalités de Cauchy | 48 |
| 2.6 | Suites et séries de fonctions holomorphes | 51 |
| 2.7 | Le principe des zéros isolés | 59 |
| 2.8 | Le théorème de l'image ouverte | 63 |
| 2.9 | Le principe du maximum | 66 |
| 2.10 | Primitives de fonctions holomorphes | 72 |
| 2.10.1 | Primitive d'une fonction analytique dans un disque | 72 |
| 2.10.2 | Le théorème de Morera et ses conséquences | 72 |
| 2.10.3 | Primitive d'une fonction holomorphe dans un ouvert étoilé | 78 |
| 2.10.4 | Le théorème de Cauchy-Goursat | 80 |
| 2.11 | Fonctions harmoniques | 82 |
| 2.11.1 | L'opérateur laplacien | 82 |
| 2.11.2 | La relation entre harmonicité et holomorphie | 83 |
| 2.11.3 | Formule de représentation intégrale de Poisson | 85 |
| 2.11.4 | Le problème de Dirichlet pour un disque | 87 |
| 2.11.5 | La formule de Green-Ostrogradski | 90 |
| 2.12 | Solutions des exercices de compréhension | 94 |
| 2.12.1 | Exercices relatifs à la section 2.1 | 94 |
| 2.12.2 | Exercices de la section 2.2 | 99 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.12.3 | Exercices relatifs aux sections 2.3 à 2.5 | 102 |
| 2.12.4 | Exercices relatifs à la section 2.6 | 110 |
| 2.12.5 | Exercices relatifs à la section 2.7 | 115 |
| 2.12.6 | Un sujet de problème : autour du théorème de Cramer | 116 |
| 2.12.7 | Un sujet de problème : autour de la transformation de Borel | 118 |
| 2.12.8 | Exercices relatifs aux sections 2.8 et 2.9 | 119 |
| 2.12.9 | Exercices relatifs à la section 2.10 | 125 |
| 2.12.10 | Un sujet de problème : le principe du minimum | 133 |
| 2.12.11 | Exercices relatifs à la section 2.11 | 136 |
| 2.12.12 | Un sujet de problème : la formule de Jensen | 143 |
| 3 | Initiation à la théorie des distributions | 147 |
| 3.1 | Espace des fonctions-test dans un ouvert de \mathbb{R}^d | 147 |
| 3.2 | Notion de distribution (définie) sur un ouvert de \mathbb{R}^d | 150 |
| 3.3 | Exemples ; modélisation des phénomènes | 152 |
| 3.4 | Suites de distributions et régularisation | 158 |
| 3.5 | Le support d'une distribution | 162 |
| 3.5.1 | Définition du support, exemples | 162 |
| 3.5.2 | Distributions à support compact, exemples | 164 |
| 3.6 | Opérations sur les distributions | 170 |
| 3.6.1 | La dérivation | 170 |
| 3.6.2 | La multiplication par une fonction C^∞ | 173 |
| 3.6.3 | Le produit tensoriel | 175 |
| 3.7 | La formule des sauts | 178 |
| 3.8 | Solutions fondamentales (et exemples $\partial/\partial\bar{z}$ et Δ) | 181 |
| 3.9 | La convolution | 185 |
| 3.9.1 | Clause de définition en termes de supports | 187 |
| 3.9.2 | Les algèbres de convolution $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et \mathcal{D}'_+ | 191 |
| 3.9.3 | Une relecture des formules de Cauchy-Pompeïu ; notion d'hypo-ellipticité | 193 |
| 3.10 | Les distributions tempérées | 201 |
| 3.10.1 | L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et les signaux gaussiens | 201 |
| 3.10.2 | L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ | 206 |
| 3.10.3 | Le spectre d'une distribution tempérée ; le cas de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ | 209 |
| 3.10.4 | Convolution et prise de spectre, exemples | 214 |
| 3.10.5 | Distributions périodiques et formule sommatoire de Poisson | 217 |
| 3.10.6 | Distributions à spectre borné ; échantillonnage | 221 |
| 3.11 | Solutions des exercices de compréhension | 225 |
| 3.11.1 | Exercices relatifs aux sections 3.1 et 3.2 | 225 |
| 3.11.2 | Exercices relatifs aux sections 3.3 à 3.5 | 229 |
| 3.11.3 | Exercices relatifs aux sections 3.6 à 3.8 | 239 |
| 3.11.4 | Exercices relatifs à la section 3.9 | 247 |
| 3.11.5 | Autour du théorème de Runge (thème de problème) | 254 |
| 3.11.6 | Exercices relatifs à la section 3.10 | 256 |
| 4 | Topologie dans le champ complexe | 265 |
| 4.1 | Chemins continus dans \mathbb{R}^2 | 265 |
| 4.1.1 | Notion de chemin continu ; opérations simples | 265 |
| 4.1.2 | Primitives d'une forme fermée le long d'un chemin continu | 266 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.1.3 | Homotopie entre chemins continus ou lacets | 273 |
| 4.1.4 | Notion de simple connexité | 277 |
| 4.2 | Variation de l'argument | 282 |
| 4.2.1 | Relèvement d'un chemin continu de \mathbb{C}^* | 282 |
| 4.2.2 | Degré d'un lacet de \mathbb{C}^* | 285 |
| 4.2.3 | Indice d'un lacet par rapport à un point | 289 |
| 4.2.4 | Le théorème de Rouché | 294 |
| 4.2.5 | Bilan total de la variation de l'argument | 299 |
| 4.3 | Singularités isolées et résidus | 300 |
| 4.3.1 | Développement en série de Laurent d'une fonction holomorphe dans une couronne | 300 |
| 4.3.2 | Résidu d'une forme holomorphe en une singularité isolée | 304 |
| 4.3.3 | La notion d'infini dans le champ complexe (deux aspects) | 306 |
| 4.3.4 | La hiérarchie des singularités isolées | 308 |
| 4.3.5 | Fonctions méromorphes, calculs de résidus | 314 |
| 4.3.6 | Notion de résidu à l'infini | 321 |
| 4.4 | Le théorème des résidus et ses applications | 322 |
| 4.4.1 | Une version homotopique du théorème des résidus | 322 |
| 4.4.2 | La formule des résidus (version Green-Riemann) | 327 |
| 4.4.3 | Résidus et division | 330 |
| 4.4.4 | Les lemmes pratiques du type Jordan | 332 |
| 4.4.5 | Une courte digression à propos du logarithme complexe | 338 |
| 4.4.6 | Intégrales mêlant puissances, logarithmes, fractions, | 340 |
| 4.5 | Produits infinis, dérivées logarithmiques | 346 |
| 4.6 | Univalence et conformité | 350 |
| 4.6.1 | La notion de conformité | 350 |
| 4.6.2 | Les homographies | 351 |
| 4.6.3 | La notion d'univalence ; le théorème d'Hurwitz | 353 |
| 4.6.4 | Le théorème de Riemann | 356 |
| 4.7 | Solutions des exercices de compréhension | 360 |
| 4.7.1 | Exercices relatifs à la section 4.1 | 360 |
| 4.7.2 | Exercices relatifs à la section 4.2 | 361 |
| 4.7.3 | Exercices relatifs à la section 4.3 | 371 |
| 4.7.4 | Un thème de problème : autour des fonctions de Bessel | 375 |
| 4.7.5 | Exercices relatifs à la section 4.4 | 377 |
| 4.7.6 | Exercices relatifs à la section 4.5 | 382 |
| 4.7.7 | Thème de problème : autour des nombres premiers | 384 |
| 4.7.8 | Exercices relatifs à la section 4.6 | 385 |