

# Comptage de points sur les courbes elliptiques en petite caractéristique

B. Allombert

IMB  
CNRS/Université Bordeaux 1

6/12/2012

# Lignes directrices

Présentation du problème

Principes généraux

Principe de l'algorithme de Satoh

Algorithme de Harley

Calcul de la norme

## Présentation du problème

Soit  $E$  une courbe elliptique ordinaire définie sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$  pour  $q = p^n$  et donnée pour  $(a, b) \in \mathbb{F}_q^2$  par

$$E_{a,b} : \quad y^2 = x^3 + ax + b \quad p \geq 5$$

$$E_{a,b} : \quad y^2 = x^3 + ax^2 + b \quad p = 3$$

$$E_{a,b} : \quad y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b \quad p = 2$$

On note  $E_{a,b}(\mathbb{F}_q) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_q^2 \mid E_{a,b}\} \cup \{\infty\}$

But : Un algorithme qui étant donné  $q$ ,  $a$  et  $b$  détermine le cardinal  $|E_{a,b}(\mathbb{F}_q)|$  en temps polynomial en  $\log(q)$ .

## Endomorphisme de Frobenius $\varphi$

Le Frobenius  $\varphi \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_q)$

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{F}}_p & \longrightarrow & \overline{\mathbb{F}}_p \\ x & \mapsto & x^q \end{array} \right.$$

détermine le Frobenius sur  $E$  :

$$\varphi_E \left| \begin{array}{ccc} E(\overline{\mathbb{F}}_p) & \longrightarrow & E(\overline{\mathbb{F}}_p) \\ (x, y) & \mapsto & (x^q, y^q) \end{array} \right.$$

**Théorie de Galois.** Soit  $(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}}_p)$ , alors  $(x, y) \in E(\mathbb{F}_q)$  ssi  $\varphi_E(x, y) = (x, y)$ , i.e  $(x, y)$  est un point fixe du Frobenius.

## Principe général

Formule du point fixe de Lefschetz appliquée au Frobenius  $\varphi$ .

$$|E(\mathbb{F}_q)| = 1 - \text{Trace}(\varphi^* | H_1(E)) + q$$

où  $H_1$  est défini par une théorie de cohomologie de Weil.

- ▶ Cohomologie  $\ell$ -adique : Algorithmes de Schoof, SEA.  
complexité :  $\mathcal{O}(\log(q)^4)$
- ▶ Cohomologie de Monsky–Washnitzer : Algorithme de Kedlaya, en  $\mathcal{O}(pn^3)$
- ▶ Cohomologie cristalline : Algorithme de Satoh en  $\mathcal{O}(p^2 n^3)$ , algorithme de Harley en  $\mathcal{O}(n^2)$  pour  $p = 2$ .  
But : un algorithme en  $\mathcal{O}(p^2 n^2)$ .

## Endomorphisme de Frobenius $\sigma$

Le Frobenius  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{F}}_p & \longrightarrow & \overline{\mathbb{F}}_p \\ x & \longmapsto & x^p \end{array} \right.$$

détermine le Frobenius entre  $E_{a,b}$  et  $E_{\sigma(a),\sigma(b)}$  :

$$\sigma_E \left| \begin{array}{ccc} E_{a,b}(\overline{\mathbb{F}}_p) & \longrightarrow & E_{\sigma(a),\sigma(b)}(\overline{\mathbb{F}}_p) \\ (x, y) & \longmapsto & (x^p, y^p) \end{array} \right.$$

$$\varphi = \sigma^n$$

$\Sigma$  permet de séparer la complexité en  $p$  et  $n$ .

## Relèvement $p$ -adique

Soit  $\mathbb{Q}_q$  l'unique extension non-ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  de degré  $n$ . Si  $T \in \mathbb{Z}_p[X]$  est unitaire et irréductible modulo  $p$ , alors

$$\mathbb{Q}_q \cong \mathbb{Q}_p[X]/T(X)$$

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q/\mathbb{Q}_p)$$

Soit  $\Sigma$  l'image de  $\sigma$  par cet isomorphisme, alors

$$\Sigma(x) = x^p \pmod{p}$$

$$\Sigma^n = id$$

## Résultats théoriques

- ▶ **Deuring** : Il existe une courbe  $\tilde{E}$  sur  $\mathbb{Q}_q$  qui se réduit sur  $E$  mod  $p$  et tel que  $\text{Trace} \varphi_{\tilde{E}} = \text{Trace} \varphi_E$ .
- ▶ **Hasse-Weil** :  $|\text{Trace}(\varphi_E)| \leq 2\sqrt{q}$ .
- ▶ **Lubin-Serre-Tate** : Soit  $j$  le  $j$ -invariant de  $E$ . Soit  $\Phi_p$  le polynôme modulaire de niveau  $p$ . Le  $j$ -invariant de  $\tilde{E}$  est l'unique  $J \equiv j \pmod{p}$  tel que  $\Phi_p(J, \Sigma(J)) = 0$ , où  $\Phi_p$  est le polynôme modulaire de niveau  $p$ .



## Paramétrisation des courbes

Paramétrisation par le  $j$ -invariant (car. 0) : La courbe

$$E_j : y^2 = x^3 + 3gx + 2g$$

où  $g = \frac{j}{j-1728}$  a pour  $j$ -invariant  $j$ .

On pose donc  $\tilde{E} = E_j$  et on relève  $\sigma_E$  en  $\sigma_{\tilde{E}}$  :

$$\sigma_{\tilde{E}} \left| \begin{array}{l} E_j \\ (x, y) \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \mapsto \end{array} \begin{array}{l} E_{\Sigma(j)} \\ (\Sigma(x), \Sigma(y)) \end{array}$$

## Formule de Vélu

La formule de Vélu permet de calculer l'action de l'isogénie  $\sigma_{\tilde{E}}$  sur la différentielle canonique  $\omega$ .

Soit  $\sigma_{\tilde{E}}^*(\omega) = c\omega$ , alors  $\sigma_{\tilde{E}_{\Sigma^k}}^*(\omega) = \Sigma^k(c)\omega$ .

$$\tilde{E} \xrightarrow{\sigma_{\tilde{E}}} \tilde{E}_{\Sigma} \xrightarrow{\sigma_{\tilde{E}_{\Sigma}}} \tilde{E}_{\Sigma^2} \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{E}_{\Sigma^n} = \tilde{E}$$

$$\tilde{E} \xrightarrow{c} \tilde{E}_{\Sigma} \xrightarrow{\Sigma(c)} \dots \longrightarrow \tilde{E}_{\Sigma^n} = E$$

$$\tilde{E} \xrightarrow{c\Sigma(c)\dots\Sigma^{n-1}(c)} \tilde{E}_{\Sigma^n} = \tilde{E}$$

$$\varphi_{\tilde{E}}^*(\omega) = c\Sigma(c)\dots\Sigma^{n-1}(c)\omega = \text{Norme}_{\mathbb{Q}_q/\mathbb{Q}_p}(c)\omega$$

Théorème :  $\text{Trace}(\varphi_E) = c + q/c$

## Résumé de l'algorithme

1. Calcul de  $e$  tel que  $p^e > 4\sqrt{q}$ .
2. Calcul de  $j$
3. Résolution de  $\Phi_p(J, \Sigma(J))$  à la précision  $p^e$ .
4. Calcul de  $c$  tel que  $\sigma_{\tilde{E}}^*(\omega) \equiv c\omega \pmod{p^e}$ .
5. Calcul de  $\text{Norme}(c) \pmod{p^e}$ .
6. Retour de  $1 - t + q$  où  $|t| \leq 2\sqrt{q}$  et  $t \equiv \text{Norme}(c) \pmod{p^e}$ .

## Difficultés

- ▶ On travaille dans  $\mathbb{Z}[X]/(T, p^e)$  dont les objets sont de tailles  $O(\log(p)n^2)$ . Pour obtenir une complexité en  $O(n^2)$ , il faut faire seulement des opérations quasi-linéaires.
- ▶ Évaluer  $\Sigma : A(X) \mapsto (A(\Sigma(X)))$  en moins de  $O(\sqrt{n})$  opérations semble impossible.
- ▶  $\Sigma$  n'est pas  $\mathbb{Q}_q$ -dérivable.
- ▶ En pratique il est difficile de calculer la norme en temps quasi-linéaire.

## Algorithme de Newton multivarié

Soit  $F : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p^n$  différentiable, et  $x$  tel que  $F(x) = 0 \pmod{p^m}$ .

- ▶ On veut trouver  $x_1$  tel que  $F(x_1) = 0 \pmod{p^{2m}}$ .
- ▶ On pose  $x_1 = x + p^m h$ , alors
$$F(x_1) = F(x) + DF_x(p^m h) + O(p^{2m})$$
- ▶ On résoud l'équation linéaire

$$DF_x(h) = F(x)p^{-m} \pmod{p^m}$$

## Algorithme de Dixon

Soit  $D$  une application linéaire dont on connaît un inverse mod  $p$ .

- ▶ On veut résoudre  $D(A) = B \pmod{p^{2m}}$
- ▶ On écrit

$$A = A_0 + p^m A_1$$

$$D(A_0) + p^m D(A_1) = B \pmod{p^{2m}}$$

- ▶ On résoud

$$D(A_0) = B \pmod{p^m}$$

puis

$$D(A_1) = (B - D(A_0))p^{-m} \pmod{p^m}$$

en appelant récursivement l'algorithme jusqu'à  $m = 1$ .

## Calcul de $J$

Nous voulons résoudre  $\Phi_p(X, \Sigma(X)) = 0$  dans  $\mathbb{Q}_q$  avec l'algorithme de Newton.  $\Sigma$  est différentiable sur  $\mathbb{Q}_q$  vu comme  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

$$\Phi_p(X, Y) \equiv (X^p - Y)(X - Y^p) \pmod{p}$$

$$D\Phi_{p(X, \Sigma(X))}(H) = H \frac{\partial \Phi_p}{\partial X}(X, \Sigma(X)) + \Sigma(H) \frac{\partial \Phi_p}{\partial Y}(X, \Sigma(X))$$

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial X}(X, \Sigma(X)) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial Y}(X, \Sigma(X)) \equiv X^{p^2} - X \pmod{p}$$

$$D\Phi_{p(X, \Sigma(X))}(H) = \Sigma(H)(X^{p^2} - X) \pmod{p}$$

Inversible si  $j \notin \mathbb{F}_{p^2}$ .

## Variante AGM

**Mestre** : si  $p = 2$ , la moyenne arithmético-géométrique appliquée au paramétrage

$$E : y^2 = x(x - 1)(x - L^2)$$

permet de remplacer  $\Phi_2 = X^3 + (-Y^2 + 1488Y - 162000) \times X^2 + (1488Y^2 + 40773375Y + 8748000000) \times X + (Y^3 - 162000Y^2 + 8748000000Y - 157464000000000)$  par l'équation plus simple

$$\Sigma(L) = \frac{1 + L}{2\sqrt{L}}$$

i.e  $P(L, \Sigma(L)) = 0$  avec

$$P(X, Y) = 4XY^2 - (1 + X)^2$$

$p > 2$  : Utilisation d'invariants modulaires plus petit que  $j$ .



## Calcul de $\Sigma$ pour $p = 2$

Harley( $p=2$ ) :

- ▶ Au lieu de relever  $T(X)$  puis de calculer  $\Sigma(X)$ , On relève  $T(X)$  tel que  $\Sigma(X) = X^2 \pmod{2^e}$
- ▶ Cela revient à résoudre  $T(X^2) = T(X)T(-X) \pmod{2^n}$
- ▶ Ou bien en posant  $T = T_0(X^2) + XT_1(X^2)$  à résoudre  $T - (T_0^2 - XT_1^2) = 0$
- ▶ La différentielle étant  $D(H) \mapsto H - (2H_0T_0 - 2XT_1H_1)$  avec  $H = H_0(X^2) + XH_1(X^2)$ .
- ▶  $D(H) = H \pmod{2}$  est inversible.
- ▶ On applique les algorithmes de Newton et Dixon.

## Calcul de $\Sigma$ pour $p > 2$

On veut relever  $T(X)$  pour que  $\Sigma(X) = X^p \pmod{p^e}$

- ▶ Soit  $\omega$  une racine  $p$ -ième formelle. Il faut relever  $T$  de sorte que  $T(X^p) = \prod_{i=0}^{p-1} T(\omega^i X)$
- ▶ Ce qui revient à  $T(X) = \text{Norme}(T(Y) \pmod{Y^p - X})$
- ▶ on pose  $F(T) = T(X) - \text{Norme}(T(Y) \pmod{Y^p - X})$
- ▶  $DF_T(H) = H(X) - \text{Trace}(NH(Y) \pmod{Y^p - X})$  avec  $N = \prod_{i=1}^{p-1} T(\omega^i X)$

## Calcul de la trace

Si

$$H = \sum_{i=0}^{p-1} H_i(X^p)X^i \quad \text{et} \quad N = \sum_{i=0}^{p-1} N_i(X^p)X^i$$

alors en utilisant l'orthogonalité des caractères,

$$\text{Trace}(NH) = pH_0(Y)N_0(Y) + pY \sum_{i=1}^{p-1} H_i(Y)N_{p-i}(Y)$$

Donc  $DF_T = Id \pmod{p}$  est inversible.

## Calcul de $F(T)$ et de $N$

On pose

$$P_a(T) = \prod_{i=1}^a (T(\omega^i X))$$

La formule d'addition

$$P_{a+b}(T) = P_a(T) (P_b(T)(\omega^a X))$$

permet de calculer  $N = P_{p-1}$  par "exponentiation binaire".

$$F(T) = TN$$

On applique encore les algorithmes de Newton et Dixon.

## Calcul de $\Sigma(A \pmod{T})$ , $p > 2$

Par définition nous avons  $\Sigma(A) = A(X^p) \pmod{T}$ . Nous précalculons  $X_k = X^{kn} \pmod{T}$  pour  $k = 0$  à  $p - 1$ . Nous écrivons

$$A(X^p) = \sum_{k=0}^{p-1} A_i(X) X^{kn}$$

avec  $\deg A_i < n$ .

$$S = \sum_{k=0}^{p-1} A_i(X) X_k \pmod{T}$$

$\deg S < 2n$  et  $\Sigma(A) = S \pmod{T}$ . (environ deux fois plus rapide).

## Calcul de la norme

On se ramène à  $c \equiv 1 \pmod{p}$  en utilisant le morphisme de Teichmüller.

On utilise la formule de Dwork :

$$\text{Norme}_{\mathbb{Q}_q/\mathbb{Q}_p}(c) = \exp(\text{Trace}(\log(c)))$$

(Correspondance sommes de Newton/ polynômes symétriques)

## Calcul du logarithme

- ▶ On suppose  $c \equiv 1 \pmod{p}$ .
- ▶ On choisit  $k = \lceil n^{\frac{1}{3}} \rceil$
- ▶ On calcule  $c^{p^k} \pmod{p^{e+k}}$ .
- ▶ Nous avons  $c^{p^k} \equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$
- ▶ On calcule  $b$  tel que  $\frac{1+b}{1-b} = c^{p^k}$  de sorte que  $\log(c^{p^k}) = 2\operatorname{atanh}(b) \pmod{p^{e+k}}$ .
- ▶ On a  $v_p(b) \geq k$
- ▶ On retourne  $2\operatorname{atanh}(b)p^{-k} \pmod{e}$ .

## Calcul de l'arctangente hyperbolique

- ▶ On calcule

$$\operatorname{atanh}(b) = \sum_{i=1}^{\frac{e+k}{2k}} \frac{b^{2i+1}}{2i+1} \pmod{p^{e+k}}$$

par l'algorithme de Brent&Kung (Pas de bébé-Pas de géant).

- ▶  $O(n^{\frac{1}{3}})$  multiplications mais  $O(n^{\frac{2}{3}})$  additions.
- ▶ en prenant  $k = \frac{1}{2}$ , on obtient  $O(n^{\frac{1}{2}})$  multiplications et additions, plus lent en pratique.



## Calcul du noyau du dual du Frobenius

La formule de Vélou nécessite de connaître le noyau du dual  $V_E$  de  $\Sigma_E$ . Nous cherchons

$$K = \prod_{(x, \pm y) \in \ker V_E \setminus \infty} (X - x)$$

Soit  $P_p$  le polynôme de  $p$  division de la courbe, alors  $P_p \equiv \lambda k^p \pmod{p}$  où  $\lambda$  est un scalaire et  $k$  un polynôme unitaire. Nous cherchons  $K$  tel que  $K \equiv h \pmod{p}$  et  $K$  divise  $P_p$  dans  $\mathbb{Q}_q(X)$ .

Nous utilisons une variante de l'algorithme de Newton pour la fonction  $K \mapsto P_p \pmod{K}$ , la difficulté venant que  $P'_p = 0 \pmod{P}$ .