Chapitre 1

Représentation des nombres algébriques

C'est vrai, 13 bis, est-ce un nombre pair ou un nombre impair ?
Bah ! Voilà qui m'importe peu. En tout cas, c'est un nombre mauve.
Raymond Queneau, *Le vol d'Icare*

1.1 Représentation polynomiale

1.1.1 Représentation des éléments d'un corps de nombres

Nous nous intéressons à la représentation des nombres algébriques appartenant à une extension finie $K/\mathbb{Q}$ du corps des rationnels. Nous supposons que K est le corps de rupture d'un polynôme irréductible T unitaire, à coefficients entiers. Soit $\alpha \in K$ une racine de T. Nous avons l'isomorphisme

$$\iota \left| \begin{array}{lcc} \mathbb{Q}[X]/(T) & \longrightarrow & K \\ \overline{P} & \longmapsto & P(\alpha) \end{array} \right.$$

Nous pouvons donc représenter un élément $\beta \in K$ par une classe de polynômes $\iota^{-1}(\beta)$ modulo T. Comme il s'agit d'un isomorphisme, les opérations algébriques sur les éléments de K se traduisent directement en opérations algébriques sur les classes de polynômes.

1.1.2 Représentation de l'anneau des entiers d'un corps de nombres

Soit $\mathbb{Z}_K$ l'anneau des entiers de K, et $\mathbb{Z}[\alpha]$ l'image de $\mathbb{Z}[X]$ par ι. Le polynôme T étant supposé unitaire, α est un entier algébrique donc $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{Z}_K$.

Le quotient de groupes abéliens $\mathbb{Z}_K/\mathbb{Z}[\alpha]$ est fini et notons d son exposant, c'est-à-dire, le plus petit entier tel que $d\mathbb{Z}_K/\mathbb{Z}[\alpha] = 0$. L'entier d a la propriété suivante : c'est le plus petit entier tel que si $\beta \in K$ est entier algébrique, alors $d\beta \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

1.1.3 Calcul d'un dénominateur commun pour les entiers algébriques

Les algorithmes Round 2 et Round 4 de H. Zassenhaus permettent le calcul exact du dénominateur d précédent, cependant ils nécessitent la factorisation du discriminant du polynôme, qui n'est pas réalisable en pratique. Inversement, le discriminant D du polynôme T est toujours un multiple de d, mais il est beaucoup plus grand que d, ce qui rend son utilisation peu commode.

Pour contourner ces difficultés, nous proposons une méthode heuristique pour trouver un petit multiple de d.

Nous utilisons trois remarques:

- Le dénominateur d divise par définition l'index $[\mathbb{Z}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$ qui est le cardinal du groupe $\mathbb{Z}_K/\mathbb{Z}[\alpha]$. Or le carré de l'index divise le discriminant D de T et donc $v_p(d) \leq \frac{v_p(D)}{2}$,
- Le dénominateur d divise l'exposant du groupe abélien $\mathbb{Z}[\alpha]/T'(\alpha)\mathbb{Z}[\alpha]$ qui est appelé discriminant réduit (voir [FoLe]). Comme le calcul du discriminant réduit peut être long, il est préférable de le faire modulo les facteurs primaires du discriminant D.
- Seuls les petits nombres premiers peuvent diviser D avec un grand exposant.

Nous résumons la méthode dans l'algorithme suivant.

Algorithme 1.1.1 *Nous supposons avoir calculé tout les nombres premiers inférieurs à une borne P, que nous pouvons prendre en pratique égale à* 500000. *Nous calculons un multiple du dénominateur d ainsi.*

1. [Factorisation partielle] *Factoriser partiellement D en éliminant tous les facteurs premiers inférieurs à P. Nous écrivons*

$$D = U^u \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$$

ou les p_i sont premiers et premier avec U, et U n'est pas un carré parfait.

2. [Discriminant réduit] *Pour chaque $1 \leq i \leq n$ nous calculons le discriminant réduit δ_i de T modulo $p_i^{[\frac{e_i}{2}]}$.*

3. [Traitement du reste U] *Nous posons* $\delta_u = U^{[\frac{u+1}{2}]}$.

4. [Produit] *Nous retournons le produit*

$$\delta_u \prod_{i=1}^{n} \delta_i \quad .$$

1.1.4 Représentation des morphismes

Nous nous donnons deux corps de nombres K_1 et K_2, donnés comme corps de rupture d'un polynôme irréductible T_1 (resp. T_2). Notons α_i une racine de T_i dans K_i et ι_i l'isomorphisme

$$\iota_i \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[X]/(T_i) & \longrightarrow & K_i \\ \overline{P} & \longmapsto & P(\alpha_i) \end{array} \right. ,$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Nous souhaitons représenter un morphisme μ entre K_1 et K_2. Soit M un polynôme alors l'application

$$m_M \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[X]/(T_1) & \longrightarrow & \mathbb{Q}[X]/(T_2) \\ \overline{P} & \longmapsto & \overline{P \circ M} \end{array} \right. .$$

est bien définie si et seulement si $T_2 \mid T_1 \circ M$, et dans ce cas m_M est un morphisme de corps.

Choisissons maintenant

$$M = (\iota_2^{-1} \circ \mu \circ \iota_1)(\overline{X}) \in \mathbb{Q}[X] \quad ,$$

alors m_M et μ sont deux morphismes qui coïncident sur le générateur α_1 de K_1, il sont donc égaux.

Les morphismes entre K_1 et K_2 sont en bijections avec les classes modulo T_2 de polynômes M vérifiant $T_2 \mid T_1 \circ$. Tous les morphismes entre K_1 et K_2 sont injectifs, de plus ce sont des isomorphismes si et seulement si K_1 et K_2 ont même degré.

1.2 Représentation des nombres algébriques par conjugués ℓ–adiques

1.2.1 Conjugué ℓ-adique

Nous souhaitons proposer une représentation modulaires des nombres algébriques. Soit K un corps de nombres comme précédemment et v une place de $\mathbb{Q}$. Soit $(w_i)_{i=1}^g$ les places de K au-dessus de v. Notons K_{w_i} le complété de K pour la valuation w_i, et σ_i le plongement naturel de K dans le complété K_{w_i}.

Nous avons le morphisme injectif

$$\Gamma \left| \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \prod_{i=1}^g K_{w_i} \\ \alpha & \longmapsto & (\sigma_i(\alpha))_{i=1}^g \end{array} \right.$$

Si $\beta \in K$, l'image $\Gamma(\beta)$ est appelée *vecteur conjugué* de β. Nous nous contenterons ici de traiter le cas où v est une place finie correspondant à un nombre premier ℓ, le cas des places infinies étant classique (voir [Cohen, section 4.2.4]).

Nous notons $(\ell) = \prod_{i=1}^g \mathfrak{L}_i^{e_i}$ la factorisation de ℓ en produit d'idéaux premiers, indexée de sorte que $w_i = v_{\mathfrak{L}_i}$.

Soit e un entier strictement positif. Nous introduisons le morphisme

$$\Gamma_e \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_K & \longrightarrow & \prod_{i=1}^g \mathbb{Z}_K/\mathfrak{L}_i^{e_i e} \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha \pmod{\mathfrak{L}_i^{e_i e}})_{i=1}^g \end{array} \right.$$

Le noyau de Γ_e est (ℓ^e). Γ_e est une approximation modulo ℓ^e de Γ.

1.2.2 Représentation simplifiée

Nous ajoutons l'hypothèse que ℓ ne divise pas le discriminant D de T. Cela implique que ℓ n'est pas ramifié dans $K/\mathbb{Q}$, et donc les exposants e_i valent tous 1.

Soit $T = \prod_{i=1}^g T_i \pmod{\ell}$ la factorisation de T modulo ℓ, que nous indexons pour que $T_i(\alpha) \in \mathfrak{L}_i$. Nous aurons besoin ultérieurement d'une base d'idempotents modulo ℓ, c'est-à-dire une famille $(U_i)_{i=1}^g$ de polynômes telle que pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,g\}^2$ nous ayons

$$U_i \equiv \delta_{i,j} \pmod{T_j, \ell} \ .$$

Par le procédé de relèvement de Hensel, il est possible de relever cette factorisation en une factorisation

$$T = \prod_{i=1}^g T_i \pmod{\ell^e}$$

et simultanément la famille $(U_i)_{i=1}^g$ en une base d'idempotents modulo ℓ^e, vérifiant pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,g\}^2$,

$$U_i \equiv \delta_{i,j} \pmod{T_j, \ell^e} \ .$$

Ainsi nous avons pour $1 \leq i \leq g$ un isomorphisme θ_i entre $\mathbb{Z}_K/\mathfrak{L}_i^e$ et $\mathbb{Z}[X]/(T_i, \ell^e)$ défini par

$$\theta_i \left| \begin{array}{lcr} \mathbb{Z}[X]/(T_i, \ell^e) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_K/\mathfrak{L}_i^e \\ \overline{P} & \longmapsto & P(\alpha) \pmod{\mathfrak{L}_i^e} \end{array} \right. .$$

Nous introduisons le morphisme Θ_e défini par

$$\Theta_e \left| \begin{array}{lcr} \mathbb{Z}_K & \longrightarrow & \prod_{i=1}^g \mathbb{Z}[X]/(T_i, \ell^e) \\ \alpha & \longmapsto & (\theta^{-1}(\alpha \pmod{\mathfrak{L}_i^e}))_{i=1}^g \end{array} \right.$$

Ce morphisme nous permet donc de représenter un élément $\beta \in \mathbb{Z}_K$ par un élément de l'algèbre produit $\prod_{i=1}^g \mathbb{Z}[X]/(T_i, \ell^e)$, pour laquelle les opérations algébriques sont très simples et très rapides, car modulaires.

1.2.3 Représentation des morphismes

Soit μ un morphisme de corps entre deux corps de nombres K et L.

Soit v une place de $\mathbb{Q}$, notons $(v_i)_{i=1}^g$ les places de K au-dessus de v, et $(w_i)_{i=1}^h$ les places de L au-dessus de v. Notons K_{v_i} les complétés de K pour les valuations v_i, et σ_i les plongements naturels de K dans K_{v_i} correspondants.

De même, nous notons L_{w_i} les complétés de L pour les valuations w_i, et τ_i les plongements naturels de L dans L_{w_i} correspondants.

Nous souhaitons expliquer comment à partir d'un vecteur conjugué $\Gamma_K(\alpha)$ obtenir le vecteur conjugué $\Gamma_L(\mu(\alpha))$.

Remarquons d'abord que $w_i \circ \mu$ est une place de K. Nous construisons une application

$$\psi \left| \begin{array}{lcr} \{1, \dots, h\} & \longrightarrow & \{1, \dots, g\} \\ i & \longmapsto & j \text{ tel que } w_i \circ \mu = v_j \end{array} \right.$$

Nous remarquons que pour tout $1 \leq i \leq h$, les plongements $\sigma_{\psi(i)}$ et $\tau_i \circ \mu$ ont même image. Il existe donc un automorphisme φ_i de $K_{v_{\psi(i)}}$ tel que

$$\varphi_i \circ \sigma_{\psi(i)} = \tau_i \circ \mu$$

Cette identité nous permet effectivement de calculer $\Gamma_L(\mu(\alpha))$ en fonction de $\Gamma_K(\alpha)$. Ainsi un morphisme peut être entièrement spécifié par une fonction ψ et une suite d'automorphismes locaux φ.

1.2.4 Comment choisir le nombre premier ℓ

Nous avons choisi précédemment de nous restreindre au places non-archimédiennes. Une justification est que l'arithmétique flottante (ou à virgule fixe) entraînant un perte de précision lors de chaque opération arithmétique, il est souvent difficile de contrôler l'exactitude des résultats.

Du point de vue de l'efficacité, le coût d'une addition de deux vecteurs conjugués est indépendant de ℓ. Par contre, les multiplications sont plus rapides lorsque les degrés résiduels sont faibles, en effet la complexité de la multiplication modulaire est super-linéaire. Il est donc préférable de choisir un nombre premier ℓ dont le nombre d'idéaux g au-dessus de ℓ est grand.

Le théorème de Čebotarev donne la densité de nombre premiers ayant des degrés résiduels fixés en fonction du groupe de Galois de la clôture normale de K. Si le corps de nombres est Galoisien, il est toujours possible en pratique de trouver un nombre ℓ totalement décomposé, par essai successif. C'est en pratique le meilleur choix.

Dans le cas général, la faible densité des places finies totalement décomposées peut rendre leur détermination et/ou leur utilisation impraticable. Cependant, en fonction du groupe de Galois de la clôture normale de K, le théorème de Čebotarev nous indiquent la densité de nombre premiers ayant des degrés résiduels fixés, et permet en pratique de choisir une solution presque optimal.

Il est aussi possible de choisir ℓ de sorte que les automorphismes de Frobenius liés aux idéaux premiers au-dessus de ℓ aient certaines propriétés. C'est cette technique qui nous permettra des calculer les automorphismes de corps de nombres.

1.3 Retour à la représentation polynomiale

En pratique, nous avons un ensemble d'opérations algébriques à effectuer, et nous avons une borne *a priori* B sur le résultat final. Nous souhaitons en obtenir la représentation polynomiale.

1.3.1 Lorsque le résultat est entier

Nous savons a priori que le résultat final n est un entier. Dans ce cas, toutes les composantes de $\Gamma(n)$ sont égales, et comme les calculs sont effectués composante par composante, il est suffisant de calculer seulement la première composante $\sigma_1(n)$. Supposons connu une borne a priori B sur le résultat et choisissons e tel que $\ell^e > 2B$, alors il suffit de prendre le représentant de $\sigma_1(n)$ dans l'intervalle $]-\ell^e/2, \ell^e/2]$ pour obtenir n.

1.3.2 Lorsque le résultat est rationnel

Nous savons a priori que le résultat final p/q est un rationnel. Il suffit ici aussi de calculer la première composante $\sigma_1(p/q)$. Nous avons besoin ici de connaître a priori une borne B sur p et un multiple D de q. Nous appliquons la méthode précédente à l'entier $n = Dp/q$ qui est inférieur à $B|D|$, et nous obtenons p/q en calculant n/D.

Il existe un procédé appelé *reconstruction des rationnels* ([CoEn]), qui nécessite seulement une borne B_1 sur p et B_2 sur q. Il permet de reconstruire p/q à l'aide d'une approximation modulo $\ell^e > 2B_1B_2$.

La difficulté pratique est qu'il est rarement possible d'obtenir une borne sur q qui soit meilleure qu'un multiple connu, et dans ce cas la première méthode est plus rapide. Par contre elle est très utile lorsque l'on calcule des approximations successives et que l'on a un critère pour décider si le résultat obtenu est correct. Dans ce cas nous pouvons procéder de la manière heuristique suivante:

1. Supposons connu B et D comme précédemment.
2. Nous calculons une suite d'approximation jusqu'à la précision $\ell^e > 2BD$.
3. À partir de chaque approximation, nous déterminons par reconstruction des rationnels, un nombre p'/q'.
4. Nous vérifions si $q' \mid D$, dans ce cas nous vérifions si le résultat est correct, si oui nous arrêtons le calcul et retournons le résultat p'/q'.
5. Nous continuons avec la prochaine approximation.

Comme en général le multiple connu D est beaucoup plus grand que le dénominateur, cette stratégie est très supérieure. De plus le test $q' \mid D$ évite la plupart des vérifications.

1.3.3 Lorsque le résultat est un nombre algébrique

Le résultat est un nombre algébrique que nous souhaitons exprimé comme polynôme par rapport à un élément primitif α de K, que nous supposerons entier algébrique. Nous devons connaître une borne *a priori* sur les coefficients du polynôme cherché, et un multiple $D > 0$ des dénominateurs. Nous nous donnons un nombre premier ℓ ne divisant ni D ni le discriminant $\mathrm{Disc}(T)$.

Soit donc $\beta = \frac{P(\alpha)}{D}$ un élément de K et nous supposons que P est de degré strictement inférieur au degré de T et est à coefficients entiers et inférieurs à B en valeur absolue.

Nous nous donnons l'image par $\Theta_e(\beta) = (B_i)_{i=1}^{g}$ d'un nombre algébrique β et nous supposons que $\ell^e > 2BD$. Nous souhaitons retrouver P.

Nous allons utilisé ici la base d'idempotents modulo ℓ^e $(U_i)_{i=1}^g$. Nous rappelons qu'elle vérifie pour tout couple $(i,j) \in \{1,\ldots,g\}^2$

$$U_i \equiv \delta_{i,j} \pmod{T_j, \ell^e} .$$

L'élément

$$Q = \sum_{i=1}^{g} B_i U_i$$

vérifie pour tout $i \in \{1,\ldots,g\}$

$$Q \equiv B_i \pmod{T_i, \ell^e}$$

Comme cette relation est aussi vérifiée par P/D, nous avons

$$Q \equiv P/D \pmod{T, \ell^e}$$

Comme Q et P/D sont tous deux de degrés strictement inférieurs au degré de T nous en déduisons

$$Q \equiv P/D \pmod{\ell^e}$$

et nous pouvons déterminer chaque coefficient de P/D à l'aide des techniques de la section précédente.

1.3.4 Lorsque la place v est totalement décomposée

Nous avons vu précédemment qu'il était préférable de prendre une place totalement décomposée pour que l'arithmétique sur les plongements naturels soit plus rapide. De plus les calculs de la section précédente se simplifiant dans ce contexte, il nous a paru intéressant de les détailler.

Notons d'abord que les composantes de $\Theta_e(\beta) = (B_i)_{i=1}^g$ sont des polynômes de degré 0, donc représentables par des entiers.

Nous noterons $(\alpha_i)_{i=1}^n$ les racines de T dans $\mathbb{Q}_\ell$. Remarquons d'abord que T se factorise en

$$T = \prod_{i=1}^{n} X - \alpha_i$$

et par le théorème de Lagrange nous avons

$$U_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \tag{1.1}$$

$$U_i = T(X)/T'(\alpha_i)(X - \alpha_i) \tag{1.2}$$

Nous remarquerons que les U_i forment les lignes de l'inverse M de la matrice de van der Monde (α_i^{j-1}). Les coéfficients du polynôme

$$Q = \sum_{i=1}^{g} B_i U_i$$

sont simplement les composantes du vecteur $M(b_1, \ldots, b_n)^t$.

Chapitre 2

Application à la théorie de Galois

2.1 Calcul des extensions abéliennes du corps des rationnels par somme de Gauss

Comme première application de la représentation par conjugués ℓ–adique, nous allons déterminer des polynômes définissant les extensions abéliennes des rationnels.

Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne définie par la partie finie du conducteur f et un sous-groupe H de $G = (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*$. Notons ζ_f une racine primitive f-ième de l'unité et $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ le f-ième corps cyclotomique. Ainsi, le corps K est le corps fixe de $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ par H.

Nous utiliserons la proposition suivante:

Proposition 2.1.1 *Sous les hypothèses précédentes, la trace de ζ_f sur K engendre K.*

La trace de ζ_f sur K est égale à la somme de Gauss

$$\gamma = \sum_{a \in H} \zeta_f^a \ .$$

Plus précisément, notons G/H l'ensemble des classes à gauche de G par H, et pour $C \in G/H$, notons

$$\gamma_C = \sum_{a \in C} \zeta_f^a \ .$$

Les nombres γ_C sont les conjugués de γ et le polynôme minimal de γ est

$$T = \prod_{C \in G/H} (X - \gamma_C) \ .$$

Le problème algorithmique consiste donc à calculer le polynôme T. Soit ℓ un nombre premier $\ell \equiv 1 \pmod{f}$. Ainsi le corps $\mathbb{Q}_\ell$ contient les racines ℓ-ièmes de l'unité.

Pour appliquer les résultats précédents nous avons besoin d'une borne sur les coèfficients de T. Écrivons

$$T = \sum_{i=0}^{d} t_i X^i \quad ,$$

en notant d le degré de T et $n = \operatorname{Card} G/H$, nous avons

$$t_i = \sum_{\substack{A \subset G/H \\ \operatorname{Card} A = d-i}} \prod_{C \in A} \gamma_C \quad .$$

De façon évidente nous avons $|\gamma_C| \le n$, et donc

$$|t_i| \le \binom{d}{d-i} n^i \quad .$$

De plus la quantité $\binom{d}{d-i} n^i$ étant maximale pour $i = m = d - [\frac{1+d}{1+n}]$, nous pouvons prendre pour borne

$$B = \binom{d}{d-m} n^m \quad .$$

Nous avons donc à calculer les racines f-ième de l'unité dans $\mathbb{Q}_\ell$ modulo $\ell^e > 2B$, puis à calculer ainsi T modulo ℓ^e. Chaque coefficient étant entier et inférieur à B, il est possible de reconstituer le polynôme T.

Algorithme 2.1.2 *Soit f_0 un entier et H_0 un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z})^*$. Nous déterminons un polynôme définissant le corps fixe $\mathbb{Q}(\zeta_{f_0})^{H_0}$ ainsi.*

1. [Calcul du conducteur] *Calculer la partie finie du conducteur f de l'extension abélienne $\mathbb{Q}(\zeta_f)^H$ et l'image H de H_0 dans $G = (\mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z})^*$.*

2. [Choix de ℓ] *Déterminer un nombre premier $\ell \equiv 1 \pmod{f}$.*

3. [Calcul de B et e] *Calculer la borne B et e tel que $\ell^e > 2B$.*

4. [Calcul de ζ_f] *Calculer une racine primitive f-ième de l'unité modulo ℓ^e dans $\mathbb{Q}_\ell$.*

5. [Calcul de G/H] *Calculer l'ensemble G/H des classes à gauche de G par H.*

6. [Calcul des γ_C] *Pour chaque classe $C \in G/H$, calculer $\gamma_C = \sum_{a \in C} \zeta_f^a$.*

7. [Calcul de T modulo ℓ^e] *Calculer T modulo ℓ^e à l'aide de l'identité*

$$T = \prod_{C \in G/H} (X - \gamma_C) \ .$$

8. [Détermination de T] *Recouvrer T.*

Cet algorithme ne permet pas de faire le calcul si le conducteur est grand, par contre il peut calculer des extensions de degré arbitraire et retourne dans tous les cas un polynômes avec des coefficients raisonnables. Il existe un autre algorithme utilisant la théorie de Kummer qui permet de traiter des conducteurs élevé, mais uniquement pour obtenir des extensions de petits degrés. De plus il retourne habituellement un polynôme avec de très gros coefficients.

2.2 Calcul de corps fixes

La connaissance du groupe de Galois d'une extension L/K permet le calcul explicite des sous-corps.

Nous utilisons le résultat suivant qui résulte de [KlMa].

Proposition 2.2.1 *Soit L/K une extension galoisienne de degré n, et α un élément primitif pour cette extension. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des conjugués de α dans L. Soit $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ son groupe de Galois et H un sous-groupe d'ordre h. Soit $\{O_i;\ i = 1$ à $k\}$ l'ensemble des orbites de $\mathcal{A}$ sous l'action de H. Soit Σ un polynôme symétrique en h indéterminées et à coefficients entiers. Posons pour $1 \leqslant i \leqslant k$*

$$r_i = \Sigma(o_1, o_2, \ldots, o_h) \text{ où } O_i = \{o_1, o_2, \ldots, o_h\}$$

et

$$R = \prod_{i=1}^{k} (X - r_i) \ .$$

Supposons le polynôme R sans facteurs carrés. Alors R est un polynôme unitaire, irréductible et une racine de R engendre le corps fixe K^σ. Il existe exactement un polynôme de degré au plus $n-1$ tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$ et pour tout $\alpha \in O_i$ nous avons $M(\alpha) = r_j$. Pour ce polynôme, nous avons $T \mid R \circ M$ et il défini l'inclusion de L^H dans L.

Pour appliquer ce résultat effectivement, nous avons besoin d'approximation des conjugués de α dans un corps local (ou éventuellement le corps des complexes) et de trouver un polynôme symétrique Σ tel que le polynôme R en résultant est sans facteur carré. Nous avons de plus les compléments suivants:

Proposition 2.2.2 *Sous les hypothèses et notations de la proposition 2.2.1, si $\tau \in G$ est un automorphisme, nous avons $\tau(r_i) = r_j$ si et seulement si $\tau(O_i) = O_j$.*

Proposition 2.2.3 *Supposons que $K = \mathbb{Q}$, et soit p un nombre premier ne divisant pas le discriminant de T. Soit e un entier strictement positif. Soit H un sous-groupe de G qui laisse invariants les idéaux de L au-dessus de p. Sous les hypothèses et notation de la proposition 2.2.1, nous notons $T = \prod_{i=1}^{g} T_i \pmod{p^e}$ la factorisation de T en produit de polynômes irréductibles modulo p^e. Pour $1 \leq i \leq g$ nous notons R_i le polynôme minimal de $M \pmod{T_i, p^e}$, alors*

$$R = \prod_{i=1}^{g} R_i \pmod{p^e}$$

est la factorisation de R en produit de polynômes irréductibles modulo p^e. De plus si β est une racine de R dans L^H, l'idéal premier $(p, T_i(\alpha))$ de L est au-dessus de l'idéal premier $(p, R_i(\beta))$. De plus si $\tau \in G$, nous avons $\tau((p, T_i(\alpha))) = \tau((p, T_j(\alpha)))$ si et seulement si $\tau((p, R_i(\beta))) = \tau((p, R_j(\beta)))$

Pour des raisons d'éfficacité, il est préférable de trouver un polynôme Σ de petit degré. De plus il est souvent souhaitable que R soit sans facteur carré modulo un ou plusieurs nombres premiers. En pratique nous utilisons l'algorithme heuristique suivant:

Algorithme 2.2.4 *Sous les hypothèses et notation de la proposition 2.2.1, nous notons par σ_j le polynôme de Newton*

$$\sigma_j((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^j$$

Nous dirons qu'un ensemble S de polynômes sépare un ensemble de points E, si pour tout couple de points disctincts de E, il existe un polynôme de S ayant une valeur différente sur les deux points.

1. [Initialisation] *Initialiser m à 1.*

2. [Séparation] *Tant que l'ensemble $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ ne sépare pas $\mathcal{A}$, incrémenter m*

3. [Boucle] *Poser $\Sigma = \sigma_m$. Pour $1 \leq j \leq 2m - 1$, exécuter les étapes suivantes.*

   3.1. [Test] *Calculer le polynôme R correspondant à Σ. Si R est sans facteur carré et satisfait également les conditions locales imposées, retourner R.*

3.2. [Nouveau polynôme] *Ajouter* $\sigma_j \pmod{m}$ *à* Σ.

4. [Retour] *Incrémenter* m *et revenir à l'étape 3.*

2.3 Factorisation Galoisienne

La théorie de de Galois nous permet d'obtenir directement la factorisation d'un polynôme définissant une extension galoisienne sur un sous-corps.

Lemme 2.3.1 (Factorisation Galoisienne) *Soit* L/F *une extension Galoisienne, et* $\alpha \in L$ *un élément primitif de l'extension. Soit* T *le polynôme minimal de* α *sur* F. *Soit* K/F *une extension algébrique de* F. *Pour chaque classe à gauche* $C \in \mathrm{Gal}(L/F)/\mathrm{Gal}(L/L \cap K)$, *le polynôme*

$$T_C = \prod_{\sigma \in C} (X - \sigma(\alpha))$$

est à coefficients dans K *et est irréductible sur* K. *De plus, la factorisation de* T *en produits de polynômes irréductibles sur* K *est donnée par*

$$T = \prod_{C \in \mathrm{Gal}(L/F)/\mathrm{Gal}(L/K)} T_C$$

À l'aide d'une représentation convenable des nombres algébriques $\sigma(\alpha)$, nous pouvons calculer explicitement le polynôme T.

2.4 Determination probabiliste du nombre d'automorphismes d'une extension algébrique

Nous présentons une modification du test de Čebotarev –van der Waerden pour obtenir un majorant du nombre d'automorphismes d'une extension galoisienne, basée sur la proposition suivante:

Proposition 2.4.1 *Soit* L/K *une extension de corps de nombres. Soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* K *non ramifié dans* L/K *se décomposant en* $\mathfrak{p}\mathbb{Z}_L = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{P}_i$ *dans* L *où les idéaux* $\mathfrak{P}_i$ *sont premiers de degrés résiduels* f_i. *Soit pour* $1 \leq i \leq g$ *le nombre* g_i *d'idéaux de degré résiduel* f_i, *alors le nombre* h *d'automorphismes de l'extension* L/K *divise* $g_i f_i$ *pour* $1 \leq i \leq g$.

Démonstration:

Soit H le groupe des automorphismes de l'extension L/K. Notons L^H le corps fixe de L par H, alors l'extension L/L^H est galoisienne. Soit $\mathfrak{p}\mathbb{Z}_{K^H} = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{Q}_i$ la décomposition de l'idéal $\mathfrak{p}$ dans K^H en produit d'idéaux premiers. L'extension L/L^H étant galoisienne, $\mathfrak{Q}_i$ se décompose en produit de g'_i idéaux de même degré résiduel $f'i$ et nous avons $h = g'_i f'_i$.

■

Chapitre 3

Isomorphismes explicites entre les corps finis

> L'univers (que d'autres nomment la Bibliothèque) se compose d'un nombre indéfini, et peut-être infini, de galeries hexagonales, avec au centre de vastes puits d'aération bordé par des balustrades très basses.
> J.L. Borges, *Fictions*

3.1 Définitions

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini fixé et n un entier. Soit T_1 et T_2 deux polynômes irréductibles de degré n à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Nous considérons les deux extensions de $\mathbb{F}_q$ définies par $K_1 = \mathbb{F}_q[X]/(T_1)$ et $K_2 = \mathbb{F}_q[X]/(T_2)$. Ces deux extensions, ayant le même degré, sont isomorphes, cependant la preuve habituelle de ce fait utilise l'existence d'une extension commune et ne fournit pas un isomorphisme explicite entre K_1 et K_2. Si σ est un tel isomorphisme, nous voulons être capable d'évaluer la fonction

$$\sigma \left| \begin{array}{lcr} \mathbb{F}_q[X]/(T_1) & \longrightarrow & \mathbb{F}_q[X]/(T_2) \\ \overline{P} & \longmapsto & \overline{Q} \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent à connaître $\overline{S} = \sigma(\overline{X})$. Le polynôme S doit vérifier

$$T_1 \circ S \equiv 0 \pmod{T_2} \tag{3.1}$$

Réciproquement, si S vérifie (3.1), alors

$$\sigma \left| \begin{array}{lcr} \mathbb{F}_q[X]/(T_1) & \longrightarrow & \mathbb{F}_q[X]/(T_2) \\ \overline{P} & \longmapsto & \overline{P \circ S} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme explicite.

Plus généralement, nous voulons résoudre le problème suivant:

Problème 3.1.1 *Soit F_q un corps fini fixé et n un entier. Soit T_1 et T_2 deux polynômes irréductibles de degré* multiple *de n à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Nous notons K_1 l'unique sous-corps de degré n de $\mathbb{F}_q[X]/(T_1)$ et K_2 l'unique sous-corps de degré n de $\mathbb{F}_q[X]/(T_2)$.*

Il s'agit de déterminer explicitement deux polynômes S_1 et S_2 tel que

- *L'élément $\overline{S_1} \pmod{T_1}$ de $\mathbb{F}_q[X]/(T_1)$ engendre K_1,*
- *L'élément $\overline{S_2} \pmod{T_2}$ de $\mathbb{F}_q[X]/(T_2)$ engendre K_2,*
- *les polynômes minimaux de $\overline{S_1}$ et $\overline{S_2}$ sont égaux.*

Sous ces conditions, l'application $\overline{S_1} \longmapsto \overline{S_2}$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme

$$\left| \begin{array}{lcl} K_1 & \longrightarrow & K_2 \\ P(\overline{S_1}) \pmod{T_1} & \longmapsto & P(\overline{S_2}) \pmod{T_2} \end{array} \right. .$$

3.2 Calcul des isomorphismes explicites quand n divise $q-1$

Dans cette section, nous supposons que n divise $q-1$ ce qui implique que $\mathbb{F}_q$ contient un racine primitive n–ième de l'unité ζ, ce qui nous permet d'utiliser la théorie de Kummer.

Nous présentons ce cas séparément, car il est beaucoup simple que le cas général, bien qu'utilisant les mêmes idées. De plus il peut être préférable de le traiter à part lors de la mise en œuvre de l'algorithme.

Soit $i \in \{1,2\}$. L'extension $K_i/\mathbb{F}_q$ est cyclique de degré n et $\mathbb{F}_q$ contient une racine primitive n–ième de l'unité ζ, $K_i/\mathbb{F}_q$ est donc une extension cyclique de Kummer. L'automorphisme de Frobenius

$$\varphi_i \left| \begin{array}{lcl} K_i & \longrightarrow & K_i \\ x & \longmapsto & x^q \end{array} \right.$$

engendre le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{F}_q)$. Par le théorème 90 de Hilbert, il existe α_i de K_i tel que

$$\varphi_i(\alpha_i)/\alpha_i = \zeta \ ,$$

de plus $a_i = \alpha_i^n$ appartient à $\mathbb{F}_q$ et α_i engendre $K_i/\mathbb{F}_q$, de sorte que le polynôme minimal de α_i est

$$X^n - a_i \ .$$

Remarquons que

$$a_i^{\frac{q-1}{n}} = \alpha_i^{q-1} = \varphi_i(\alpha_i)/\alpha_i = \zeta \ .$$

Nous en déduisons que

$$(a_1/a_2)^{\frac{q-1}{n}} = 1 \ ,$$

ainsi a_1/a_2 est une puissance n-ième dans $\mathbb{F}_q$. Il existe donc $c \in \mathbb{F}_q$ tel que

$$c^n = a_1/a_2 \ .$$

Nous avons

$$(c\alpha_2)^n = a_1$$

ainsi les polynômes minimaux de α_1 et de $c\alpha_2$ sont égaux, et donc nous avons une solution du problème.

Pour être complet, nous devons donner une solution explicite au théorème 90 de Hilbert. Nous la présentons dans un cadre plus général.

3.2.1 Théorème 90 de Hilbert explicite

Soit k un corps et K/k une extension cyclique de k de degré n , non multiple de la caractéristique de k. Nous notons φ un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Proposition 3.2.1 *Le polynôme caractéristique de φ comme endomorphisme du k–espace vectoriel K est égal à $X^n - 1$.*

Démonstration:
D'une part, nous avons $\varphi^n - \mathrm{id} = 0$, d'autre part, le lemme d'indépendance des caractères de Dirichlet implique que $\mathrm{id}, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}$ sont linéairement indépendants sur k. Nous concluons que le polynôme minimal de φ est $X^n - 1$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, nous concluons que le polynôme caractéristique de φ est égal à $X^n - 1$. ■

Proposition 3.2.2 *Soit $\zeta \in k$ une racine n–ième de l'unité, alors* $\mathrm{Ker}(\varphi - \zeta id)$ *est un k–espace vectoriel de dimension* 1.

Démonstration:

L'entier n n'étant pas multiple de la caractéristique de k, ζ est racine simple du polynôme caractéristique de φ. Cela implique que le sous-espace propre de φ associé à ζ est de dimension 1.

■

Grâce à cette proposition, il suffit de résoudre un système d'équations linéaires pour obtenir une solution explicite au théorème 90 de Hilbert.

3.2.2 Description de l'algorithme

Nous résumons cette méthode dans l'algorithme suivant

Algorithme 3.2.3 *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous notons par B_i la base de puissances $(1, \overline{X}, \ldots, \overline{X}^{n-1})$ de $\mathbb{F}_q[X]/(T_i)$, pour $i \in \{1,2\}$. Nous résolvons le problème 3.1.1 ainsi.*

1. [Calcul de ζ] *Déterminer une racine primitive n–ième de l'unité ζ dans $\mathbb{F}_q$.*
2. [Calcul des φ_i] *Calculer la matrice A_i de l'automorphisme de Frobenius φ_i sur la base B_i, pour $i \in \{1,2\}$.*
3. [Hilbert 90] *Déterminer un vecteur propre V_i de A_i pour la valeur propre ζ, pour $i \in \{1,2\}$.*
4. [Calcul des α_i] *Calculer l'élément $\alpha_i = S_i(\overline{X})$ de K_i dont la représentation sur la base B_i est V_i, pour $i \in \{1,2\}$.*
5. [Calcul des puissances] *Calculer $a_i = \alpha_i^n$ dans $\mathbb{F}_q[X]/(T_i)$ et les convertir en éléments de $\mathbb{F}_q$, pour $i \in \{1,2\}$.*
6. [Calcul de la racine n–ième] *calculer la racine n–ième $c \in \mathbb{F}_q$ de a_1/a_2.*
7. [Fini] *Retourne S_1 et cS_2.*

3.3 Calcul des isomorphismes explicites quand n et q sont premiers entre eux

3.3.1 Extension de la Théorie de Kummer

Soit k un corps et K/k une extension cyclique de k de degré n , non multiple de la caractéristique de k, et soit C l'extension de k engendrée par une racine primitive n–ième de l'unité ζ. Nous notons $r = [C : k]$ et $\mathcal{B}$ la base de C sur k donné par $\mathcal{B} = (\zeta^i)_{i=0}^{r-1}$.

Nous notons φ un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Nous allons travailler dans le (K, C)–bimodule $K \otimes_k C$.

Proposition 3.3.1 *La C–algèbre $K \otimes_k C$ est une algèbre étale, en d'autre mots elle n'a pas d'éléments nilpotents.*

Démonstration:
L'extension K/k étant de degré premier à la caractéristique est séparable. Il existe donc un polynôme irréductible $T \in k[X]$ avec corps de rupture K. Le degré de T n'étant pas multiple de la caractéristique de k, T est séparable. Le corps K est isomorphe à $k[X]/(T)$, ainsi $K \otimes_k C$ est isomorphe $C[X]/(T)$ qui n'a pas d'éléments nilpotents. ∎

Nous étendons φ en un automorphisme $\tilde{\varphi}$ de la k–algèbre $K \otimes_k C$ par

$$\tilde{\varphi}\left|\begin{array}{ccc} K \otimes_k C & \longrightarrow & K \otimes_k C \\ x \otimes y & \longmapsto & \varphi(x) \otimes y \end{array}\right.$$

Le lemme suivant étend la théorie de Galois dans ce contexte.

Lemme 3.3.2 *L'ensemble des éléments de $K \otimes_k C$ fixé par $\tilde{\varphi}$ est $k \otimes_k C$ qui est un corps isomorphe à C.*

Démonstration:
La famille $1 \otimes \mathcal{B} = \{1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_c\}$ est une base de $K \otimes_k C$ comme K–espace vectoriel à gauche. Un élément β de $K \otimes_k C$ s'écrit donc de façon unique sous la forme $\beta = \sum_{i=1}^{c} k_i \otimes b_i$ où les k_i sont des éléments de K et $\tilde{\varphi}(\beta) = \sum_{i=1}^{c} \varphi(k_i) \otimes b_i$. Si $\tilde{\varphi}(\beta) = \beta$ alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant c$ nous avons $\varphi(k_i) = k_i$ de sorte que $k_i \in k$, et donc $\beta \in K \otimes_k C$ qui est un corps isomorphe à C.

■

Nous généralisons la proposition 3.2.2 ainsi.

Proposition 3.3.3 *Le C–espace vectoriel* $\mathrm{Ker}(\tilde{\varphi} - \zeta id)$ *est de dimension* 1.

Démonstration:

Soit $\mathcal{B}'$ une base de K comme k–espace vectoriel, alors $1 \otimes \mathcal{B}' = \{1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_c\}$ est une base de $K \otimes_k C$ comme C–espace vectoriel à droite. La matrice de $\tilde{\varphi}$ sur la base $1 \otimes \mathcal{B}'$ est égal à la matrice de φ sur la base $\mathcal{B}'$. En particulier $\tilde{\varphi}$ et φ ont même polynôme minimal. Ainsi ζ est aussi une valeur propre simple de $\tilde{\varphi}$ et l'espace propre est de dimension 1.

■

La proposition suivante généralise

Proposition 3.3.4 *Soit α un vecteur propre de $\tilde{\sigma}$ pour la valeur propre ζ, alors α^n est non nul et appartient à $k \otimes_k C$.*

Démonstration:
Comme dans la théorie classique, nous avons

$$\tilde{\sigma}(\alpha^n) = ((1 \otimes \zeta)\alpha)^n = \alpha^n \ ,$$

donc α^n appartient au corps fixe $k \otimes_k C$ de $\tilde{\sigma}$. ■

Proposition 3.3.5 *Soit α un vecteur propre de $\tilde{\varphi}$ pour la valeur propre ζ. Si a_0 est la première composante de α sur la base $1 \otimes \mathcal{B}$ de $K \otimes_k C$ sur C, alors a_0 engendre l'extension K/k.*

Démonstration:
Remarquons d'abord que $k(a_0)/k$ est une sous-extension d'une extension cyclique, et donc galoisienne, ainsi tous les conjugués $\{\varphi(a_0)^e; e = 0 \text{ à } n-1\}$ de a_0 sont dans $k(a_0)$.

Écrivons $\alpha = \sum_{i=0}^{r-1}(a_i \otimes \zeta^i)$. Alors $\tilde{\varphi}(\alpha) = \sum_{i=0}^{r-1}(\varphi(a_i) \otimes \zeta^i)$. Si $T = \sum_{i=0}^{r} b_i X^i$ est le polynôme minimal de ζ sur k, alors l'équation $\varphi(\alpha) = \zeta\alpha$ devient dans la base $1 \otimes \mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} \varphi(a_0) \\ \varphi(a_1) \\ \varphi(a_2) \\ \vdots \\ \varphi(a_{r-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & & -b_0 \\ 1 & & & & -b_1 \\ & 1 & & & -b_2 \\ & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -b_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons les relations suivantes.

$$\varphi(a_0) = -b_0 a_{r-1} \tag{3.2}$$
$$\varphi(a_i) = a_{i-1} - b_i a_{r-1} \quad , \ 1 \leqslant i \leqslant r-1 \tag{3.3}$$

Comme b_0 est non nul, nous pouvons récrire l'équation (3.2) ainsi

$$a_{r-1} = -\varphi(a_0)/b_0 \ ,$$

ce qui montre que $a_{r-1} \in k(a_0)$. À l'aide du système triangulaire

$$a_{i-1} = \varphi(a_i) - b_i a_{r-1}$$

pour $i = r-1$ à 1 en décroissant, nous voyons que tous les a_i appartiennent à $k(a_0)$. Soit un entier e tel que $\varphi^e(x) = x$ pour tous les éléments $x \in k(a_0)$, alors $\tilde{\varphi}^e(\alpha) = \alpha$ et donc $\zeta^e\alpha = \alpha$, ce qui équivaut à

$$(\zeta^e - 1)\alpha = 0 \ .$$

Comme nous sommes dans un C–espace vectoriel et que α est non nul, nous concluons donc que $\zeta^e = 1$. Il en résulte que e est un multiple de n. Par théorie de Galois, nous avons nécessairement $K = k(a_0)$. ■

La résolution du système décrit dans cette preuve nous permet de calculer un vecteur propre en ne faisant que des calculs dans K et non dans C.

Algorithme 3.3.6 *Nous déterminons un vecteur propre pour $\tilde{\varphi}$ et la valeur propre ζ sans aucun calcul dans C. Nous notons $T = \sum_{i=0}^{r} b_i X^i$ le polynôme minimal de ζ.*

1. [Matrice] *Calculer la matrice M de l'endomorphisme $T(\varphi)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

2. [Noyau] *Déterminer un élément non-nul a_0 du noyau de M.*

3. [Système triangulaire] *Résoudre le système triangulaire*

$$\begin{aligned} a_{r-1} &= -\varphi(a_0)/b_0 && (3.4)\\ a_{i-1} &= \varphi(a_i) + b_i a_{r-1} \quad \textit{pour } i = r-1 \textit{ à } 1 \textit{ en décroissant} && (3.5) \end{aligned}$$

4. [Terminer] *Retourner $\alpha = \sum_{i=0}^{r-1}(a_i \otimes \zeta^i)$.*

3.3.2 Description de la méthode

Il s'agit d'appliquer les résultats précédents avec $k = \mathbb{F}_q$. Nous construisons d'abord l'extension cyclotomique $C = \mathbb{F}_q(\zeta)$ et nous notons $r = [C : \mathbb{F}_q]$ son degré. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(C/\mathbb{F}_q)$ est généré par

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C \\ y & \longmapsto & y^q \end{array} \right.$$

.

Soit $i \in \{1, 2\}$. L'extension $K_i/\mathbb{F}_q$ est cyclique de degré n. Nous construisons le bimodule $K_i \otimes_k C$. Nous étendons l'automorphisme de Frobenius de K_i en

$$\tilde{\varphi}_i \left| \begin{array}{ccc} K_i \otimes_k C & \longrightarrow & K_i \otimes_k C \\ x \otimes y & \longmapsto & x^q \otimes y \end{array} \right.$$

et celui de C en

$$\tilde{\psi}_i \left| \begin{array}{ccc} K_i \otimes_k C & \longrightarrow & K_i \otimes_k C \\ x \otimes y & \longmapsto & x \otimes y^q \end{array} \right.$$

Ces deux automorphismes commutent et nous avons

$$\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\psi}_i(\gamma) = \gamma^q$$

pour tout $\gamma \in K_i \otimes_k C$. Par la proposition 3.3.3, il existe α_i de $K_i \otimes_k C$ tel que

$$\tilde{\varphi}_i(\alpha_i) = \zeta\alpha_i \ ,$$

de plus $a_i = \alpha_i^n$ appartient à C. Remarquons que

$$a_i^{\frac{q^r-1}{n}}\alpha_i = \alpha_i^{q^r} = (\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\psi}_i)^r(\alpha_i) = \tilde{\varphi}_i^{\,r} \circ \tilde{\psi}_i^{\,r}(\alpha_i) = \zeta^r\alpha_i \ .$$

de sorte que

$$a_i^{\frac{q^r-1}{n}} = \zeta^r \ .$$

Nous en déduisons que

$$(a_1/a_2)^{\frac{q^r-1}{n}} = 1 \ ,$$

ainsi a_1/a_2 est une puissance parfaite dans $\mathbb{F}_q(\zeta)$. Il existe donc $c \in \mathbb{F}_q(\zeta)$ tel que

$$c^n = a_1/a_2 \ .$$

Nous avons

$$(c\alpha_2)^n = a_1$$

ainsi les polynômes minimaux de α_1 et $c\alpha_2$ sont égaux, et donc nous avons une solution du problème.

3.3.3 Description de l'algorithme

Algorithme 3.3.7 *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous notons par B_i la base de puissances $(1, \overline{X}, \ldots, \overline{X}^{n-1})$ de $\mathbb{F}_q[X]/(T_i)$, pour $i \in \{1,2\}$. Nous résolvons le problème 3.1.1 ainsi.*

1. [Calcul de ζ] *Déterminer un facteur irréductible F du n-ième polynôme cyclotomique sur $\mathbb{F}_q$ et poser $C = \mathbb{F}_p[X]/(F)$ et $\zeta = \overline{X}$.*

2. [Calcul des Frobenius] *Calculer la matrice A_i de l'automorphisme de Frobenius de K_i sur la base B_i, pour $i \in \{1,2\}$.*

3. [Algorithme 3.3.6] *Appliquer l'algorithme 3.3.6 pour obtenir un vecteur propre V_i de A_i pour la valeur propre ζ sur le corps C, pour $i \in \{1,2\}$.*

4. [Calcul des α_1] *Calculer l'élément α_i de $K_i \otimes C$ dont la représentation sur la base $B_i \otimes 1$ est V_i, pour $i \in \{1,2\}$.*

5. [Calcul des puissances] *Calculer $a_i = \alpha_i^n$ dans $K_i \otimes C$ et les convertir en éléments de C.*

6. [Calcul de la racine n-ième] *Extraire une racine n-ième c de a_1/a_2 dans le corps C.*

7. [Calcul des S_i] *Calculer la première composante S_1 de α_1 dans la base $\{1 \otimes 1, 1 \otimes \zeta, \ldots, 1 \otimes \zeta^{\deg F - 1}\}$ et la première composante S_2 de $c\alpha_2$ dans la base $\{1 \otimes 1, 1 \otimes \zeta, \ldots, 1 \otimes \zeta^{\deg F - 1}\}$.*

Cet algorithme comporte deux étapes qui ne sont pas élémentaires :

1. La factorisation sur $\mathbb{F}_p$ des polynômes cyclotomique. Cela est résolu en pratique par [Shoup1, Théorème 9].
2. L'extraction d'une racine n-ieme dans un corps fini. Pour cela nous utilisons une généralisation de l'algorithme de Shanks pour extraire les racines n-ième dans un corps premier fini. Notons que par extraction successive, nous pouvons nous ramener au cas de l'extraction d'une racine ℓ-ième, où ℓ est un nombre premier divisant $q-1$.

   Algorithme 3.3.8 *Soit K un corps fini avec q éléments et soit ℓ un nombre premier divisant $q-1$. Soit r et e tel que $q-1 = \ell^e r$ et tel* *que ℓ ne divise pas r. Nous calculons une racine ℓ-ième x de l'élément $a \in K$, si elle existe comme suit :*

1. [Trouver une racine ℓ-ième] *Choisir des éléments $y \in K$ au hasard jusqu'à ce que $y^{(q-1)/\ell} \neq 1$ et alors poser $z := y^{(q-1)/\ell}$.*

2. [Bezout] *Calculer u_1 et u_2 tel que $ru_1 + \ell u_2 = 1$.*

3. [Initialisation] *Poser $x := a^{u_2}$, $b := a^{-ru_1}$.*

4. [Boucle] *Tant que $b > 1$, exécuter les étapes suivantes :*

4.1. [Calcul de l'exposant] *Trouver le plus petit entier m tel que $b^{\ell^m} = 1$. Si $m = e$, terminer et retourner «l'élément a n'est pas une puissance ℓ-ième dans K».*

4.2. [Logarithme discret] *Calculer le plus petit entier n tel que $z^n = b^{-\ell^{m-1}}$.*

4.3. [Réduire l'exposant] *Poser $w := y^{n\ell^{e-m-1}}$, $z := z^n$, $e := k$, $x := wx$, $y := w^\ell$ et $b := yb$.*

5. [Fin] *Retourner x.*

3. Dans notre implantation dans PARI/GP, l'étape 5 prends la majorité du temps.

3.4 Calcul des isomorphismes quand n est une puissance de la caractéristique

3.4.1 Calcul des isomorphismes quand n est égal à la caractéristique

Soit p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$, et r tel que $q = p^r$. Nous supposons dans cette section que $n = p$. L'extension $K_i/\mathbb{F}_q$ est une extension d'Artin–Shreier. Considérons l'endomorphisme $\mathbb{F}_q$–linéaire

$$\Delta_i \left| \begin{array}{ccc} K_i & \longrightarrow & K_i \\ \alpha & \longmapsto & \alpha^q - \alpha \end{array} \right.$$

Un calcul évident montre que $\operatorname{Ker} \Delta_i = \mathbb{F}_q$ et $\operatorname{Im} \Delta_i \subset \operatorname{Ker} \operatorname{tr}_{K_1/\mathbb{F}_q}$. Par le théorème du rang, il vient que $\operatorname{Im} \Delta_i = \operatorname{Ker} \operatorname{tr}_{K_i/\mathbb{F}_q}$.

Soit $a \in \mathbb{F}_q$, alors $\operatorname{tr}_{K/\mathbb{F}_q}(a) = 0$, ainsi $a \in \operatorname{Im} \Delta_i$. Il existe donc $\beta_i \in K_i$ tel que $\beta_i^q - \beta_i = a$. Posons $\alpha_i = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_i^{p^j}$. Nous avons $\alpha_i^p - \alpha_i = a$ et donc α_i annule le polynôme $X^p - X - a$. La proposition suivante découle de la théorie d'Artin-Shreier:

Proposition 3.4.1 *Soit $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ une extension de corps finis de caractéristique*

p, et $a \in \mathbb{F}_q$. Alors le polynôme $X^p - X - a$ est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si $\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a) \neq 0$.

Il en résulte que sous la condition $\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a) \neq 0$, le polynôme $X^p - X - a$ est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ et que α_i engendre K_i. De plus, les polynômes minimaux de α_1 et de α_2 sont égaux à $X^p - X - a$, et donc nous avons une solution du problème.

3.4.2 Calcul des isomorphismes quand n est une puissance de la caractéristique

Nous supposons dans cette section que $n = p^k$ pour un entier k.

Nous allons construire une chaîne de sous-corps et appliquer k fois le résultat de la section précédente, mais pour éviter de devoir déterminer k éléments de trace non nuls, nous utilisons le lemme suivant (voir [Shoup1, Lemma 2.3]).

Lemme 3.4.2 *Soit K un corps fini de caractéristique p et $a \in K$. Supposons que le polynôme $X^p - X - a$ est irréductible dans $K[X]$. Alors, si $E = K(\alpha)$ pour une racine α de $X^p - X - a$, le polynôme $X^p - X - a\alpha^{p-1}$ est irréductible sur $E[X]$.*

Notons $K_{1,0} = K_{2,0} = \mathbb{F}_p$, $a_{1,0} = a_{2,0} = a$, $\alpha_{1,0} = \alpha_{2,0} = 1$. Nous définissons par récurrence les sous-corps $K_{i,j}$ de K_i, et les éléments $a_{i,j}$ et $\alpha_{i,j}$ de $K_{i,j}$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $1 \leq j \leq k$ par

- $a_{i,j} = a_{i,j-1}\alpha_{i,j-1}$
- $\alpha_{i,j}$ est une racine du polynôme $X^p - X - a_{i,j}$ dans le corps K_i
- $K_{i,j}$ est le sous-corps de K_i engendré par $\alpha_{i,j}$.

Pour chaque $1 \leq j \leq k$, il existe un isomorphisme entre $K_{1,j}$ et $K_{2,j}$ envoyant $\alpha_{1,j}$ sur $\alpha_{2,j}$. En particulier, pour $j = k$, nous pouvons calculer explicitement un isomorphisme entre K_1 et K_2.

3.4.3 Description de l'algorithme

Nous résumons cette méthode dans l'algorithme suivant

Algorithme 3.4.3 *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous notons par B_i la base de puissances $(1, \overline{X}, \ldots, \overline{X}^{n-1})$ de $\mathbb{F}_q[X]/(T_i)$, pour $i \in \{1, 2\}$. Nous résolvons le problème 3.1.1 ainsi.*

1. [Calcul de a] *Déterminer un élément a de $\mathbb{F}_q$ de trace non nul. (Si q est premier, $a = 1$ convient.)*

2. [Calcul des Δ_i] *Calculer la matrice A_i de l'opérateur Δ_i sur la base B_i, pour $i \in \{1,2\}$.*

3. [Initialisation] *Poser $a_1 := a$, $a_2 := a$, $\alpha_1 := 1$ et $\alpha_2 := 1$.*

4. [Boucle] *Répéter k fois les étapes suivantes*

  4.1. [Lemme 3.4.2] *Poser $a_1 := a_1\alpha_1^{p-1}$ et $a_2 := a_2\alpha_2^{p-1}$.*

  4.2. [Calcul des coordonnées] *Calculer le vecteur W_i exprimant a_i sur la base B_i, pour $i \in \{1,2\}$.*

  4.3. [Théorème de Hilbert] *Résoudre le système linéaire $A_iV_i = W_i$, pour $i \in \{1,2\}$.*

  4.4. [Calcul des β_i] *Calculer l'élément β_i de K_i dont la représentation sur la base B_i est V_i, pour $i \in \{1,2\}$.*

  4.5. [Calcul des α_i] *Calculer l'élément $\alpha_i := \sum_{j=0}^{r-1} \beta_i^{p^j}$, pour $i \in \{1,2\}$ (Si q est premier, $\alpha_i = \beta_i$).*

5. [Fini] *Retourner α_1 et α_2.*

3.5 Calcul des isomorphismes dans le cas général

Nous voulons combiner les deux algorithmes précédents pour résoudre le cas général. Écrivons $n = mp^k$ où m n'est pas multiple de la caractéristique p de $\mathbb{F}_q$. Pour $i \in \{1,2\}$, nous notons K_i' le sous-corps de degré m de K_i, et K_i'' le sous-corps de degré p^k de K_i. Par application des méthodes précédentes, nous pouvons déterminer $\alpha_1', \alpha_1'' \in K_1$ et $\alpha_2', \alpha_2'' \in K_2$ tel que

- L'élément α_i' engendre K_i' et α_i'' engendre K_i'', pour $i \in \{1,2\}$.
- Les polynômes minimaux de α_1' et de α_2' sont égaux.
- Les polynômes minimaux de α_1'' et de α_2'' sont égaux.

Nous déterminons aisément un isomorphisme entre K_1 et K_2 à l'aide de la

Proposition 3.5.1 *Sous les hypothèses précédentes, posons $\alpha_i = \alpha_i' + \alpha_i''$, pour $i \in \{1,2\}$, alors*

- *L'élément α_i engendre K_i pour $i \in \{1,2\}$.*
- *Les polynômes minimaux de α_1 et α_2 sont égaux.*

3.5.1 Solution du problème original

Pour résoudre le problème original où $\deg T_1 = \deg T_2 = n$, nous devons ajouter les étapes suivantes

1. [Changement de base] Calculer la matrice M exprimant la base $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1^{n-1})$ de K_1 en fonction de B_1.

2. [Expression de $\overline{X}$] Résoudre en V le système linéaire

$$MV = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

et soit S_1' le polynôme dont la représentation dans la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ est V.

3. [Substituer] Calculer $S = S_1' \circ S_2 \pmod{T_2}$ et retourner S.

3.6 Factorisation sur une extension

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ et soit T_2 un polynôme irréductible définissant une extension $\mathbb{F}_q[X]/(T_2)$ de $\mathbb{F}_q$ de degré n. Nous voulons factoriser P sur $\mathbb{F}_q[X]/(T_2)$ à l'aide du lemme 2.3.1. Pour cela, nous factorisons d'abord P sur $\mathbb{F}_q$ pour nous ramener à la factorisation d'un facteur irréductible T_1 de P. Posons $L = \mathbb{F}_q[X]/(T_1)$. L'extension $L/\mathbb{F}_q$ étant galoisienne, il nous suffit de calculer l'intersection $L \cap \mathbb{F}_q[X]/(T_2)$. Le degré de l'intersection étant le plus grand diviseur commun d des degrés, il suffit de calculer un isomorphisme entre les sous-corps de degré d de $\mathbb{F}_q[X]/(T_1)$ et de $\mathbb{F}_q[X]/(T_2)$.

Algorithme 3.6.1 *Il s'agit de factoriser P sur $\mathbb{F}_q[X]/(T_2)$. Factoriser P sur $\mathbb{F}_q$ et appliquer l'algorithme suivant à chaque facteur irréductible T_1 de P, et retourner la factorisation.*

1. [Calcul de l'intersection] *Calculer le plus grand diviseur commun d des degrés de T_1 et T_2.*

2. [Calcul de l'isomorphisme] *Calculer un isomorphisme entre les sous-corps K_i d'ordre d de $\mathbb{F}_q[X]/(T_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$ donné par l'image $\alpha_2 \in K_2$ d'un α_1 de K_1.*

3. [Calcul de la factorisation] *Calculer*

$$Q_1(Y) = \prod_{0 \leq k < n/d} (Y - \overline{X}^{p^{dk}})$$

dans K_1, où $\overline{X}$ représente la classe de X in $\mathbb{F}_q[X]/(T_2)$.

4. [Appliquer l'isomorphisme] *Convertir les coefficients de Q_1 en éléments de K_1 et appliquer l'isomorphisme $\alpha_1 \longmapsto \alpha_2$ à chacun d'eux, pour obtenir un facteur $Q_2 \in K_2[X]$.*

5. [Calcul des facteurs conjugués] *Calculer les facteurs conjugués de Q_2 en appliquant les puissance successives de l'automorphisme de Frobenius du corps K_2 à tout les coefficients de Q_2.*

Chapitre 4

Calcul explicite des automorphismes galoisiens

They sought it with thimbles, they sought it with care;
    They pursued it with forks and hope;
They threatened its life with a railway-share;
    They charmed it with smiles and soap.

Lewis Carroll, The Hunting of the Snark

4.1 Introduction

4.1.1 Présentation du problème

Soit $T \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire et irréductible de degré n, α une racine de T et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ son corps de rupture. Il s'agit de donner un algorithme qui

- détermine si K est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$
- dans ce cas, retourne l'image de α par chacun des automorphismes.

Dans la suite nous supposerons que l'extension *est* galoisienne. En effet, à la fin de l'algorithme, si nous avons réussi à determiner n automorphismes distincts, nous avons *prouvé* que l'extension est galoisienne. Sinon, soit l'algorithme n'a pas été capable de résoudre le problème, soit l'extension n'est pas galoisienne. Si pour une raison ou une autre nous sommes sûrs d'être dans le cadre dans lequel l'algorithme retourne une réponse, alors nous avons prouvé que l'extension n'est pas galoisienne.

4.1.2 Représentation des automorphismes

Nous avons vu dans le premier chapitre deux façons de représenter un automorphisme.

- Soit par un polynôme S vérifiant $T \mid T \circ S$.
- Soit comme une paire ψ, φ où ψ est une permutation des places au-dessus de ℓ et φ une famille d'isomorphismes locaux.

Nous allons préciser la deuxième représentation:

Nous supposons que p est un nombre premier non ramifié, et pour des raisons algorithmiques, qu'il ne divise pas le discriminant de T.

Nous décomposons p en produits d'idéaux premiers

$$(p) = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{P}_i$$

et nous notons $\mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i} = \mathbb{Z}_K/(\mathfrak{P}_i)$ les corps résiduel et f_p le degré résiduel de p. Nous rappelons que nous avons le morphisme

$$\Gamma_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_K & \longrightarrow & \mathbb{Z}_K/(p) \cong \prod_{i=1}^{g} \mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i} \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha \pmod{\mathfrak{P}_i})_{i=1}^{g} \end{array} \right.$$

Proposition 4.1.1 *L'application*

$$f \left| \begin{array}{lll} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_K/p\mathbb{Z}_K) \cong \mathrm{Aut}(\prod_{i=1}^{g} \mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i}) \\ \sigma & \longmapsto & (x + p\mathbb{Z}_K \mapsto \sigma(x) + p\mathbb{Z}_K) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe injectif.

Démonstration:
Soit $\sigma \in \mathrm{Ker}\,\Delta$. Alors en particulier $\sigma(x) \equiv x \pmod{\mathfrak{L}_1}$, donc σ appartient au groupe d'inertie de $\mathfrak{L}_1$ qui est réduit à l'identité car $\mathfrak{L}_1$ n'est pas ramifié dans $K/\mathbb{Q}$. ■

La proposition suivante nous donne la structure de $\mathrm{Aut}(\prod_{i=1}^{g} \mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i})$

Proposition 4.1.2 *On note $\iota_{i,j}$ un isomorphisme de $\mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i}$ sur $\mathbb{F}_{\mathfrak{P}_j}$. Le groupe $\mathrm{Aut}(\prod_{i=1}^{g} \mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i})$ est isomorphe au produit en couronne $\mathcal{W} = \mathbb{Z}/f\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_g = (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^g \rtimes \mathfrak{S}_g$, de cardinal $f^g g!$ où la multiplication est donné par*

$$((a_i)_{i=1}^{g}; \sigma)((b_i)_{i=1}^{g}; \tau) = ((a_i + b_{\sigma(i)})_{i=1}^{g}; \sigma\tau)$$

Explicitement, l'application

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/f\mathbb{Z} \wr \mathfrak{S}_g & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\prod_{i=1}^{g} \mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i}) \\ ((a_i)_{i=1}^g;\sigma) & \longmapsto & ((x_i)_{i=1}^g \mapsto (\iota_{\sigma(i),i}(x_{\sigma(i)})^{p^{a_i}})) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupe.

Démonstration:
Soit $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_K/p\mathbb{Z}_K)$. Les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}_K/p\mathbb{Z}_K$ sont les $(\mathfrak{P}_i/p\mathbb{Z}_K)_{i=1}^g$. L'image par un automorphisme d'un idéal maximal est un idéal maximal, donc ρ permute les $\mathfrak{P}_i$. Il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_g$ tel que $\rho(\mathfrak{P}_i/p\mathbb{Z}_K) = \mathfrak{P}_{\sigma(i)}/p\mathbb{Z}_K$. Soit $\mathfrak{Q}_i = \bigcap_{j\neq i} \mathfrak{P}_j$, alors $\mathfrak{Q}_i/p\mathbb{Z}_K \cong \mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i}$ et $\rho(\mathfrak{Q}_i) = \mathfrak{Q}_{\sigma(i)}$, ainsi $\iota_{i,\sigma(i)}^{-1} \circ \rho$ est un automorphisme de $\mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i}$, or $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{\mathfrak{P}_i}/\mathbb{F}_p)$ est engendré par l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$, il existe donc $a_i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ tel que $\iota_{i,\sigma(i)}^{-1} \circ \rho = x \mapsto x^{p^{a_i}}$, on en déduit que[1]

$$\rho((x_i)_{i=1}^g) = (\iota_{\sigma^{-1}(i),i}(x_{\sigma^{-1}(i)})^{p^{a_i}}) \ .$$

■

Définition 4.1.3 *L'application*

$$h \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ \sigma & \longmapsto & \tilde\sigma \textit{ tel que } f(\sigma) = g(\tilde\sigma) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe injectif et nous noterons $\tilde G$ son image.

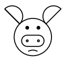
Nous pouvons donc représenter un automorphisme σ par son image $\tilde\sigma$ dans le groupe $\mathcal{W}$.

4.1.3 Relèvement des automorphismes modulo p

Proposition 4.1.4 *L'application h se décompose en un composé de trois applications h_1, h_2 et g comme suit:*

$$h \left| \begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{h_1} & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_K/(p^e)) & \xrightarrow{h_2} & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_K/(p)) & \xrightarrow{g} & \mathcal{W} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \pmod{p^e} & \longmapsto & \sigma \pmod{p} & \longmapsto & \tilde\sigma \end{array} \right.$$

de plus h_1 est un morphisme injectif et h_2 un isomorphisme de groupes.

1. Si quelqu'un peut me prouver que les indices sont justes, il a droit a un exemplaire gratuit et dédicacé de gp2c 

Nous pouvons dons relever via h_2 les automorphismes modulo p en automorphismes modulo p^e pour lequel il est facile de savoir s'ils proviennent de l'image de h_1 et d'en obtenir le cas échéant une représentation polynomiale, à l'aide des techniques déjà mentionnées que nous détaillerons plus loin.

4.1.4 Stratégie de détermination de $\tilde{G}$

Nous sommes donc capables de déterminer G à condition de connaître son image $\tilde{G}$. Pour ce faire nous allons utiliser des stratégies combinatoires.

Nous introduisons la définition suivante:

Définition 4.1.5 *Un automorphisme $\sigma \in G$ est dit* ***diagonal*** *(par rapport à p) s'il ne permute pas les idéaux premiers au-dessus de p, c'est-à-dire si* $\tilde{\sigma} \in (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^g \times \{1\}$

Pour des raisons combinatoires, nous ne considérerons dans la suite que deux cas:

- Nous cherchons à relever des éléments diagonaux.
- Nous avons choisi un nombre premier totalement décomposé, de sorte que $\mathcal{W}$ est le groupe de permutation $\mathfrak{S}_n$.

En effet, en dehors de ce cadre, la combinatoire explose et rend extrêmement difficile l'utilisation de cette méthode. Cependant, nous donnerons un exemple d'application lorsque le groupe de Galois est isomorphe au groupe de permutations $\mathfrak{S}_4$.

De plus cette restriction entraîne de nombreuses simplifications algorithmique qui contribuent à l'accélération de l'algorithme. Il pourrait sembler intéressant d'utiliser les éléments *anti-diagonaux*, c'est-à-dire qui appartiennent à $0^g \times \mathfrak{S}_n$, mais cette classe n'est pas fermée sous l'action des automorphismes de G dès que le nombre premier n'est pas totalement décomposé, et donc en aucun cas nous ne pouvons être assuré de l'existence d'un tel élément dans le groupe. Cela vient de la non-unicité de l'immersion de G dans W_c qui dépend du choix de l'*ordre* sur les idéaux premiers.

La stratégie de l'algorithme consiste à

1. Se ramener à l'un des deux cas précédents.
2. Générer un sous-ensemble de $\mathcal{W}$ dans lequel il est raisonnable d'espérer trouver un élément de l'image.
3. Tester tout les éléments de ce sous-ensemble.
4. Recommencer pour trouver d'autres éléments jusqu'à avoir une famille génératrice.

4.2 Procédé algorithmique pour le relèvement des automorphismes

Then a scream, shrill and high, rent the shuddering sky,
And they knew that some danger was near:
The Beaver turned pale to the tip of its tail,
And even the Butcher felt queer.

Lewis Carroll, The Hunting of the Snark

4.2.1 Calcul d'un dénominateur commun aux coefficients des automorphismes

Le polynôme T étant supposé unitaire, les images de α par les automorphismes sont des entiers algébriques. Nous pouvons donc utiliser et determiner un dénominateur commun pour les entiers algébriques comme dans la section 1.1.3.

4.2.2 Calcul d'une borne sur les coefficients des automorphismes

Nous avons besoin d'une borne sur les coéfficients des polynômes représentant les automorphismes. Nous pouvons utiliser des bornes explicites dûes à Mignotte [Landau]. Cependant ces bornes sont génériques et sont en pratique beaucoup trop larges. Nous présentons un procédé permettant d'obtenir des bornes bien meilleures.

Si V est un vecteur à composantes complexes, nous notons $\|V\|$ la norme L^∞ de V. Si M est une matrice carrée à composantes complexes, nous notons $\|M\|$ sa norme matricielle relativement à la norme L^∞, de sorte que nous avons l'inégalité $\|MV\| \leq \|M\|\|V\|$. De plus nous savons que $\|M\|$ est le supremum des normes L^1 des colonnes de M.

Lemme 4.2.1 *Notons $(\sigma_i)_{i=1}^n$ les plongements complexes de K. Soit M la matrice de van der Monde $(\sigma_i(\alpha)^{j-1})$. Alors*

$$B = \|M^{-1}\| \sup(|\sigma_i(\alpha)|)_{i=1}^n$$

majore les composantes des polynômes représentant les automorphismes.

Démonstration:
Soit p la représentation par permutation des plongements complexes d'un automorphisme représenté par le polynôme $S = \sum_{i=1}^n s_i X^{i-1}$ Soit V le vecteur

$(\sigma_{p(i)}(\alpha))_{i=1}^n$. Notons que la norme L^1 ne dépend pas de l'ordre des composantes, donc $\|V\| = \sup(|\sigma_i(\alpha)|)_{i=1}^n$. Nous avons l'identité $M(s_i) = V$. Nous en déduisons

$$\|(s_i)\| = \|M^{-1}V\| \leqslant \|M^{-1}\|\|V\| \leqslant B \ .$$

■

L'utilisation de ce lemme requiert le calcul explicite d'approximations complexes des racines du polynôme. De plus il est nécessaire d'utiliser un algorithme qui retourne des approximations certifiées pour éviter d'obtenir une borne incorrecte, et ce calcul nécessite un certain temps. Néanmoins l'expérience montre que le gain de temps sur l'ensemble de l'algorithme est très important. Le gain vient de la majoration des $1/T'(\sigma_i(\alpha))$ dans l'identité 1.2.

Pour éviter les erreurs d'arrondis, nous procédons ainsi.

Algorithme 4.2.2 *Nous calculons une borne B convenable pour un polynôme T ainsi.*

1. [Mesure de la précision] *Déterminer le supremum sup des valeurs absolues des coefficients de T.*
2. [Calcul des racines] *Obtenir une approximation des racines complexes α_i de T avec une erreur relative inférieure à $1/sup$.*
3. [Plongements] *Numéroter les plongements $(\sigma_i)_{i=1}^n$ de sorte*

$$\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$$

4. [$T'(\alpha)$] *Pour chaque $1 \leq i \leq n$, calculer $T'(\alpha_i)$ à l'aide de la formule*

$$T'(\alpha_i) = \prod_{j \neq i}(\alpha_i - \alpha_j)$$

5. [van der Monde inverse] *Pour chaque $1 \leq i \leq n$ calculer la i–ième ligne $(l_j)_{j=1}^n$ de la matrice grâce à la formule*

$$T(X)/(T'(\alpha_i)(X - \alpha_i))) = \sum_{j=0}^{n-1} l_{j+1}X^j$$

4.2.3 Algorithme pour le test des permutations

Dans cette section, nous avons un nombre premier ℓ totalement décomposé ne divisant pas le discriminant de T, et une précision e. Nous allons utiliser les idées de la section 1.3.4. Nous calculons les racines $(\alpha_i)_{i=1}^n$de T modulo

ℓ et nous les relevons à l'aide du lemme de Hensel, pour obtenir les racines $(\alpha_i)_{i=1}^n$ de T modulo ℓ^e.

Nous souhaitons être capable de tester très rapidement si un élément $w = ((0), \pi) \in \mathcal{W}$ appartient à l'image $\tilde{G}$ de Γ.

Nous calculons l'inverse M de la matrice de van der Monde (α_i^{j-1}). Nous posons $V = (\alpha_{\pi(i)})_{i=1}^n$. Le relèvement modulo p^e de w est donné par le produit MV.

Pour accélérer les calculs, nous précalculons tout les produits $\omega_{i,j,k} = M_{i,j}\alpha_k$ pour $1 \leq i, j, k \leq n$.

Nous pouvons ainsi calculer MV par la formule

$$(\sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j,\pi(i)})_{i=1}^n$$

qui ne nécessite que des additions.

Pour accélérer plus encore les tests nous utilisons quatre techniques:

- Nous choisissons une précision ℓ^e sensiblement plus grande que la borne $2BD$, de sorte que pour presque toute permutation, le produit MV n'aura pas de représentant inférieur à la borne.
- Nous ne calculons d'abord qu'une seule composante de MV et nous testons d'abord si elle admet un représentant plus petit que la borne.
- Nous réutilisons une technique décrite dans [ASZ] et utilisée pour accélérer le $d-1$–test, qui consiste à n'additionner que les premiers mots des ω pour tester l'inégalité.
- Nous essayons de générer les permutations dans un ordre tel que certains termes des additions ne changent pas entre deux permutations, ce qui permet de conserver le résultat partiel. Cette technique est très pénible à mettre en œuvre, mais permet d'améliorer beaucoup la complexité.

4.2.4 Algorithme pour le test des éléments diagonaux

L'algorithme que nous allons proposer repose sur la possibilité de tester très vite si une permutation est la représentation d'un automorphisme. Dès lors nous devons préconditionner le plus possible ce problème.

Nous avons donc choisi un nombre premier p, un précision e, nous avons calculé les plongements naturels p–adiques $(\sigma_i)_{i=1}^g$, la factorisation $T = \prod T_i \pmod{p^i}$, et la base d'idempotents $(U_i)_{i=1}^n$. Nous souhaitons être capable de tester très rapidement si un élément diagonal $w = ((b_i)_{i=1}^g, id) \in \mathcal{W}$ appartient à l'image $\tilde{G}$ de Γ.

Nous allons d'abord relever $w_1 = ((1)_{i=1}^g, id)$. Cet élément correspond à l'élément de Frobenius modulo chaque idéal premier au dessus de p. Nous relevons d'abord l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{F}_p$ en un automorphisme p-adique de l'algèbre $\mathbb{Z}_K/(p^e)$. Pour cela nous procédons comme indiqué dans [AcKl] :

Nous considérons que $X^p \pmod{T, p}$ est une racine simple du polynôme $T \pmod{T, p}$ et nous pouvons donc la relever par relèvement de Hensel en une racine de $T \pmod{T, p^e}$.

Proposition 4.2.3 *Sous les hypothèses précédentes sur T et p, soit $S_0 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $T \circ S_0 \equiv 0 \pmod{p, T}$, et soit $W_0 \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant $W_0 T'(S_0) \equiv 1 \pmod{p, T}$. Il existe une unique suite $(S_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{Z}[X]$ vérifiant*

$$T(S_k) \equiv 0 \pmod{p^{2^k}, T} \text{ et } S_k \equiv S_0 \pmod{p, T}$$

et une unique suite $(W_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{Z}[X]$ vérifiant

$$W_k T'(S_k) \equiv 1 \pmod{p^{2^k}, T} \text{ et } W_k \equiv W_0 \pmod{p, T}$$

Et nous pouvons les construire par les relations de récurrence

$$S_{k+1} \equiv S_k - W_k T(S_k) \pmod{p^{2^{k+1}}, T} \tag{4.1}$$
$$W_{k+1} \equiv (2 - W_k T'(S_{k+1}))W_k \pmod{p^{2^{k+1}}, T} \tag{4.2}$$

En pratique, nous utilisons l'algorithme suivant, qui utilise le procédé de reconstruction des rationnels et l'algorithme décrit dans [BrKu] pour le calcul de la composition modulaire de polynôme.

Algorithme 4.2.4 *Soit connue une borne B et un dénominateur D pour les automorphismes, et soit p un nombre premier ne divisant ni D ni le dénominateur de T, et un entier e tel que $p^e > 2BD$. Nous déterminons un polynôme S vérifiant*

$$S \equiv X^p \pmod{p, T} \tag{4.3}$$
$$T(S) \equiv 0 \pmod{p^e, T} \tag{4.4}$$

1. [Frobenius] *Nous calculons*

$$S_0 = X^p \pmod{p, T}$$

par exponentiation binaire

2. [Inversion] *Nous calculons*

$$W_0 = T'(S_0)^{-1} \pmod{p, T}$$

par l'algorithme du sous-résultant.

3. [Exposants] *Soit* $l = [\log_2(e)]$. *Nous construisons la suite d'entiers* $(e_i)_{i=0}^{l}$ *définie par récurrence décroissante, telle que* $e_l = n$ *et* $e_{k-1} = [\frac{e_k+1}{2}]$ *pour* $n \geq k \geq 1$.

4. [Récurrence] *Pour* $i = 0$ *à* $l - 1$, *exécuter les étapes suivantes:*

4.1. [Puissances] *Soit* $m = \lceil \sqrt{n} \rceil$. *Nous précalculons les puissances* $S_i^j \pmod{T, p^{e_{i+1}}}$ *pour* $0 \leq j \leq m$.

4.2. [Calcul de W_i] *Si* $i > 0$, *à l'aide de l'algorithme pour la composition modulaire de polynômes, nous calculons*

$$T'(S_i) \pmod{p^{e_i}, T}$$

et nous posons

$$W_i \equiv (2 - W_{i-1}T'(S_i))W_{i-1} \pmod{p^{e_i}, T}$$

4.3. [Calcul de S_{i+1}] *À l'aide de l'algorithme pour la composition modulaire de polynôme, nous calculons*

$$T(S_i) \pmod{p^{e_{i+1}}, T}$$

et nous posons

$$S_{i+1} \equiv S_i - W_i T(S_i) \pmod{p^{e_{i+1}}, T}$$

4.4. [Reconstruction] *Si* $i < l - 1$ *Nous appliquons le procédé de reconstruction des rationnels au composantes de* S_i. *Si nous obtenons à chaque fois un dénominateur divisant* D, *nous testons si le polynôme reconstruit* S *vérifie l'identité 4.4 et dans ce cas nous retournons immédiatement* S.

5. [Fin] *Nous retournons* $S = S_l$.

Remarque:

La composition modulaire de l'étape 2 est effectuée avec une précision moindre et prend un temps négligeable par rapport à l'étape 3, ainsi nous avons préconditionné l'étape 1 pour une seule évaluation.

Nous avons donc à déterminer S tel que $g \circ h_2(S) = w_1$. Nous devons relever $w_j = ((j)_{i=1}^{g}, id)$ pour $0 \leq j < f_p$. Pour cela il suffit de remarquer que $w_j = w_1^j$ et de composer le polynôme $S \pmod{p^e, T}$ avec lui-même $j - 1$ fois, avec l'aide de l'algorithme de composition modulaire précité.

Avec ces données, le relèvement modulo p^e de w est

$$Q = \sum_{i=1}^{g} w_{b_i} U_i \quad .$$

Pour accélérer plus encore les tests nous utilisons quatre techniques:
- Nous choisissons une précision ℓ^e sensiblement plus grande que la borne $2BD$, de sorte que pour presque toute permutation, le produit MV n'aura pas de représentant inférieur à la borne.
- Nous ne calculons d'abord qu'un seul coéfficient de Q et nous testons d'abord s'il admet un représentant plus petit que la borne

4.3 Exemple de stratégie combinatoire

He thought of his childhood, left far far behind–
    That blissful and innocent state–
The sound so exactly recalled to his mind
    A pencil that squeaks on a slate!

Lewis Carroll, The Hunting of the Snark

4.3.1 Le groupe $\mathfrak{A}_4$

Une méthode simple pour calculer le groupe de Galois serait de tester toutes les permutations possibles des racines, mais il faudrait tester $n!$ et l'on serait limité au petites valeurs de n. Une méthode bien plus complexe consiste à tester tous les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_n$.

Nous allons montrer comment la mettre en œuvre en pratique dans le cas particulier où l'on veut tester si un polynôme T de degré 12 est galoisien de groupe $G \cong \mathfrak{A}_4$.
G agit simplement transitivement sur les racines. Un élément $g \in G$ agit comme une permutation dont tous les cycles sont de même longueur, sinon si l est la longueur du plus petit cycle alors $g^l \neq 1$ et a des points fixes. Le nombre de permutations décomposables en produit de cycles de longueur l est donné par

$$\frac{n!}{(n/l)!l^{(n/l)}}$$

Dans $\mathfrak{A}_4$ il y a des éléments d'ordre 2 et 3.
- Pour 2 on trouve 10395 permutations.
- Pour 3 on trouve 246400 permutations.

– En fait à n fixé, c'est une fonction croissante de l.

Nous pouvons donc déterminer un élément σ d'ordre 2 en testant au plus 10395 permutations.

Il s'agit maintenant de déterminer les deux autres automorphismes d'ordre 2 ,que l'on notera τ et υ. Dans $\mathfrak{A}_4$, cela nous donne les relations $\sigma\tau = \tau\sigma = \upsilon$.

En abrégeant les racines par leurs numéros et quitte à changer la numérotation, on suppose que la décomposition de σ en cycle est

$$(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)\ .$$

Pour $\tau(1)$ il y a encore 10 valeurs possibles: les racines numéro 3 à 12.

Commençons par supposer que $\tau(1) = 3$ alors $\sigma\tau(1) = 4$ et donc $\tau\sigma(1) = 4$ et donc $\tau(2) = 4$, et bien sur $\tau(3) = 1$ et $\tau(4) = 2$.

Nous connaissons automatiquement 3 nouvelles valeurs de τ. Pour $\tau(5)$ il ne reste plus que 6 choix : les racines numéro 7 à 12. Cela nous donnera encore 4 nouvelle valeurs , par exemple si $\tau(5) = 7$ alors $\tau(6) = 8$.

Il ne reste plus que deux choix pour $\tau(9)$: les racines numéro 11 et 12. En résumé, nous avons τ et υ en testant en tout $10 \times 6 \times 2 = 120$ permutations.

En fait, quitte à échanger τ et υ on peut toujours supposer que $\tau(1)$ est impair, ce qui nous laisse 60 permutations à tester.

Il nous manque encore les 8 éléments d'ordres 3, il en existe un, noté ρ tel que $\rho\sigma = \tau\rho$ et $\rho\tau = \upsilon\rho$, et un raisonnement analogue nous permet de trouver ρ avec seulement 15 tests.

Comme ρ, σ et τ engendre $\mathfrak{A}_4$, nous avons terminé. Nous avons testé dans le pire cas 10470 permutations au lieu de 12!=479001600.

4.3.2 Conclusion

L'essentiel des tests est fait pour déterminer le premier élément. Il faut commencer par déterminer les éléments d'ordres minimaux. Après le nombre de tests chute beaucoup, car le nombre de sous-groupes transitifs possibles de $\mathfrak{S}_n$ décroît très vite Il faut au moins $\frac{n!}{(n/2)!2^{(n/2)}}$ tests. Cette méthode est donc valable jusqu'à environ $n = 16$ où il faut tester 2027025 permutations. Le problème est de générer rapidement les bonnes permutations à tester dans un cadre général.

4.4 Calcul des automorphismes d'une extension de groupe de Galois $\mathfrak{S}_4$

"'Tis the voice of the Jubjub!" he suddenly cried.
(This man, that they used to call "Dunce.")

"As the Bellman would tell you," he added with pride,
"I have uttered that sentiment once.

Lewis Carroll, The Hunting of the Snark

Dans cette section nous calculons les automorphismes galoisiens d'un corps de nombres galoisien de groupe de Galois $\mathfrak{S}_4$

Nous allons adopter une stratégie en accord avec les remarques faites précédemment.

- Nous devons choisir un nombre premier p ayant le plus grand degré résiduel possible.
- Nous devons calculer des générateurs d'ordre minimal.
- Nous devons avoir des relations simples entre les générateurs.

Pour mettre en œuvre cette stratégie, nous allons utiliser un nombre premier p de degré résiduel égal à 4 et la présentation du groupe $\mathfrak{S}_4$ donnée par son isomorphisme avec le groupe de Coxeter de type $\mathbf{A}_3$,

$$\langle \alpha, \beta, \gamma | \alpha^2, \beta^2, \gamma^2, (\alpha\beta)^3, (\beta\gamma)^3, (\alpha\gamma)^2 \rangle \ ,$$

où par exemple $\alpha = (1\ 2)$, $\beta = (2\ 3)$ et $\gamma = (3\ 4)$.

4.4.1 Détermination de α

Soit p un nombre premier non ramifié de degré résiduel 4. Il se décompose en 6 idéaux $(\mathfrak{P}_i)_{i=1}^6$ au-dessus de p. Nous devons donc représenter $\mathfrak{S}_4$ dans le groupe $\mathcal{W} = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^6 \rtimes \mathfrak{S}_6$.

En premier lieu, nous devons calculer l'action de G sur les idéaux$(\mathfrak{P}_i)_{i=1}^6$.

Proposition 4.4.1 *Le groupe de Galois G agit transitivement sur les idéaux $(\mathfrak{P}_i)_{i=1}^6$ et le stabilisateur $\mathrm{Stab}(\mathfrak{P}_1)$ est engendré par $\varphi_1 = \left(\frac{\mathfrak{P}_1}{L/K}\right)$. Notons par $(C_i)_{i=1}^6$ les classes à gauche de G modulo $\langle \varphi_1 \rangle$, nous avons l'équivalence*

$$\forall i \forall j \quad \sigma(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{P}_j \textit{ si et seulement si } \sigma C_i = C_j \ .$$

De plus l'application

$$\Omega \left| \begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_6 \\ \sigma & \longmapsto & \tau \textit{ tel que } \forall i \quad \sigma C_i = C_{\tau(i)} \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe injectif qui envoie les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$ sur celles de $\mathfrak{S}_6$ comme suit.

Ordre	*Classe dans $\mathfrak{S}_4$*	*Card.*	*Classe dans $\mathfrak{S}_6$*	*Card.*	*ratio*
1	*id*	1	*id*	1	1
2	(1 2)	6	(1 2)(3 4)(5 6)	15	2/5
2	(1 2)(3 4)	3	(1 2)(3 4)	45	1/15
3	(1 2 3)	8	(1 2 3)(4 5 6)	40	1/5
4	(1 2 3 4)	6	(1 2 3 4)	90	1/15

Le meilleur ratio est obtenu pour la classe de conjugaison de (1 2), ce qui justifie notre choix de α. Dans la suite, nous notons par $\mathcal{C}$ la classe de conjugaison de (1 2)(3 4)(5 6) dans $\mathfrak{S}_6$.

Proposition 4.4.2 *Les classes à gauche de $\mathfrak{S}_4$ modulo* (1 2 3 4) *sont*

$$\begin{array}{l}\{id,(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4\ 3\ 2)\}\ ,\{(1\ 2),(2\ 3\ 4),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 4\ 3)\}\ ,\\ \{(1\ 3),(1\ 2)(4\ 3),(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}\ ,\{(1\ 4),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 4\ 2),(2\ 4\ 3)\}\ ,\\ \{(2\ 3),(1\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 4\ 2)\}\ \textit{et}\ \{(3\ 4),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}\ .\end{array}$$

Soit Σ l'application

$$\Sigma \left| \begin{array}{lcc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_6 \\ ((a_i)_{i=1}^g;\sigma) & \longmapsto & \sigma \end{array}\right.$$

Proposition 4.4.3 *L'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments h de $\mathcal{W}$ d'ordre* 2 *tel que*

$$\Sigma(h) \in \{(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6),(1\ 2)(3\ 5)(4\ 6),(1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)\}$$

contient au moins un élément de $\tilde{G}$.

Démonstration:

En regardant les classes à gauche de $\mathfrak{S}_4$ modulo (1 2 3 4) listées dans la proposition 4.4.2, nous voyons que chaque classe à gauche contient l'identité où une transposition. Par conjugaison, cette remarque reste vraie pour les classes à gauche de G par $\langle\varphi_1\rangle$. Nous concluons qu'il existe au moins une transposition $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{P}_2$. Par la proposition 4.4.1, $\Omega(\sigma) \in \mathcal{C}$ et $\Omega(\sigma)(1) = 2$, ainsi $\Omega(\sigma) \in \mathcal{S}$. ■

Proposition 4.4.4 *Le cardinal de $\mathcal{S}$ est* 192.

Démonstration:

Soit $g = ((a,b,c,d,e,f),(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)) \in \mathcal{W}$. Un calcul trivial nous donne

$$g^2 = ((a+b,b+a,c+d,d+c,e+f,f+e),id)$$

ainsi g est d'ordre 2 si et seulement si $a+b = c+d = e+f = 0$. Ce système admet exactement 64 solutions $(a,b,c,d,e,f) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^6$. Les deux autres permutations conduisant au même résultat , le cardinal de $\mathcal{S}$ est 192. ■

La conclusion de cette section est que nous pouvons trouver un automorphisme α correspondant à une transposition avec seulement 192 tests.

4.4.2 Détermination de γ

Dans dette section nous déterminons un automorphisme $\gamma \neq \alpha$ correspondant à une transposition commutant avec α.

Proposition 4.4.5 *L'ensemble $\mathcal{S}'$ des éléments t de $\mathcal{W}$ d'ordre 2 commutant avec $\tilde{\alpha}$ tel que $\Sigma(t)$ est dans $\mathcal{C}$ contient exactement un élément de $\tilde{G}$.*

Démonstration:

Il existe exactement un élément $\gamma \neq \alpha$ dans G tel que γ est conjugué à α et commute avec α. Les deux éléments $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\alpha}$ commutent et $\Sigma(\tilde{\gamma})$ est dans $\mathcal{C}$, ainsi $t = \tilde{\gamma}$ est la seule solution. ■

Proposition 4.4.6 *Le cardinal de $\mathcal{S}'$ est* 48.

Démonstration:

L'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ commutant avec (1 2)(3 4)(5 6) est

$$\{(1\ 3)(2\ 4)(5\ 6), (1\ 5)(3\ 4)(2\ 6), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6),$$
$$(1\ 4)(2\ 3)(5\ 6), (1\ 6)(3\ 4)(2\ 5), (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)\}\ .$$

Par conjugaison, il y a exactement six éléments de $\mathcal{C}$ commutant avec$\Sigma(\alpha)$. Soient

$$s = ((a, -a, c, -c, e, -e), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)) \text{ et}$$
$$t = ((a', b', c', d', e', f'), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6))$$

des éléments de $\mathcal{W}$, nous avons les identités

$$\begin{aligned}
st &= ((a + b', a' - a, c + d', c' - c, e + f', e' - e), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)) \\
ts &= ((a' - a, b' + a, c' - c, d' + c, e' - e, f' + e), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)) \\
t^2 &= ((a' + c', b' + d', c' + a', b' + d', e' + f', f' + e'), id)
\end{aligned}$$

ainsi les conditions $st = ts$ et $t^2 = 1$ sont équivalentes à

$$\begin{cases} a' + c' = b' + d' = e' + f' = 0 \\ a + b' = a' - a, \quad c + d' = c' - c, \quad e + f' = e' - e \end{cases}$$

qui conduit à

$$\begin{cases} c' = -a', \quad d' = -b', \quad f' = -e' \\ b' = a' - 2a, \quad c' = 2c - b', \quad 2e' = 2e \end{cases} .$$

Les solutions de ce système sont déterminées par les valeurs de a' et e' donc il y a 8 solutions. Par conjugaison, nous concluons que le cardinal de $\mathcal{S}'$ est $8 \times 6 = 48$. ■
Nous concluons que nous pouvons trouver γ avec seulement 48 tests.

4.4.3 Détermination de β

Dans cette section, nous déterminons β correspondant à une transposition telle que $(\alpha\beta)^3 = (\beta\gamma)^3 = id$

Proposition 4.4.7 *Si s et t sont dans $\mathcal{C}$ et commutent, il existe exactement 4 éléments u de $\mathcal{C}$ vérifiant la relation $(us)^3 = (ut)^3 = 1$.*

Démonstration:
Par conjugaison, nous pouvons réduire le problème au cas où

$$s = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \text{ et } t = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6) \ .$$

Notons d'abord que deux éléments de $\mathcal{C}$ ayant une transposition commune dans leur décomposition en produit de cycles à support disjoint doivent commuter. L'élément u ne peut pas commuter avec s sinon nous aurions $(us)^3 = u^3s^3 = us = 1$ et donc $u = s$ et finalement $(st)^3 = st = 1$ qui est faux, et de la même façon u ne peut pas commuter avec t. Nous concluons que les seules valeurs possibles de u sont

$$(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6),\ (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5),\ (1\ 5)(2\ 3)(4\ 6) \text{ et } (1\ 6)(2\ 3)(4\ 5) \ ,$$

toutes vérifiant $(us)^3 = (ut)^3 = 1$. ■

Proposition 4.4.8 *Soient $s = \Sigma(\tilde{\alpha})$, $t = \Sigma(\tilde{\gamma})$ et $u \in \mathfrak{S}_6$ vérifiant la relation $(us)^3 = (ut)^3 = 1$. L'ensemble $\mathcal{S}''$ de tout les éléments h de $\mathcal{W}$ d'ordre 2 tel que $(\tilde{\alpha}h)^3 = (\tilde{\gamma}h)^3 = 1$ et $\Sigma(h) = u$, contient exactement un élément de $\tilde{G}$.*

Démonstration:

Il existe exactement 4 transpositions $\beta \in G$ tel que $(\alpha\beta)^3 = (\beta\gamma)^3 = id$, et elles sont en bijection par $\Sigma \circ I$ avec les quatre éléments donnés par la proposition 4.4.7. Nous concluons qu'il existe $\beta \in G$ tel que $\Sigma(\tilde{\beta}) = u$. En posant $h = \tilde{\beta}$, nous voyons que h est d'ordre 2 et $(\tilde{\alpha}h)^3 = (\tilde{\gamma}h)^3 = 1$. ■

Proposition 4.4.9 *Le cardinal de $\mathcal{S}''$ est* 8.

Démonstration:
Par conjugaison et pour simplifier, nous supposons que

$$\tilde{\alpha} = ((a, -a, b, -b, c, -c), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)) \ ,$$

$$\tilde{\gamma} = ((e, f, -e, -f, g, -g), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)) \ ,$$

$u = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$ et $\tilde{\beta} = ((h, i, j, -h, -i, -j), u)$. Nous avons les relations

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}\tilde{\alpha} &= ((h-b, i+c, j-c, a-h, -a-i, b-j), (1\ 5\ 3)(2\ 4\ 6)) \\
(\tilde{\beta}\tilde{\alpha})^2 &= ((h-b-a-i, i+c+a-h, j-c+h-b, a-h+b-j, \\
&\quad -a-i+j-c, b-j+i+c), (1\ 3\ 5)(2\ 6\ 4)) \\
(\tilde{\beta}\tilde{\alpha})^3 &= ((h-b-a-i+j-c, i+c+a-h+b-j, j-c+h-b-a-i, \\
&\quad a-h+b-j+i+c, -a-i+j-c+h-b, b-j+i+c+a-h), id)) \\
\tilde{\beta}\tilde{\gamma} &= ((h-f, i+g, j-g, -h+e, -i+f, -j-e), (1\ 6\ 2)(3\ 4\ 5)) \\
(\tilde{\beta}\tilde{\gamma})^2 &= ((h-f-j-e, i+g+h-f, j-g-h+e, -h+e-i+f, \\
&\quad -i+f+j-g, -j-e+i+g), (1\ 2\ 6)(3\ 5\ 4)) \\
(\tilde{\beta}\tilde{\gamma})^3 &= ((h-f-j-e+i+g, i+g+h-f-j-e, j-g-h+e-i+f, \\
&\quad e-h-i+f+j-g, f-i+j-g-h+e, i+g-j-e+h-f), id))
\end{aligned}$$

dons la condition $(\tilde{\beta}\tilde{\alpha})^3 = (\tilde{\beta}\tilde{\gamma})^3 = 1$ équivaut à

$$\begin{cases} h-b-a-i+j-c=0 \\ h-f-j-e+i+g=0 \end{cases}$$

qui conduit à

$$\begin{cases} 2h = a+b+c+f+e-g, \\ i-j = f+e-g-h \end{cases} .$$

Les solutions de ce système sont déterminées par les valeurs de h et de i donc il y a exactement 8 solutions. Par conjugaison, cela est vrai pour toutes valeurs de u,$\tilde{\alpha}$ et de $\tilde{\gamma}$.

Nous concluons donc que le cardinal de $\mathcal{S}'$ est $8 \times 6 = 48$. ■

Nous pouvons donc trouver β avec seulement 8 tests. Puisque α, β et γ engendrent le groupe entier, nous avons résolu le problème avec au plus 248 tests et en 117.6 tests en moyenne.

4.5 Calcul des automorphismes pour une extension de groupe de Galois faiblement hyper-résoluble

"'Tis the note of the Jubjub! Keep count, I entreat;
You will find I have told it you twice.
'Tis the song of the Jubjub! The proof is complete,
If only I've stated it thrice."

Lewis Carroll, The Hunting of the Snark

4.5.1 Résultat sur les groupes hyper-résolubles

Nous rappelons la définition suivante.

Définition 4.5.1 (hyper-résoluble) *Un groupe G est hyper-résoluble si il admet une suite croissante de sous-groupes $(H_i)_{i=0}^n$ telle que*

1. *nous avons $H_0 = \{1\}$ et $H_n = G$,*
2. *pour tout $0 \leqslant i < n$ le sous-groupe H_i est distingué dans G,*
3. *pour tout $0 \leqslant i < n$ le quotient H_{i+1}/H_i est cyclique.*

Jusqu'à $n \leqslant 100$, il n'existe des groupes non hyper-résolubles que de cardinal multiple de 12, de 56, de 75 ou de 80. Il y a un seul groupe non hyper-résoluble d'ordre 12, le groupe $\mathfrak{A}_4$.
Nous admettrons le théorème de structure suivant(voir [Hall, page 169]):

Théorème 4.5.2 *Soit G un groupe hyper-résoluble d'ordre $\prod_{i=1}^{n} p_i$ avec $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$ premiers, alors il existe une suite $(h_i)_{i=1}^n$ d'éléments de G telle que pour tout $1 \leqslant i < n$ le sous-groupe H_i engendré par $(h_j)_{j=1}^i$ est distingué dans G et de cardinal*

$$C_i = \prod_{j=1}^{i} p_j$$

De plus toute suite croissante de sous-groupes distingués peut-être raffinée en une suite de cette nature.

Corollaire 4.5.3 *Si m est un entier tel que $1 \leqslant m < n$ et $p_m \neq p_{m+1}$ alors il existe un et un seul seul sous-groupe d'ordre C_m et il est distingué . De plus tout sous-groupe dont l'ordre divise C_m est inclus dans H_m*

Corollaire 4.5.4 *Les p_1-Sylow de G sont distingués.(i.e. il n'y en a qu'un seul).*

Nous utiliserons aussi le résultat suivant:

Théorème 4.5.5 *Soit G un groupe et p le plus petit diviseur premier de son ordre. Alors tous les sous-groupes d'indice p sont distingués.*

Imaginons que l'on trouve un élément g d'ordre C_m dans le groupe, alors il engendre H_m et donc un sous-groupe distingué et même tous les éléments d'ordre C_m sont des puissances de g. De plus s'il apparaît que le groupe engendré par g n'est pas distingué, cela prouve que le groupe n'est pas hyper-résoluble.

4.5.2 Groupes faiblement hyper-résolubles

Nous introduisons par commodité pour l'étude du champs d'application de l'algorithme la définition suivante:

Définition 4.5.6 (faiblement hyper-résoluble) *Un groupe G est faiblement hyper-résoluble s'il admet une suite croissante de sous-groupes $(H_i)_{i=0}^{n}$ telle que*

1. *nous avons $H_0 = \{1\}$,*
2. *pour tout $0 \leqslant i < n$ le sous-groupe H_i est distingué dans G,*
3. *pour tout $0 \leqslant i < n$ le quotient H_{i+1}/H_i est cyclique,*
4. *et soit $H_n = G$ soit G/H_n est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$.*

La table 4.1 nous montre le nombre de groupes non hyper-résolubles et non faiblement hyper-résolubles d'ordre inférieur à 100.

ordre	nb groupe	nb non H.R.	nb non F.H.R
12	5	1	0
24	15	3	0
36	14	3	1
48	52	10	2
56	13	1	1
60	13	2	1
72	50	13	5
80	52	1	1
84	15	2	0
96	231	36	10

TAB. 4.1 – *Groupes non hyper-résoluble*

4.5.3 Relèvement d'un élément diagonal

Lemme 4.5.7 *L'ensemble des automorphismes diagonaux est l'intersection des groupes de décomposition des idéaux au-dessus de p*

Démonstration:
σ est diagonal si et seulement si pour tout $1 \leqslant i \leqslant g$ il existe a_i tel que $\sigma(x) \equiv x^{p^{a_i}} \pmod{\mathfrak{P}_i}$, ce qui équivaut à σ appartient à $\langle \varphi_i \rangle$ qui est précisément le groupe de décompositions de $\mathfrak{P}_i$. ∎
La proposition suivante nous permettra de déterminer les automorphismes diagonaux:

Proposition 4.5.8 *Il existe un automorphisme diagonal $\sigma \neq id$ si et seulement il existe un diviseur strict d de f tel que $\langle \varphi_1^d \rangle \trianglelefteq G$. De plus, dans ce cas*

- *il existe une application $\psi | \{1, \ldots, g\} \longrightarrow (\mathbb{Z}/\frac{f}{d}\mathbb{Z})^*$ telle que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, g\} \quad \sigma = \varphi_i^{d\psi(i)}$$

- $\operatorname{Im} \psi$ *est un sous-groupe et tous les éléments de ψ admettent le même nombre d'antécédents.*

Démonstration:
Soit σ un automorphisme diagonal alors $\sigma \in \langle \varphi_i \rangle$ et donc $\sigma = \varphi_i^{a_i}$. Comme les φ_i ont tous le même ordre, il existe $d = f/|\sigma|$ et $\psi(i) \in (\mathbb{Z}/\frac{f}{d}\mathbb{Z})^*$ tel que $d\psi(i) = a_i$. Si $\tau \in G$ alors il existe i tel que

$$\tau \varphi_1^d \tau^{-1} = \varphi_i^d = \varphi_1^{d\psi(1)/\psi(i)} \in \langle \varphi_1^d \rangle \tag{4.5}$$

et donc $\langle \varphi_1^d \rangle \trianglelefteq G$.
Réciproquement si il existe $d|f, d \neq f$ tel que $\langle \varphi_1^d \rangle \trianglelefteq G$, soit $\sigma = \varphi_1^d$ et τ tel que $\tau\varphi_1\tau^{-1} = \varphi_i$ alors il existe $\psi(i) \in (\mathbb{Z}/\frac{f}{d}\mathbb{Z})^*$ indépendant de τ tel que $\tau\varphi_1^d\tau^{-1} = \varphi_i^d = \varphi_1^{d\psi(i)^{-1}}$ et donc $\varphi_1^d = \varphi_i^{d\psi(i)}$ appartient au groupe de décomposition de $\mathfrak{P}_i$
Il nous reste à prouver les propriétés de ψ, qui se factorise de la façon suivante:

$$\begin{array}{llllllll}
\{1, , g\} & \stackrel{\psi_1}{\longleftrightarrow} & G/\langle \varphi_1 \rangle & \stackrel{\psi_2}{\twoheadrightarrow} & G/C_G(\langle \varphi_1^d \rangle) & \stackrel{\psi_3}{\hookrightarrow} & Aut(\langle \varphi_1^d \rangle) & \stackrel{\psi_4}{\longleftrightarrow} & (\mathbb{Z}/\frac{f}{d}\mathbb{Z})^* \\
i & \mapsto & \{\tau; \tau(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{P}_i\} & \mapsto & \{\tau; \tau\varphi_1^d\tau^{-1} = \varphi_i^d\} & \mapsto & i_\tau & \mapsto & \psi(i)
\end{array}$$

où $C_G(\langle \varphi_1^d \rangle)$ est le centralisateur de $\langle \varphi_1^d \rangle$ et i_τ est l'automorphisme intérieur associé à τ, de plus $\operatorname{Ker} i = C_G(\langle \varphi_1^d \rangle)$ ce qui prouve que ψ_3 est un morphisme de groupe injectif bien défini. ψ_1 correspond à la bijection de $G/Stab_{\mathfrak{P}_1}$ sur $Orb_{\mathfrak{P}_1}$ et ψ_4 est un isomorphisme de groupe. ψ_2 est la projection canonique de $G/\langle\varphi_1\rangle$ sur $G/C_G(\langle\varphi_1^d\rangle)$, elle est donc surjective et tout éléments de $\operatorname{Im}\psi_2$ admet le même nombre d'antécédents par ψ_2, il en est donc de même pour ψ et $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\psi_3$ est un sous-groupe ■

Pour un groupe H fixé, il y a $\frac{g!}{h(g/h)!^h}$ applications ψ possibles. Nous pouvons donc tester si σ^d est un automorphisme diagonal de la façon suivante

Algorithme 4.5.9 *Soient T et p comme précédemment, et d un entier divisant strictement f, nous déterminons φ_1^d si $\langle\varphi_1^d\rangle \trianglelefteq G$*

1. [Boucle sur les sous-groupes] *Pour chaque sous-groupe $H \subset (\mathbb{Z}/\frac{f}{d}\mathbb{Z})^*$ d'ordre h divisant g,*

   1.1. [Boucle sur les ψ] *Pour chaque surjection ψ de $\{1, \dots, g\}$ dans H vérifiant $\psi(1) = 1$ et telle que chaque élément de H admette g/h antécédents, tester si $(d\psi(i))_{i=1}^g, id) \in \tilde{G}$.*

   1.2. [Succès ?] *Dans ce cas retourner ψ.*

2. [Fin] *Retourner «$\langle\varphi_1^d\rangle \ntrianglelefteq G$ ou T non galoisien».*

4.5.4 Stratégie de détermination du groupe de Galois

Nous devons donc choisir un nombre premier p dont une puissance non-trivialle de l'automorphisme de Frobenius φ_1 engendre un sous-groupe cyclique distingué. Le groupe étant supposé faiblement hyper-résoluble, il possède des sous-groupes cycliques distingués, à moins qu'il ne s'agisse de $\mathfrak{A}_4$ ou de $\mathfrak{S}_4$ déjà traité précédement.

Nous utilisons l'algorithme suivant pour obtenir un bon candidat pour le nombre premier p.

Algorithme 4.5.10 *Soit $T \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible unitaire de degré n*

1. [Factorisation] *Factoriser n en $\prod_{i=1}^r p_i$ avec $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_r$ premiers.*

2. [Calcul des C_m] *Poser $m_{max} := 0$, $p_{max} := 0$ et*

$$M := \{1 \leqslant m \leqslant r; p_m \neq p_{m+1} \text{ ou } m = r-1\} \ .$$

3. [Boucle] *Pour les $n/2 + 8$ premiers nombres premiers $p > n$, effectuer les étapes suivantes :*

   3.1. [Décomposition] *Factoriser T modulo p.*

   3.2. [Ramifié ?] *Si T a un facteur carré, ne pas le compter et passer au suivant.*

   3.3. [Galois ?] *Si les facteurs de T n'ont pas tous le même degré, échouer avec « T n'est pas galoisien. »*

3.4. [Qualité] *Sinon soit f le degré commun des facteurs de T, si $f = n/p_r$, poser $m = n/p_r$, sinon calculer le plus grand $m \in M$ tel que $C_m|f$.*

3.5. [Meilleur?] *si $m > m_{max}$ ou si $m = m_{max}$ et $f > f_{max}$, poser $m_{max} = m$, $p_{max} = p$ et $f_{max} = f$.*

4. [Fin] *Retourner p_{max} et m_{max}.*

Si à la fin de l'algorithme $m_{max} > 1$, nous sommes sûrs que si le groupe de Galois est hyper-résoluble, la puissance $f_p/m_{max}^{ème}$ de l'automorphisme de Frobenius engendre un sous-groupe cyclique distingué dans G. Sinon, nous nous sommes donné une « meilleure » chance, puisqu'il y au moins un sous groupe cyclique distingué non trivial de G dont l'ordre divise f_p.

Nous procédons donc ainsi :

Algorithme 4.5.11 *Soit $T \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible unitaire de degré n*

1. [Algorithme4.5.10] *Appliquer l'algorithme 4.5.10 pour déterminer un bon candidat p.*

2. [Factorisation] *Factoriser f_p en $f_p = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$.*

3. [Boucle sur les premiers] *Pour $1 \leq i \leq r$, exécuter les étapes suivantes*

3.1. [Boucle sur les exposants] *Poser $S_p = X$, $H_0 = 1$, $d_p = e_i$ et $\psi_0(k) = 1$ pour $1 \leq k \leq f_p$. Pour $1 \leq j \leq e_i$, exécuter les étapes suivantes,*

3.2. [Choix du degré] *Calculer $d = f_p/p_i^j$.*

3.3. [Relèvement du groupe] *Déterminer la liste L des sous-groupes de $(\mathbb{Z}/p_i^j\mathbb{Z}^*$ qui admettent H_{j-1} pour quotient.*

3.4. [Algorithme 4.5.9] *Appliquer l'algorithme 4.5.9 à p avec le paramètre $d = f_p$ et seulement pour les sous-groupes de la liste L et seulement pour les fonctions ψ compatibles avec ψ_{i-1}.*

3.5. [Échec?] *Si l'algorithme échoue, poser $d_p = j - 1$ et passer au nombre premier suivant.*

3.6. [Succès?] *Appeler H_i le groupe et ψ_i et S_p la fonction retournée par l'algorithme.*

4. [Théorème chinois] *Par application du théorème des restes chinois, combiner les polynômes S_p pour obtenir un automorphisme S d'ordre $\prod_{i=1}^{r} p_i^{d_{p_i}}$. De même calculer la fonction ψ correspondante par application du théorème des restes chinois.*

5. [Fin] *Retourner S et ψ.*

4.5.5 Calcul des autres automorphismes par tests des permutations

Nous supposons que l'algorithme précédent a réussi et qu'il nous a retourné $\sigma = \varphi_1^d$ et la fonction ψ correspondante.

Remarquons que le groupe $\langle\sigma\rangle$ étant distingué dans G, le corps fixe est aussi Galoisien et faiblement hyper-résoluble. Nous utilisons les techniques de la section 2.2.1 pour déterminer un polynôme R définissant le corps fixe K^σ et nous lui appliquons récursivement notre algorithme, et nous obtenons explicitement les automorphismes de $\mathrm{Gal}(K^\sigma/\mathbb{Q}) = G/\langle\sigma\rangle$. Il s'agit de relever $\overline{\tau} \in G/\langle\sigma\rangle$ en $\tau \in G$

Proposition 4.5.12 *Notons $t = |\overline{\tau}|$, $s = |\sigma| = f/d$. Il existe $(\overline{u}, \overline{v}) \in (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^2$ tel que*

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^u \tag{4.6}$$
$$\tau^t = \sigma^v \tag{4.7}$$

- *$\overline{u}$ ne dépend que de $\overline{\tau}$*
- *Si $\tau(\mathfrak{P}_1) = \tau(P_c)$ alors $\overline{u} = \psi(1)/\psi(c)$ convient.*
- *$(u-1)v \equiv 0 \pmod s$*
- *Si $w = PGCD((\sum_{i=1}^t u^i), s)$, alors la classe de v modulo w ne dépend que de $\overline{\tau}$.*

Démonstration:
Soit c tel que $\tau(\mathfrak{P}_1) = \tau(P_c)$, alors l'identité 4.5 nous donne $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{\psi(1)/\psi(c)}$ et $u = \psi(1)/\psi(c)$ L'identité $\overline{\tau}^t = 1$ implique que $\tau^t \in \langle\sigma\rangle$. Il existe donc v défini modulo s tel que $\tau^t = \sigma^v$. Comme

$$\sigma^{uv} = (\tau\sigma\tau^{-1})^v = \tau\sigma^v\tau^{-1} = \tau\tau^t\tau^{-1} = \sigma^v$$

il vient $\sigma^{(u-1)v} = 1$ et donc $(u-1)v \equiv 0 \pmod s$. Soit $\rho = \tau\sigma^k$ un autre représentant de $\overline{\tau}$, alors

$$\rho\sigma\rho^{-1} = \tau\sigma^k\sigma\sigma^{-k}\tau^{-1} = \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^u$$

donc u est indépendant de k. Par contre

$$\rho^t = \prod_{i=1}^t \tau\sigma^k = (\prod_{i=1}^t \tau^i\sigma^k\tau^{-i})\tau^t = (\prod_{i=1}^t \sigma^{ku^i})\tau^t = \sigma^{\sum_{i=1}^t u^i}\sigma^u = \sigma^{v+w'k}$$

avec $w' = \sum_{i=1}^t u^i$, ainsi la classe de v modulo $w = PGCD(w', s)$ ne dépend que de $\overline{\tau}$. ■

La proposition 2.2.3 nous permet de calculer directement u.

Algorithme 4.5.13 *Supposons R est sans facteur carré modulo p, soit $\overline{\tau} \in G/\langle\sigma\rangle$ et $Q = \tau(X) \pmod{R, p}$, nous déterminons un entier c tel que $\tau(\mathfrak{P}_1) = \tau(\mathfrak{P}_c)$ ainsi:*

1. [Factorisation] *Nous obtenons une factorisation $\overline{R} = \prod_{i=1}^{g} R_i \pmod{p}$ comme indiqué dans la proposition 2.2.3*

2. [Action de τ] *Nous calculons $P = PGCD(R \pmod{p}, R_1 \circ Q \pmod{p})$.*

3. [Recherche] *Nous déterminons c tel que $P = R_c \pmod{p}$ par tests successifs.*

4. [Fin] *Nous retournons $u = \psi(c)$.*

Proposition 4.5.14 *Soit σ, $\overline{\tau}, u$ et v comme précédemment. Calculons les décompositions en cycles de σ comme permutation des racines de T et de $\overline{\tau}$ comme agissant sur les racines de R et ordonnons les cycles et numérotons les racines par des triplets $[a,b,c] \in \mathbb{Z}/\frac{n}{st}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ désigne le $c^{\text{ème}}$ élément du $b^{\text{ème}}$ cycle de la $a^{\text{ème}}$ orbite de τ. Nous avons les règles suivantes, découlant de (4.6)*

$$\sigma([a,b,c]) = [a,b,c+1] \tag{4.8}$$

$$\tau([a,b,c]) = [a,b+1,d] \Rightarrow \tau([a,b,e]) = [a,b+1,u(e-c)+d] \tag{4.9}$$

Supposons choisies les valeurs $\tau([a,b,0])$ pour tout couple (a,b) avec $b \neq t-1$ alors l'équation (4.7) détermine automatiquement $\tau([a,t-1,0])$ et l'implication (4.9) détermine automatiquement les autres valeurs de τ.

Exemple 4.5.15 *Supposons que σ et τ correspondent aux permutations suivantes*

$$\begin{aligned} \sigma &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12\ 13\ 14\ 15) \\ &\quad (16\ 17\ 18\ 19\ 20)(21\ 22\ 23\ 24\ 25)(26\ 27\ 28\ 29\ 30) \\ \overline{\tau} &= (123)(456) \end{aligned}$$

avec $o = 2, t = 3$ et $s = 5$. Les nombres représentés par les triplets, sont par ordre lexicographique

$$\begin{matrix} (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ ) & (6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ ) & (11\ 12\ 13\ 14\ 15\ ) \\ (16\ 17\ 18\ 19\ 20) & (21\ 22\ 23\ 24\ 25) & (26\ 27\ 28\ 29\ 30) \end{matrix}$$

où par exemple,

$$[0,0,0] = 1;\ [0,0,1] = 2;\ [0,1,0] = 6;\ [1,0,0] = 16;\ [1,1,4] = 25\ .$$

Algorithme 4.5.16 *Soit σ, $\overline{\tau}$ et u comme précédemment. Il s'agit de relever $\overline{\tau}$ en un élément τ de G.*

1. [Décomposition en cycles] *Calculer les décompositions en cycles de σ comme permutation des racines de T et de $\overline{\tau}$ comme agissant sur les racines de R.*

2. [Numérotation] *Ordonner les cycles et numéroter les racines avec 3 composantes comme dans la proposition 4.5.14*

3. [Calcul de u et w] *Calculer u et w à l'aide de la proposition 4.5.12 et de l'algorithme 4.5.13*

4. [Boucle] *Pour chaque valeur de $0 \leqslant v \leqslant w$ et pour chaque application C de $\{0, \dots, \frac{n}{st} - 1\} \times \{0, \dots, t-2\}$*

  4.1. [Calcul de τ] *Déterminer τ tel que $\forall (a,b) \in \{0, \dots \frac{n}{st} - 1\} \times \{0, \dots, t-2\}$ $\tau([a,b,0]) = C(a,b)$ d'après la proposition 4.5.14*

  4.2. [Test] *Tester si τ correspond effectivement à un élément du groupe de Galois de T.*

  4.3. [Succès?] *Si oui, retourner τ.*

5. [Échec] *Retourner «G non galoisien».*

Pour chaque u, le nombre d'applications à tester est de $s^{(t-1)(n/st)} = s^{n/s(1-1/t)}$.

Il apparaît donc que le nombre de tests croît avec t. Il est donc préférable de procéder ainsi:

Algorithme 4.5.17 *1.* [Factorisation] *Factoriser t en $t = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$.*

2. [Boucle sur les premiers] *Pour $1 \leq i \leq r$, exécuter les étapes suivantes*

  2.1. [Relèvement] *Poser $d_i = t/p_i^{e_i}$ et relever $\overline{\tau}^{d_i}$ pour obtenir τ_i.*

3. [Théorème chinois] *Par application du théorème des restes chinois, reconstruire τ à partie des $(\tau_i)_{i=1}^{r}$ et retourner τ.*

4.6 Résumé de l'algorithme

The Beaver had counted with scrupulous care,
  Attending to every word:
But it fairly lost heart, and outgrabe in despair,
  When the third repetition occurred.

Lewis Carroll, The Hunting of the Snark

Algorithme 4.6.1 *Soit $T \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible unitaire de degré n. Si T est galoisien hyper-résoluble, l'algorithme retourne $(\sigma_i)_{i=1}^{n}$ du groupe de Galois G tel que pour tout $1 \leqslant m \leqslant n$ nous ayons $\langle\sigma_i\rangle_{i=1}^{m} \trianglelefteq G$ et $\langle\sigma_i\rangle_{i=1}^{n} = G$*

1. [Étude du groupe] *Appliquer l'algorithme 4.5.10 pour obtenir p_{max} et m_{max}.*

2. [$\mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$?] *Si $n = 12$ (resp. $n = 24$) et que $f_{p_{max}} = 3$, le groupe de Galois est très probablement $\mathfrak{A}_4$(resp. 24). Tester d'abord l'algorithme spécifique pour ce groupe. En cas d'échec, retourner à l'étape 1, en regardant les nombre premiers suivants.*
3. [Premier élément] *Appliquer l'algorithme 4.5.11. S'il échoue, si $m_{max} > 0$ retourner «T non galoisien ou non faiblement hyper-résoluble», sinon retourner à l'étape 1, en regardant les nombre premiers suivants.*
4. [Fin?] *L'étape précédente a retourné un automorphisme $\sigma = \varphi_1^d$. Si $|\sigma| = n$, retourner σ.*
5. [Corps fixe] *Appliquer la proposition 2.2.1 pour obtenir un polynôme R.*
6. [Appel récursif] *Appliquer récursivement l'algorithme pour déterminer une famille $(\overline{\tau_1}, \ldots, \overline{\tau_t})$ génératrice de $G/\langle\sigma\rangle$.*
7. [Relèvement] *Appliquer l'algorithme 4.5.17 pour obtenir $(\tau_1, \ldots, \tau_t)$ et nous retournons $(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_t)$.*

Si T est galoisien et non hyper-résoluble, l'algorithme peut boucler indéfiniment. En pratique cela se produit pour $n \leqslant 100$ seulement si $36|n$.

4.7 Exemple

It felt that, in spite of all possible pains,
    It had somehow contrived to lose count,
And the only thing now was to rack its poor brains
    By reckoning up the amount.

Lewis Carroll, The Hunting of the Snark

Comme exemple , nous allons calculer les automorphismes du polynôme

$$\begin{aligned} T = x^{21} &- 7x^{20} - 21x^{19} + 238x^{18} - 245x^{17} - 1848x^{16} + 4732x^{15} + 1861x^{14} \\ &-18536x^{13} + 16856x^{12} + 14819x^{11} - 32431x^{10} + 8897x^9 + 16660x^8 \\ &-13533x^7 + 392x^6 + 3514x^5 - 1547x^4 + 161x^3 + 49x^2 - 14x + 1 \end{aligned}$$

dont le groupe de Galois est le seul groupe non-abélien d'ordre 21, mais nous n'utiliserons pas la connaissance de ce fait dans le calcul.

Nous commençons par écrire $21 = p_1 p_2$ avec $p_1 = 7$ et $p_2 = 3$. Nous posons $M = \{0, 1, 2\}$.

Nous factorisons maintenant T modulo les premiers nombres premiers plus grands que 42. Nous obtenons

p	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
f_p	7	3	3	3	3	3	7	3	3	7	3
$\sup\{m \in M; C_m \mid f_p\}$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

Nous sommes dans un cas favorable car $m_{max} = 1$. Nous n'avons pas encore trouvé de nombre premier totalement décomposé, donc nous continuons les factorisations jusqu'à trouver que $p = 449$ convient. nous calculons le discriminant de T la borne BD.

$$\mathrm{Disc}(T) = (2)^{18}(7)^{32}(181)^6(2339)^6 = D^2$$

$$BD \leqslant 10^{44}$$

Nous calculons les racines T modulo ℓ, $\{2, 35, 45, 51, 66, 79, 96, 109, 174, 180, 223, 225, 236, 301, 305, 342, 370, 373, 397, 440, 448\}$ et nous les relevons jusqu'à la precision ℓ^{17} pour que $\ell^{17} > 2BD$. Nous posons $p = p_{max} = 43$, $f = f_p = 7$, $g = g_p = 3$ et $d = 1$, et nous appliquons l'algorithme 4.5.9. Nous devons tester 3 applications ψ de $\{1, 2, 3\}$ dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$,

$$\begin{array}{c} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 4 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 2 \end{array}$$

La dernière nous donne l'automorphisme
$\alpha \mapsto (-14791767248\alpha^{20} + 95714137173\alpha^{19} + 361204094449\alpha^{18}$
$- 3328779599255\alpha^{17} + 1864224944156\alpha^{16} + 28304237511321\alpha^{15}$
$- 55006453622284\alpha^{14} - 56486002410703\alpha^{13} + 244003596280558\alpha^{12}$
$- 120533924745455\alpha^{11} - 281694320179321\alpha^{10} + 330143856833197\alpha^{9}$
$+ 41475180195786\alpha^{8} - 222891172143821\alpha^{7} + 82722087561988\alpha^{6}$
$+ 36804911589073\alpha^{5} - 32245355397328\alpha^{4} + 6074801569203\alpha^{3}$
$+ 699019170541\alpha^{2} - 345689725163\alpha + 29710312476)/76627979$
correspondant à la permutation suivante des racines ℓ-adiques
$(2, 301, 96, 66, 370, 342, 440)(35, 225, 109, 180, 236, 305, 51)$
$(45, 223, 373, 79, 448, 397, 174)$.

Nous calculons alors le corps fixe en utilisant la proposition 2.2.1 et nous obtenons $R = x^3 - x^2 - 9x + 1$. Nous appliquons récursivement l'algorithme au polynôme R: nous trouvons que R est irréductible modulo 11 et alors en relevant l'automorphisme de Frobenius, nous trouvons l'automorphisme $-1/2x^2 + 7/2$ qui engendre le groupe de Galois du corps fixe. Nous devons donc le relever en un automorphisme de G. En utilisant l'algorithme 4.5.13, nous obtenons $u = 2$ et nous appliquons l'algorithme 4.5.16 : nous devons tester les sept permutations suivantes

$$\begin{array}{ll}
(2,35,45)(301,109,448) & (96,236,223)(66,51,397) \\
 & (370,225,373)(342,180,174)(440,305,79), \\
(2,35,223)(301,109,397) & (96,236,373)(66,51,174) \\
 & (370,225,79)(342,180,45)(440,305,448), \\
(2,35,373)(301,109,174) & (96,236,79)(66,51,45) \\
 & (370,225,448)(342,180,223)(440,305,397), \\
(2,35,79)(301,109,45) & (96,236,448)(66,51,223) \\
 & (370,225,397)(342,180,373)(440,305,174), \\
(2,35,448)(301,109,223) & (96,236,397)(66,51,373) \\
 & (370,225,174)(342,180,79)(440,305,45), \\
(2,35,397)(301,109,373) & (96,236,174)(66,51,79) \\
 & (370,225,45)(342,180,448)(440,305,223), \\
(2,35,174)(301,109,79) & (96,236,45)(66,51,448) \\
 & (370,225,223)(342,180,397)(440,305,373)
\end{array}$$

La seconde permutation correspond à un automorphisme, que nous calculons:
$\alpha \mapsto (-194129435\alpha^{20} + 1263256585\alpha^{19} + 4695474072\alpha^{18} - 43866808007\alpha^{17} + 26044995959\alpha^{16} + 370791458219\alpha^{15} - 735728499700\alpha^{14} - 716698532307\alpha^{13} + 3233978982336\alpha^{12} - 1696567684697\alpha^{11} - 3658157589221\alpha^{10} + 4481659267398\alpha^{9} + 407309044781\alpha^{8} - 2976215526118\alpha^{7} + 1190032598839\alpha^{6} + 464793759571\alpha^{5} - 447754215324\alpha^{4} + 90593004738\alpha^{3} + 9006434498\alpha^{2} - 5016784391\alpha + 438769426)/423359.$

Nous avons donc une partie génératrice du groupe de Galois, et nous pouvons en calculer tous les éléments.

4.8 Mise en œuvre

"Two added to one–if that could but be done,"
It said, "with one's fingers and thumbs!"
Recollecting with tears how, in earlier years,
It had taken no pains with its sums.

Lewis Carroll, The Hunting of the Snark

Cet algorithme a été mis en œuvre et intégré à [PARI, function `nfgaloisconj`]. Il est capable en pratique de traiter tous les groupes de Galois faiblement hyper-résolubles d'ordre inférieur ou égal à 95. Les mesures de temps ont été effectuées sur un Pentium III à 800MHz ayant 1 Go de mémoire vive. Dans la première partie, nous utilisons des polynômes de notre base de données dont le degré est multiple de 4. Les classes d'isomorphismes des groupes de Galois des polynômes sont toutes distinctes.

degré	nb	temps moyen
20	5	0,33 s
24	14	0,62 s
28	4	1,66 s
32	20	1,57 s
36	8	1,67 s
40	5	4,78 s
44	4	15,82 s
48	12	17,44 s
52	2	5,48 s
56	3	2,88 s
60	3	3,93 s
64	14	29,51 s
68	1	4,78 s
72	5	4,35 s
76	1	87,0 s
80	4	77,79 s
84	3	110,21 s
88	3	9,44 s
92	1	10,25 s
96	5	10,8 s

Dans la seconde partie, nous utilisons les polynômes minimaux des racines indiquées.

degré	nb	temps moyen	Racine
160	1	49 min	$\sqrt[20]{2} + \zeta_{20}$
192	1	108 min	$\sqrt[24]{5} + \zeta_{24}$
220	1	85 min	$\sqrt[22]{2}(\zeta_{22} - 2)$
240	1	19 min	$\sqrt[30]{2}(\zeta_{30} + 2)$
252	1	1h, 7min	$\sqrt[21]{2}(\zeta_{21} - 1)$
336	1	13h, 43min	$\sqrt[28]{2}(\zeta_{28} + 2)$

Chapitre 5

Le compilateur GP2C

5.1 GP2C le compilateur de GP en C

5.1.1 Introduction

Il s'agit d'écrire un programme [GP2C] permettant l'implantation rapide de fonction C dans la bibliothèque PARI à partir de leur équivalent en langage GP.

La pratique courante de développement de PARI consiste à d'abord écrire un script GP, le tester à l'aide de GP, puis à le convertir en langage C. Cette façon de procéder est courante dans les systèmes de calcul formel.

En l'état la traduction manuelle est malcommode et est souvent source d'erreur [1]. En effet

- La syntaxe est très différente, par exemple l'expression simple `a*b+c` devient `gadd(gmul(a,b),c)`.
- Les fonctions GP et PARI n'ont pas toujours le même nom.
- Il faut gérer la mémoire manuellement à l'aide de `gerepile`.
- GP ne connaît qu'un type de donnée, les `GEN`, pour des raisons d'efficacité il est nécessaire d'utiliser d'autres types, en particulier les entiers C `long`, ou des sous-classes du type `GEN`, les entiers PARI `t_INT`, les réels PARI `t_REAL`, etc...

5.1.2 Cahier des charges

En partant du principe qu'il est beaucoup plus simple d'optimiser un programme que de l'écrire, j'ai donc cherché à résoudre ces problèmes à l'aide

1. appelé bugs par les programmeurs, bogues (n.f.) par les académiciens qui n'en ont jamais vu et beugues par les Lyonnais traditionalistes.

d'un programme GP2C, ayant le cahier des charges suivant :

- Le code généré devait être très proche du code GP pour être compréhensible facilement par le programmeur. En particulier, il devait conserver autant que possible les noms de fonctions et de variables.
- Le code généré devait suivre les « standards » de la bibliothèque PARI, pour pouvoir y être intégré et modifié.
- Le code devait pouvoir utiliser la fonction PARI la plus efficace dans le contexte correspondant à une fonction GP donnée.
- Il n'était pas nécessaire que 100% du code GP soit traductible par le compilateur, en effet certaines instructions ne sont utiles que pour l'usage interactif.

5.1.3 Problèmes à résoudre

J'ai été confronté aux problèmes suivants :

- La grammaire de GP n'est pas LALR(1). Dans les arguments des fonctions ayant un code de prototype `s*` correspondant à la concaténation automatique et dans les declarations de fonctions, la règle qui prévaut est celle de la plus grande sous-expression. Par exemple l'expression `print(1-[2])` est ambiguë, il s'agit soit de la soustraction de `1` et `[2]` (qui est invalide) ou bien de la concaténation de `1` et de l'opposé de `[2]` (qui est valide). L'interpréteur GP choisit la première option et retourne une erreur. De même, dans l'expression `f(x)=g(x)=x++; print(x)`, l'instruction `print(x)` fait partie de la fonction g et non de la fonction f.
- Usuellement, un compilateur transforme une expression complexe comme `x=a*d-b*c` en une suite d'expressions élémentaires à l'aide de variables intermédiaires `p1=a*d;p2=b*c;x=p1-p2` pour garantir l'ordre d'exécution des opérations et protéger contre les effets de bords, malheureusement cette approche aurait rendu le code illisible.
- Pour GP les fonctions C de type `void` retournent le pointeur spécial `gnil` qui est égal à zéro mais n'est pas affiché. Ce n'est pas le cas en C, ainsi il faut couper certaines expressions, par exemple `a=5+print(2);` doit être transformé par le compilateur en `print(2);a=5`
- Pour GP, les structures de contrôle sont des fonctions. Il a été nécessaire de créer des blocs pour les contenir. Cela fonctionne ainsi, le code

```
a=if(b,print(3);5,7)
```

est transformé en pseudocode GP

```
local(p1); a={/*la valeur du bloc est dans p1*/
            if(b,print(3);p1=5, p1=7)}
```

Puis une phase de déplacement des blocs a lieu pour obtenir

```
local(p1); if(b,print(3);p1=5, p1=7); a=p1
```

Nous voyons que le code précédent est maladroit, il aurait été préférable d'écrire `if(b,print(3);a=5, a=7)`. Ainsi nous avons ajouté une phase du compilateur qui nettoie les variables inutiles créées par le compilateur.

5.2 Typage des objets PARI

Pour améliorer les performances du code produit par le compilateur nous avons introduit un typage sur les objets PARI.

5.2.1 Définition de types principaux

Un type représente une classe d'objets PARI sur lesquels certaines opérations sont valides. Les types les plus importants sont les suivants:

nom	description
`void`	comme en C, mais doit être convertit en 0 si évalué.
`bool`	booléen, vrai (1) ou faux (0) stocké dans un entier C.
`small`	entier C de type long.
`int`	entier PARI multiprécision, i.e. GEN de type t_INT.
`real`	réel PARI, i.e. GEN de type t_REAL.
`mp`	multi-précision, i.e. GEN de type t_INT ou t_REAL.
`gen`	générique, objet PARI de type GEN.

De nombreux autres types existent, en particulier pour spécifier les « member functions » (fonctions composantes) de GP. La liste complète est accessible via gp2c -t.

Par défaut, les variables GP seront donc de type `gen`. Toutefois les indices de boucles seront normalement de type `small` si le domaine de la boucle le permet.

5.2.2 Ajout des types à la syntaxe GP

Nous étendons la syntaxe GP pour accepter les constructions suivantes :

- `expr:type` signifie que l'expression `expr` a le type `type`.
- `var:type` dans une déclaration signifie que la variable `var` a le type `type` pour tout le bloc.

Nous n'autoriserons donc pas les variables à changer de type en cours de bloc. De toute façon il n'est pas considéré comme une bonne pratique de programmation d'utiliser une variable pour plusieurs usages différents.

Cela permet à l'utilisateur d'améliorer le code produit par GP2C en spécifiant le type de ses variables. Par exemple la fonction gp suivante essaie de factoriser n à l'aide de la méthode ρ de Pollard.

```
rho(n)=
{
  local(x,y);

  x=2; y=5;
  while(gcd(y-x,n)==1,
    x=(x^2+1)%n;
    y=(y^2+1)%n;
    y=(y^2+1)%n
   );
  gcd(n,y-x)
}
```

```
GEN rho(GEN n)
{
  GEN x;
  GEN y;
  x = gdeux;
  y = stoi(5);
  while (gegalgs(ggcd(gsub(y, x), n), 1))
  {
    x = gmod(gaddgs(gsqr(x), 1), n);
    y = gmod(gaddgs(gsqr(y), 1), n);
    y = gmod(gaddgs(gsqr(y), 1), n);
  }
  return ggcd(n, gsub(y, x));
}
```

Comme les variables n, x et y contiennent des entiers PARI, il n'est pas satisfaisant d'utiliser les fonctions génériques gsqr, gaddgs et gmod. Grâce à l'extension de la syntaxe, il est possible de préciser le type de ces variables au compilateur :

```
rho(n:int)=
{
  local(x:int,y:int);

  x=2; y=5;
  while(gcd(y-x,n)==1,
    x=(x^2+1)%n;
    y=(y^2+1)%n;
    y=(y^2+1)%n
   );
  gcd(n,y-x)
}
```

```
GEN rho(GEN n)   /* int */
{
  GEN x;          /* int */
  GEN y;          /* int */
  x = gdeux;
  y = stoi(5);
  while (cmpis(mppgcd(subii(y, x), n), 1) == 0)
  {
    x = modii(addis(sqri(x), 1), n);
    y = modii(addis(sqri(y), 1), n);
    y = modii(addis(sqri(y), 1), n);
  }
  return mppgcd(n, subii(y, x));
}
```

Le code généré tient compte des types de n, x et y et utilise les fonctions spécialisées sqri, addis et modii.

5.2.3 Préordre sur les types

Nous préordonnons comme indiqué dans la figure 5.1 l'ensemble des types. L'ordre correspond à l'inclusion des classes. Un type t sera inférieur à un type s s'il est possible de convertir tout objet du type t en objet du type s.

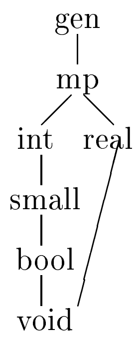


FIG. 5.1 – *Préordre sur les types*

5.3 Descriptions des fonctions et opérateurs GP

5.3.1 Présentation du langage de description

Nous avons créé un langage de description des fonctions et opérateurs GP. La syntaxe est proche de celle du langage yacc. Voila un exemple : la description de l'opérateur `+`

```
_+_:
 (small,small):small:parens     $(1) + $(2)
|(int,small):int        addis($1, $2)
|(small,int):int        addsi($1, $2)
|(int,int):int          addii($1, $2)
|(mp,real):real         mpadd($1, $2)
|(real,mp):real         mpadd($1, $2)
|(mp,mp):mp             mpadd($1, $2)
|(gen,small):gen        gaddgs($1, $2)
|(small,gen):gen        gaddsg($1, $2)
|(gen,gen):gen          gadd($1, $2)
;
```

Pour chaque type d'arguments, le type du résultat est indiqué ainsi que le code C correspondant. Dans l'exemple de la fonction `rho`, avant typage l'opérateur `+` prend un argument de type `gen` et une constante de type `small` le code généré est donc `gaddgs($1, $2)` et le type du résultat `gen`. Par contre après typage, l'opérateur `+` prend un argument de type `int` et une constante de type `small` le code généré est donc `addis($1, $2)` et le type du résultat `int`.

5.3.2 Présentation formelle du langage

Nous décrivons formellement le langage par sa forme de Backus-Naur étendue.

```
type := void | bool | small | int | real | mp | gen
attribut := prec | parens | copy
élément := type | [0-9]+
règle :=  '(' ')'  |  '(' { objet ',' }* objet ')'
champs := règle ':' type { ':' attribut }*
entrée := fonction ':' { champs code '|' }* champs code ';'
```

Pour les opérateurs, nous dérivons un nom de fonction en substituant les arguments par un caractère _. Ainsi + devient _+_, la factorielle devient _! et la négation logique devient !_.

- L'attribut `prec` précise que la variable `prec` est nécessaire.
- L'attribut `parens` sert à la génération des parenthèses.
- L'attribut `copy` signifie que l'objet généré ne satisfait pas aux hypothèses d'utilisation la fonction de gestion mémoire `gerepileupto`.

5.4 Propagation des types

5.4.1 Règle de typage

Les types sont propagés des feuilles à la racine de l'arbre syntaxique.

Pour les feuilles, les règles suivantes sont utilisées :

- Les types spécifiés par l'utilisateur sont laissés tels quels.
- Les variables ont leur type de déclaration, `gen` par défaut.
- Les constantes ont leur type naturel. De plus les constantes entières représentables par un entier C `long` sont de type `small`.

Nous propageons les types vers la racine à l'aide de la table de description de la manière suivante :

Soit f une fonction ou un opérateur, et $x_1, \ldots, x_n$ ses arguments. Nous examinons les règles correspondant à l'entrée f. Nous rejetons d'abord les règles ne satisfaisant pas aux conditions suivantes

- La règle doit comporter autant d'élément que la fonction a d'arguments.
- Si l'un des éléments de la règle est un nombre, l'argument correspondant doit être une constante égale à ce nombre. Cela est utile pour tester les drapeaux (flags).
- Si l'un des éléments de la règle est un type, l'argument correspondant doit être comparable pour le préordre.

Parmi les règles restantes, nous sélectionnons une règle ainsi:

- Pour chaque élément qui est de type strictement inférieur au type de l'argument correspondant, la règle perd un point.
- La règle ayant le plus de points (i.e le moins de points négatifs) gagne.
- En cas d'égalité la première règle gagne.

Une fois que la règle est déterminée, le type du nœud[2] est défini par le type de la règle, de plus le nœud récupère aussi les attributs de la règle.

5.4.2 Génération des types

Pour chaque nœud, la règle à appliquer est déterminée comme précédemment. Le code à générer est obtenu à parti de l'atome `code` du champ contenant la règle, en substituant les `$i` par le i-ième argument. Si le numéro est entre parenthèses, comme dans `$(i)`, et que le i-ième argument possède l'attribut `parens`, alors il sera substitué entre parenthèse. Ce mécanisme évite la pulsion paranoïaque des compilateurs consistant à mettre des parenthèses partout. Ainsi l'expression `a+b+c` où `a,b,c` sont de type `small` devient (a+b)+c au lieu de (((a)+(b))+(c)).

5.5 Gestion de la mémoire

La gestion de la mémoire dans la bibliothèque PARI s'effectue ainsi :

- Les objets sont créés consécutivement dans la pile PARI.
- Chaque fonction a la responsabilité de supprimer les objets créés par les calculs intermédiaires, à l'aide de la fonction gerepile

2. j'en profite pour rappeler que les alphabets ISO 8859-1 et ISO 8859-15 ne comportent pas le symbole œ, ce qui les rend impropres à la représentation de texte en français.

– Lors de boucles importantes, il est nécessaire de prévoir d'effectuer une instruction gerepile si la place dans la pile risque d'être insuffisante pour finir la boucle, le test s'effectuant avec la macro lowstack.
– Les composantes d'un objet doivent être individualisées à l'aide de gcopy.

Pour générer automatiquement les instructions gerepile convenables, le compilateur maintient une liste des accès aux variables avec le type d'accès: lecture,écriture, ou écriture d'une composante (correspondant à `a[n]=b`). Il calcule les accès en écriture aux variables globales à travers les appels au sous-fonctions (voir ex. 5.5.1) par cloture. Cela lui permet de savoir quelles sont les variables qui ont été modifiées et celles qui doivent être préservées. Le compilateur génère automatiquement les tests de taille de pile dans toutes les boucles.

Exemple 5.5.1

```
global(G=vector(10));
f(x)=G[x]++;
g(x)=if(x>=1 && x<=length(G),f(x),error("x too large"));
```

La variable globale `G` *est modifié par la fonction* `g` *à travers l'appel à la fonction* `f`*.*

5.6 Architecture du compilateur

J'ai suivi une architecture classique, une forme de code GP simplifié servant de code intermédiaire.

1. Un analyseur syntaxique en langage « yacc » convertit le code GP en un arbre syntaxique.
2. Pour simplifier la syntaxe, les structures de contrôles sont traduites par des instructions C simples.
3. Propagation des types à l'aide de règles de typage.
4. Déplacement des blocs.
   Après cette phase, nous avons vraiment le code intermédiaire.
5. Détermination des affectations des variables par blocs.
6. Génération des instructions gerepile.
7. Optimisation des variables créées par le compilateur.
8. Suppression des blocs vides.
9. Génération du code C à partir de l'arbre syntaxique typé et de la description des fonctions et opérateurs.

Annexe A

Table de polynômes galoisiens

Simultanément, des milliers.
Raymond Queneau, *Le Chiendent*

La complexité de notre algorithme dépendant de la complexité des groupes de Galois, nous avons été amené à construire une base de données de polynômes galoisiens ayant des groupes de Galois distincts. Les polynômes ont été contruits à l'aide de plusieurs méthodes:

- Par clôture galoisienne de polynômes donnés par [Eichenlaub] et [KlMa], représentant tous les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \leq 15$.
- Par application de la théorie algorithmique du corps de classes, pour construire des extensions abéliennes des corps de nombres.
- *au petit bonheur* suivant [Perec], par extension des précédents et par calculs de corps fixes.

Nous avons utilisé intensivement la fonction `galoisinit` que nous avons implanté dans PARI, et le programme d'identification des groupes de permutations et la table des groupes finis du système [GAP].

Lorsque nous avions plusieurs polynômes de même groupe de Galois, nous avons selectionné celui ayant les plus petits automorphismes, au sens suivant, tel que le groupe abélien

$$\mathbb{Z}[\sigma(\alpha), \sigma \in G]/\mathbb{Z}[\alpha]$$

où α est une racine du polynôme. ait un exposant minimal.

Je tiens à remercier Igor Shein pour sa contribution à l'établissement et à la vérification de cette table.

Pour des raisons de place, nous avons limité la table aux polynômes de groupes de Galois non abéliens et de degré inferieur à 100.

Ordre: 6, Indice: 2, Nom: $\mathfrak{S}_3$
$x^6 + 108$
Ordre: 8, Indice: 4, Nom: D_8
$x^8 + 28x^4 + 2500$
Ordre: 8, Indice: 5, Nom: Q_8
$x^8 - 12x^6 + 36x^4 - 36x^2 + 9$
Ordre: 10, Indice: 2, Nom: D_{10}
$x^{10} - 10x^8 - 75x^6 + 1500x^4 - 5500x^2 + 16000$
Ordre: 12, Indice: 3, Nom: D_{12}
$x^{12} - 572x^6 + 470596$
Ordre: 12, Indice: 4, Nom: 6.2
$x^{12} + 3x^{11} + 74x^{10} - 1106x^9 + 2292x^8 - 66585x^7 + 662303x^6 - 2691684x^5 + 21082717x^4 - 153539367x^3 + 510340995x^2 - 741257485x^1 + 404146861$
Ordre: 12, Indice: 5, Nom: $\mathfrak{A}_4$
$x^{12} + 36x^{10} + 456x^8 + 2672x^6 + 7632x^4 + 10368x^2 + 5184$
Ordre: 14, Indice: 2, Nom: D_{14}
$x^{14} + 98x^{10} + 343x^8 + 343x^6 + 3773x^4 - 2058x^2 + 343$
Ordre: 16, Indice: 6, Nom: $D_8 \times 2$
$x^{16} - 30x^{14} + 125x^{12} + 1650x^{10} + 3612x^8 + 17670x^6 + 64325x^4 + 25350x^2 + 28561$
Ordre: 16, Indice: 7, Nom: $Q_8 \times 2$
$x^{16} - 16x^{14} + 124x^{12} - 376x^{10} + 1408x^8 - 1264x^6 + 4888x^4 + 1136x^2 + 8836$
Ordre: 16, Indice: 8, Nom: $D_8 \curlyvee 4$
$x^{16} - 20x^{14} + 302x^{12} - 2140x^{10} + 11851x^8 - 33900x^6 + 151002x^4 + 10260\text{-}0x^2 + 50625$
Ordre: 16, Indice: 9, Nom: 10
$x^{16} - 16x^{14} + 136x^{12} - 416x^{10} - 464x^8 + 5760x^6 + 18560x^4 + 12800x^2 + 6400$
Ordre: 16, Indice: 10, Nom: $(2 \times 4).2$
$x^{16} - 8x^{15} - 201x^{14} + 892x^{13} + 18358x^{12} - 9048x^{11} - 797829x^{10} - 22050\text{-}79x^9 + 10359868x^8 + 71311097x^7 + 144533539x^6 + 42113061x^5 - 26788\text{-}0287x^4 - 400831191x^3 - 192428094x^2 - 11135339x^1 + 4621601$
Ordre: 16, Indice: 11, Nom: 10
$x^{16} - 130x^{14} - 260x^{13} + 4875x^{12} + 14300x^{11} - 64870x^{10} - 238940x^9 + 231985x^8 + 1250600x^7 - 2366000x^5 - 1318200x^4 + 1216800x^3 + 1487200x^2 + 540800x^1 + 67600$
Ordre: 16, Indice: 12, Nom: D_{16}
$x^{16} + 2x^{14} - 21x^{12} - 14x^{10} + 217x^8 - 308x^6 + 168x^4 - 40x^2 + 4$
Ordre: 16, Indice: 13, Nom: QD_{16}
$x^{16} - 48x^{12} + 2496x^8 + 9216x^4 + 36864$

Ordre: 18, Indice: 3, Nom: D_{18}
$x^{18} + 18x^{16} + 27x^{14} + 459x^{10} + 3402x^8 - 3915x^6 + 13284x^4 - 12636x^2 + 3456$
Ordre: 18, Indice: 4, Nom: $\mathfrak{S}_3 \times 3$
$x^{18} + 171x^{12} + 5130x^6 + 27$
Ordre: 18, Indice: 5, Nom: $3^2 \rtimes 2$
$x^{18} - 63x^{12} + 1971x^6 + 27$
Ordre: 20, Indice: 3, Nom: D_{20}
$x^{20} + 8x^{18} - 84x^{16} - 1734x^{14} - 4124x^{12} + 72374x^{10} + 515369x^8 + 884616x^6 + 54854x^4 + 8816108x^2 + 29300569$
Ordre: 20, Indice: 4, Nom: 10.2
$x^{20} - 3x^{19} - 119x^{18} + 177x^{17} + 5889x^{16} - 1381x^{15} - 152812x^{14} - 117981x^{13} + 2164979x^{12} + 3491841x^{11} - 15663089x^{10} - 38883595x^9 + 42546574x^8 + 187263905x^7 + 52059719x^6 - 314665312x^5 - 318011368x^4 + 4965810x^3 + 106222904x^2 + 21505161x^1 - 6072119$
Ordre: 20, Indice: 5, Nom: $5 \rtimes 4$
$x^{20} + 2500x^{10} + 50000$
Ordre: 21, Indice: 2, Nom: $7 \rtimes 3$
$x^{21} - 98x^{19} + 3920x^{17} - 83496x^{15} - 686x^{14} + 1037232x^{13} + 32928x^{12} - 7760032x^{11} - 576240x^{10} + 34881728x^9 + 4609920x^8 - 90287204x^7 - 17748\text{-}192x^6 + 119800296x^5 + 30118144x^4 - 58622816x^3 - 15059072x^2 + 134456$
Ordre: 22, Indice: 2, Nom: D_{22}
$x^{22} + 24x^{20} + 250x^{18} + 1464x^{16} + 5189x^{14} + 11253x^{12} + 15224x^{10} + 14538x^8 + 9602x^6 + 4600x^4 + 1337x^2 + 167$
Ordre: 24, Indice: 4, Nom: $D_8 \times 3$
$x^{24} - 80x^{22} + 2238x^{20} - 29894x^{18} + 223781x^{16} - 1017496x^{14} + 2914259x^{12} - 5287975x^{10} + 5946850x^8 - 3933875x^6 + 1405625x^4 - 243750x^2 + 15625$
Ordre: 24, Indice: 5, Nom: $Q_8 \times 3$
$x^{24} + 8x^{23} - 24x^{22} - 328x^{21} - 90x^{20} + 5056x^{19} + 7000x^{18} - 38144x^{17} - 78904x^{16} + 147968x^{15} + 414204x^{14} - 266424x^{13} - 1153342x^{12} + 92848x^{11} + 1740480x^{10} + 321856x^9 - 1420137x^8 - 426160x^7 + 591816x^6 + 195232x^5 - 104924x^4 - 33128x^3 + 4040x^2 + 928x^1 - 71$
Ordre: 24, Indice: 6, Nom: $\mathfrak{S}_3 \times 2^2$
$x^{24} - 80x^{22} + 2328x^{20} - 32148x^{18} + 230904x^{16} - 929240x^{14} + 2169688x^{12} - 2925232x^{10} + 2172144x^8 - 799192x^6 + 117088x^4 - 6192x^2 + 100$
Ordre: 24, Indice: 7, Nom: $\mathfrak{S}_3 \times 4$
$x^{24} - 64x^{22} + 1736x^{20} - 26136x^{18} + 240152x^{16} - 1393584x^{14} + 5101236x^{12} - 11397664x^{10} + 14412192x^8 - 8822384x^6 + 1829968x^4 - 125600x^2 + 2500$
Ordre: 24, Indice: 8, Nom: 2×6.2
$x^{24} - 36x^{22} + 20x^{21} + 642x^{20} - 720x^{19} - 6792x^{18} + 12060x^{17} + 43803x^{16} - 118240x^{15} - 140712x^{14} + 705960x^{13} - 120532x^{12} - 2367360x^{11} + 30278\text{-}$

$88x^{10} + 2400280x^{9} - 9582057x^{8} + 9070560x^{7} + 2157868x^{6} - 20076540x^{5} + 40120722x^{4} - 53553840x^{3} + 53140344x^{2} - 36475380x^{1} + 15562381$

Ordre: 24, Indice: 9, Nom: 12.2

$x^{24} + 11x^{23} - 314x^{22} - 4942x^{21} + 18284x^{20} + 683470x^{19} + 2461319 \times x^{18} - 28936790x^{17} - 262331975x^{16} - 276203240x^{15} + 5021512205x^{14} + 21510167645x^{13} - 3917351678x^{12} - 221767368751x^{11} - 446623951567x^{10} + 394461454530x^{9} + 2431575723468x^{8} + 2146941393467x^{7} - 2555036459478x^{6} - 5605355205205x^{5} - 2425530991885x^{4} + 1237257113143x^{3} + 1183192406717x^{2} + 192698935305x^{1} - 18574137871$

Ordre: 24, Indice: 10, Nom: $\mathfrak{A}_4 \times 2$

$x^{24} + 342x^{22} + 49301x^{20} + 3912326x^{18} + 187678554x^{16} + 5650086198x^{14} + 108154225181x^{12} + 1319599431258x^{10} + 10174131603706x^{8} + 48299321756202x^{6} + 133582201676853x^{4} + 191341955314810x^{2} + 104669084485681$

Ordre: 24, Indice: 12, Nom: D_{24}

$x^{24} - 348x^{22} + 49254x^{20} - 3716012x^{18} + 164442273x^{16} - 4424980560x^{14} + 72739682272x^{12} - 717145908480x^{10} + 4063089676032x^{8} - 12086931566592x^{6} + 15608839200768x^{4} - 6732557844480x^{2} + 896702939136$

Ordre: 24, Indice: 14, Nom: $\mathfrak{S}l(2,3)$

$x^{24} - 90x^{22} + 3375x^{20} - 69012x^{18} + 846125x^{16} - 6454530x^{14} + 30881393x^{12} - 91668116x^{10} + 164273115x^{8} - 170113210x^{6} + 95359797x^{4} - 25847876x^{2} + 2521744$

Ordre: 24, Indice: 15, Nom: $\mathfrak{S}_4$

$x^{24} + 12x^{23} + 114x^{22} + 748x^{21} + 4057x^{20} + 17932x^{19} + 68274x^{18} + 223788x^{17} + 660446x^{16} + 1757564x^{15} + 4534274x^{14} + 11185948x^{13} + 27788031x^{12} + 64634552x^{11} + 140677848x^{10} + 268118788x^{9} + 527507906x^{8} + 950649552x^{7} + 2089102884x^{6} + 3628184976x^{5} + 8367636821x^{4} + 11478945892x^{3} + 21189734384x^{2} + 15943995288x^{1} + 5607107728$

Ordre: 26, Indice: 2, Nom: D_{26}

$x^{26} - 10x^{24} - 117x^{22} + 493x^{20} + 7429x^{18} + 35144x^{16} + 84444x^{14} + 122743x^{12} + 113404x^{10} + 70253x^{8} + 29953x^{6} + 9113x^{4} + 1882x^{2} + 191$

Ordre: 27, Indice: 4, Nom: $3^2 \rtimes 3$

$x^{27} - 853x^{25} + 1677x^{24} + 300981x^{23} - 1096758x^{22} - 56977801x^{21} + 292628115x^{20} + 6262298949x^{19} - 41388105096x^{18} - 401368678145x^{17} + 3378112766301x^{16} + 13896190603229x^{15} - 162481805891262x^{14} - 178578895495435x^{13} + 4529497506622959x^{12} - 2989340523410765x^{11} - 69693749268510822x^{10} + 124612551331390513x^{9} + 527907780509368077x^{8} - 1403175114327466233x^{7} - 1522558748101069692x^{6} + 5706545152536212569x^{5} + 1997685375401190423x^{4} - 10052240037581755481x^{3} - 2565262903158932886 \times x^{2} + 6769478476590589305x^{1} + 3066016863824092269$

Ordre: 27, Indice: 5, Nom: $9 \rtimes 3$

$x^{27} - 219x^{25} - 219x^{24} + 17739x^{23} + 27594x^{22} - 694303x^{21} - 1276770x^{20}$

$+ 14344062x^{19} + 27787815x^{18} - 162347985x^{17} - 314144550x^{16} + 10185\text{-}26441x^{15} + 1943875317x^{14} - 3523055190x^{13} - 6703796736x^{12} + 6512416359 \times x^{11} + 12788576832x^{10} - 5984482987x^{9} - 13395411378x^{8} + 1936137609x^{7} + 7523977797x^{6} + 619704081x^{5} - 2069181423x^{4} - 546179868x^{3} + 18906\text{-}2262x^{2} + 94531131x^{1} + 10503459$

Ordre: 28, Indice: 3, Nom: D_{28}

$x^{28} + 8x^{27} - 62x^{26} - 640x^{25} + 1323x^{24} + 21520x^{23} - 5952x^{22} - 40636\text{-}8x^{21} - 290853x^{20} + 4656932x^{19} + 8077060x^{18} - 28496176x^{17} - 10386\text{-}2019x^{16} + 14938224x^{15} + 626545050x^{14} + 1036218808x^{13} + 137659210x^{12} - 5411270852x^{11} - 15589187184x^{10} - 18615903316x^{9} + 15034352743x^{8} + 113013075944x^{7} + 236543210810x^{6} + 258688165952x^{5} + 108427933059x^{4} + 17876061076x^{3} + 30120151370x^{2} - 15584410248x^{1} + 5920993129$

Ordre: 28, Indice: 4, Nom: 14.2

$x^{28} - 15x^{27} - 1441x^{26} + 20567x^{25} + 898244x^{24} - 12054892x^{23} - 31605\text{-}8032x^{22} + 3932876584x^{21} + 68591802295x^{20} - 778724284249x^{19} - 94001\text{-}42118906x^{18} + 95683111322717x^{17} + 797935007348745x^{16} - 7169725776\text{-}035490x^{15} - 39407258690315632x^{14} + 311631021150225524x^{13} + 1019492544\text{-}140511247x^{12} - 7357043398815725090x^{11} - 13515683448617609523x^{10} + 92749\text{-}062054830408061x^{9} + 866585153315176934 32x^{8} - 60759912683247092892\text{-}5x^{7} - 216546923064728618878x^{6} + 192029815084251824 2334x^{5} - 10148\text{-}0772659000099110x^{4} - 2372781436425111428376x^{3} + 98654039938060055027\text{-}7x^{2} + 386338046253060504659x^{1} - 172268099115883904311$

Ordre: 30, Indice: 2, Nom: $D_{10} \times 3$

$x^{30} + 10x^{29} + 25x^{28} - 70x^{27} - 525x^{26} - 1078x^{25} - 170x^{24} + 2930x^{23} + 15345x^{22} + 92510x^{21} + 275272x^{20} + 233570x^{19} - 1271465x^{18} - 5535310x^{17} - 3400440x^{16} + 27262114x^{15} + 53295255x^{14} - 24373750x^{13} - 131372930x^{12} - 39767070x^{11} + 130328267x^{10} + 67845450x^{9} + 43908280x^{8} + 263620990x^{7} + 344149465x^{6} + 191239554x^{5} + 223335890x^{4} + 216511170x^{3} + 96832320x^{2} + 20316880x^{1} + 40207721$

Ordre: 30, Indice: 3, Nom: $\mathfrak{S}_3 \times 5$

$x^{30} - 1174x^{29} + 373465x^{28} - 44675488x^{27} + 2796090542x^{26} - 1056744370\text{-}22x^{25} + 2593807705842x^{24} - 42958742516328x^{23} + 487374402855723x^{22} - 3754410282689253x^{21} + 18652836409635384x^{20} - 49108153278373279x^{19} - 15630015362956957x^{18} + 574329966348658853x^{17} - 1565253882101447967 \times x^{16} - 183852684373715990x^{15} + 8902636701389896454x^{14} - 1307962982\text{-}5149956059x^{13} - 14629132029660004360x^{12} + 52127265054755929141x^{11} - 131484498524173819 75x^{10} - 80781537234770737420x^{9} + 671285309165250\text{-}22632x^{8} + 45783565846658314715x^{7} - 67870268216648485817x^{6} + 15945\text{-}25347792164315x^{5} + 19656387284383774118x^{4} - 29088965916909710 13x^{3} - 1758168868440482184x^{2} + 201643982094491887x^{1} + 9948096306162167$

Ordre: 30, Indice: 4, Nom: D_{30}

$x^{30} - 40x^{28} + 360x^{26} + 786x^{24} + 2680x^{22} + 3670x^{20} + 17287x^{18} + 77210x^{16}$
$+ 212810x^{14} + 472993x^{12} + 825585x^{10} + 1121375x^{8} + 1259075x^{6} + 92137$-
$5x^{4} + 569375x^{2} + 29375$
Ordre: 32, Indice: 8, Nom: $D_8 \times 2^2$
$x^{32} + 12x^{30} + 72x^{28} + 528x^{26} + 2945x^{24} + 6912x^{22} + 10296x^{20} + 14148x^{18}$
$+ 16608x^{16} + 14148x^{14} + 10296x^{12} + 6912x^{10} + 2945x^{8} + 528x^{6} + 72x^{4} +$
$12x^{2} +$
Ordre: 32, Indice: 9, Nom: $Q_8 \times 2^2$
$x^{32} - 56x^{30} + 1380x^{28} - 19312x^{26} + 172226x^{24} - 1014504x^{22} + 3942088x^{20}$
$- 9290600x^{18} + 9686421x^{16} + 9825760x^{14} - 19617860x^{12} - 21258024x^{10} +$
$105665096x^{8} + 286780592x^{6} + 319339992x^{4} + 186365680x^{2} + 46430596$
Ordre: 32, Indice: 10, Nom: $D_8 \curlyvee 4 \times 2$
$x^{32} + 16x^{31} + 64x^{30} - 280x^{29} - 2436x^{28} + 1624x^{27} + 51616x^{26} + 73840x^{25}$
$- 487194x^{24} - 1214168x^{23} + 3158304x^{22} + 11808688x^{21} - 9017556x^{20} -$
$56648888x^{19} + 55417264x^{18} + 383500768x^{17} + 342750185x^{16} - 70648120 \times$
$x^{15} + 1671423424x^{14} + 8305475848x^{13} + 17464276000x^{12} + 22340954112x^{11}$
$+ 23737598480x^{10} + 33943306928x^{9} + 66912179880x^{8} + 115365216800x^{7}$
$+ 98829250432x^{6} - 9147025888x^{5} + 62327512896x^{4} + 228133593216x^{3} +$
$102638344000x^{2} - 25235939136x^{1} + 123640037776$
Ordre: 32, Indice: 12, Nom: $2 \times (2 \times 4).2$
$x^{32} + 10x^{31} - 31x^{30} - 500x^{29} + 525x^{28} + 12370x^{27} - 7628x^{26} - 19317$-
$0x^{25} + 121576x^{24} + 2089590x^{23} - 1712111x^{22} - 16298560x^{21} + 18174$-
$362x^{20} + 92990680x^{19} - 139842902x^{18} - 383271540x^{17} + 790088533x^{16} +$
$1062844880x^{15} - 3267183438x^{14} - 1450571900x^{13} + 9881218302x^{12} - 24445$-
$21190x^{11} - 20237261319x^{10} + 18426891040x^{9} + 24158414946x^{8} - 49813$-
$637570x^{7} + 7345386208x^{6} + 59920589310x^{5} - 57823701425x^{4} - 2539339755$-
$0x^{3} + 112285667941x^{2} - 113647483280x^{1} + 54148638581$
Ordre: 32, Indice: 14, Nom: $D_8 \times 4$
$x^{32} + 8x^{31} + 36x^{30} + 120x^{29} + 442x^{28} + 1568x^{27} + 4508x^{26} + 9752x^{25} +$
$28159x^{24} + 92544x^{23} + 156404x^{22} - 519216x^{21} - 4665528x^{20} - 14419496 \times$
$x^{19} - 29345896x^{18} - 54554216x^{17} - 18637695x^{16} + 197034456x^{15} + 11943$-
$6944x^{14} - 1609516776x^{13} + 9660333564x^{12} + 37847628736x^{11} + 2396449602$-
$0x^{10} - 51668363536x^{9} + 176305354979x^{8} + 490907559208x^{7} - 2845439894$-
$36x^{6} + 739553546928x^{5} + 952265897934x^{4} - 1363864630168x^{3} - 29568$-
$43416404x^{2} + 1832349655720x^{1} + 38614571220961$
Ordre: 32, Indice: 15, Nom: $Q_8 \times 4$
$x^{32} + 8x^{31} - 12x^{30} - 240x^{29} - 162x^{28} + 3280x^{27} + 5336x^{26} - 24576x^{25} -$
$55605x^{24} + 117400x^{23} + 345228x^{22} - 348976x^{21} - 1415178x^{20} + 574200x^{19}$
$+ 4108780x^{18} + 121008x^{17} - 8313952x^{16} - 2690352x^{15} + 12612100x^{14} +$
$8508480x^{13} - 11080866x^{12} - 10767520x^{11} + 11638956x^{10} + 23537560x^{9} +$
$13299510x^{8} + 530280x^{7} + 5923532x^{6} + 16536328x^{5} + 13391232x^{4} + 12637$-

$44x^3 + 7544100x^2 + 1000496x^1 + 3268201$
Ordre: 32, Indice: 17, Nom: $D_8 \curlyvee 8$
$x^{32} - 204x^{30} + 15300x^{28} - 597312x^{26} + 13860729x^{24} - 204001632x^{22} +$
$1975438692x^{20} - 12877852716x^{18} + 57219835968x^{16} - 173668281012x^{14} +$
$357140532132x^{12} - 488355187104x^{10} + 430652400057x^8 - 233805346560x^6$
$+ 72333529092x^4 - 10959625620x^2 + 547981281$
Ordre: 32, Indice: 21, Nom: $8 + Q_8$
$x^{32} - 384x^{31} + 70496x^{30} - 8229248x^{29} + 685587920x^{28} - 43395770496x^{27} +$
$2170659946688x^{26} - 88166507113088x^{25} + 2966962444402280x^{24} - 84017$-
$846151918336x^{23} + 202696678701072 9280x^{22} - 4207651454432490265 6x^{21} +$
$757525433777614337760x^{20} - 11903020972795842877184x^{19} + 1640464064$-
$51522272480128x^{18} - 1990579200699928150412032x^{17} + 213275552506580$-
$69141446808x^{16} - 2021929598678487692266 23488x^{15} + 16986656679427 6$-
$5453544142976x^{14} - 126596677002275284071633 86368x^{13} + 837559733535956$-
$61199230409664x^{12} - 492112685481916273201438836224x^{11} + 2567867922$-
$2698196350824295825 92x^{10} - 118912441378957819563132591139 84x^9 + 48765$-
$10255408588730670012707 6768x^8 - 1762966493500172959932650356787 20x^7$
$+ 557210831181078708169306288133888x^6 - 151868484981345744927 8395$-
$543110656x^5 + 349338377106894974714537349928 8192x^4 - 655764277148721$-
$2155803259398321152x^3 + 95090603821167877124073748838691 84x^2 - 96316$-
$01385091006671623137215226880x^1 + 53268472178752207138533039151657 12$
Ordre: 32, Indice: 23, Nom: $D_{16} \times 2$
$x^{32} + 16x^{31} + 140x^{30} + 860x^{29} + 4056x^{28} + 15372x^{27} + 48188x^{26} + 12755$-
$6x^{25} + 291008x^{24} + 587636x^{23} + 1084760x^{22} + 1881452x^{21} + 3096898x^{20}$
$+ 4800796x^{19} + 6929020x^{18} + 9292052x^{17} + 11743788x^{16} + 14399476x^{15} +$
$17700452x^{14} + 22115436x^{13} + 27692448x^{12} + 33693484x^{11} + 38735912x^{10}$
$+ 41146084x^9 + 39884993x^8 + 34911748x^7 + 27454784x^6 + 19107424x^5 +$
$11724016x^4 + 6147168x^3 + 2716224x^2 + 880128x^1 + 242496$
Ordre: 32, Indice: 24, Nom: $QD_{16} \times 2$
$x^{32} + 80x^{30} + 2904x^{28} + 67120x^{26} + 1156796x^{24} + 15257040x^{22} + 15852$-
$0616x^{20} + 1414095920x^{18} + 11713769958x^{16} + 82046146160x^{14} + 41692$-
$0989928x^{12} + 1299139126800x^{10} + 3509297019644x^8 + 2659952210800x^6 +$
$3748631514648x^4 - 2226040547440x^2 + 2154698116321$
Ordre: 32, Indice: 26, Nom: $D_{16} \curlyvee 4$
$x^{32} + 48x^{31} + 1000x^{30} + 12416x^{29} + 114080x^{28} + 930384x^{27} + 68482$-
$96x^{26} + 42836128x^{25} + 244619012x^{24} + 1382129456x^{23} + 7162106632x^{22}$
$+ 35879192768x^{21} + 194489433488x^{20} + 991300363984x^{19} + 4829886546$-
$120x^{18} + 23220735386976x^{17} + 91230949065166x^{16} + 339320100632592x^{15}$
$+ 1257488339027640x^{14} + 3213379502138624x^{13} + 9645688523839424x^{12} +$
$25625059867967600x^{11} + 69873571195659128x^{10} + 330152912653104480x^9$
$+ 108552487954062510 8x^8 + 4456438147781685392x^7 + 154905248799602$-

$71960x^6 + 26997380752213609920x^5 + 79650921844387825296x^4 + 18559$-
$2174973428342384x^3 + 46956481935748403864x^2 + 53020096540573960412$-
$8x^1 + 2195815816486535786201$
Ordre: 32, Indice: 35, Nom: $Q_8 + Q_8$
$x^{32} - 192x^{30} + 16848x^{28} - 849600x^{26} + 25640820x^{24} - 447087168x^{22} +$
$3882270384x^{20} - 3812391360x^{18} - 91359208746x^{16} - 1775497734720x^{14} +$
$30280491884016x^{12} - 90440865389376x^{10} + 936251640197460x^8 - 14042$-
$81065187520x^6 + 7242495778908432x^4 - 4877143440312384x^2 + 6835182246$-
375921
Ordre: 32, Indice: 42, Nom: $D_8 \curlyvee D_8$
$x^{32} - 16x^{30} + 300x^{28} + 256x^{27} - 4520x^{26} - 7376x^{25} + 38048x^{24} + 87872 \times$
$x^{23} - 201088x^{22} - 474672x^{21} + 653628x^{20} + 693024x^{19} - 337208x^{18} +$
$3995328x^{17} - 5778074x^{16} - 24079104x^{15} + 26418896x^{14} + 53426816x^{13} -$
$56657932x^{12} - 55577856x^{11} + 70785032x^{10} + 22900048x^9 - 47297040x^8 -$
$32271040x^7 + 105656768x^6 - 71328016x^5 + 14966436x^4 - 9891360x^3 +$
$11059480x^2 + 1107200x^1 + 360025$
Ordre: 32, Indice: 43, Nom: $D_8 \curlyvee Q_8$
$x^{32} - 180x^{30} + 12204x^{28} - 430920x^{26} + 9041319x^{24} - 120894120x^{22} +$
$1073392236x^{20} - 6484139100x^{18} + 26998923969x^{16} - 77809669200x^{14} +$
$154568481984x^{12} - 208905039360x^{10} + 187480790784x^8 - 107226685440x^6$
$+ 36440948736x^4 - 6449725440x^2 + 429981696$
Ordre: 32, Indice: 49, Nom: D_{32}
$x^{32} - 8x^{31} + 34x^{30} - 91x^{29} + 161x^{28} - 157x^{27} + 126x^{25} + 481x^{24} - 2526x^{23}$
$+ 5420x^{22} - 6563x^{21} + 3729x^{20} + 872x^{19} - 214x^{18} - 11285x^{17} + 31222x^{16}$
$- 51808x^{15} + 66851x^{14} - 73179x^{13} + 69871x^{12} - 59956x^{11} + 47265x^{10} -$
$34428x^9 + 25033x^8 - 19040x^7 + 13622x^6 - 9009x^5 + 5021x^4 - 1946x^3 +$
$641x^2 - 140x^1 + 25$
Ordre: 34, Indice: 2, Nom: D_{34}
$x^{34} - 45x^{33} + 2570x^{32} - 81246x^{31} + 2720455x^{30} - 67022203x^{29} + 16628$-
$82505x^{28} - 33654992099x^{27} + 673358658706x^{26} - 11542981096918x^{25} +$
$194136244917212x^{24} - 2872416510118911x^{23} + 41570232426849823x^{22} - 53714$-
$3556136833083x^{21} + 6782819562635099439x^{20} - 77066563206473466978x^{19}$
$+ 856035172768352848242x^{18} - 8578849200612503744510x^{17} + 8416067271$-
$1612743325484x^{16} - 743682336556983262608175x^{15} + 64481491759522692860$-
$31745x^{14} - 50046347229568882412439773x^{13} + 3826087527425758363629280$-
$39x^{12} - 2586941462775899334814078664x^{11} + 1733873532576478479553486$-
$6207x^{10} - 100672008960274375778266247153x^9 + 58574718118942821310$-
$4327321898x^8 - 2850055100574404256409629250161x^7 + 141732681306189$-
$57884379483963567x^6 - 55319298573971649171443329577345x^5 + 2294738758$-
$14380208361622318903968x^4 - 657079714188709698768877360712134x^3 + 21853$-
$86851496001502194366674413605x^2 - 3593014950930232330873502121330952 \times$

$x^{1} + 893260957937212492775625371593625 9$

Ordre: 36, Indice: 5, Nom: $6 \times \mathfrak{S}_3$

$x^{36} - 84x^{34} + 3152x^{32} - 69842x^{30} + 1018040x^{28} - 10297384x^{26} + 74348$-
$101x^{24} - 388584808x^{22} + 1477217628x^{20} - 4076051390x^{18} + 8098386352x^{16}$
$- 11423185988x^{14} + 11196020694x^{12} - 7389755784x^{10} + 3139412060x^{8} -$
$803447252x^{6} + 111564448x^{4} - 6598664x^{2} + 38809$

Ordre: 36, Indice: 6, Nom: 3×6.2

$x^{36} - 166x^{34} - 80x^{33} + 11117x^{32} + 7680x^{31} - 406784x^{30} - 320040x^{29} +$
$9164152x^{28} + 7606640x^{27} - 134877072x^{26} - 113897960x^{25} + 1338603388 \times$
$x^{24} + 1121374880x^{23} - 9106952832x^{22} - 7385200600x^{21} + 42777911722x^{20} +$
$32657017520x^{19} - 138870299852x^{18} - 96457489080x^{17} + 310393409110x^{16} +$
$187920406400x^{15} - 473616279104x^{14} - 237004066520x^{13} + 486098439936x^{12}$
$+ 189500833680x^{11} - 327710333600x^{10} - 94758927320x^{9} + 140230246700 \times$
$x^{8} + 29670687200x^{7} - 36446214400x^{6} - 5775871400x^{5} + 5355362525x^{4} +$
$649778000x^{3} - 381822750x^{2} - 31939000x^{1} + 8615125$

Ordre: 36, Indice: 7, Nom: $\mathfrak{A}_4 \times 3$

$x^{36} - 261x^{34} + 84x^{33} + 29874x^{32} - 16380x^{31} - 1981104x^{30} + 1351308 \times$
$x^{29} + 84888818x^{28} - 61909120x^{27} - 2485698600x^{26} + 1738803906x^{25} +$
$51342844156x^{24} - 31120621728x^{23} - 761139535454x^{22} + 354483883250x^{21} +$
$8152705393366x^{20} - 2421703706660x^{19} - 62936429800642x^{18} + 7509851571$-
$684x^{17} + 346224533099824x^{16} + 17119361405020x^{15} - 1329884444980562 \times$
$x^{14} - 257685527123136x^{13} + 3459590120621496x^{12} + 1040447283988238 \times$
$x^{11} - 5841740274601156x^{10} - 2098668284216224x^{9} + 6045997736957797 \times$
$x^{8} + 2176393095972830x^{7} - 3540663683962081x^{6} - 1063365055447184x^{5} +$
$1010009558684544x^{4} + 184072043547728x^{3} - 98042591982960x^{2} - 16420$-
$52087424x^{1} + 1686327332544$

Ordre: 36, Indice: 13, Nom: $\mathfrak{S}_3^2$

$x^{36} - 12x^{34} + 69x^{32} - 12x^{31} - 240x^{30} + 24x^{29} + 216x^{28} + 52x^{27} + 1116x^{26}$
$+ 576x^{25} - 6132x^{24} - 5148x^{23} + 36432x^{22} + 59304x^{21} - 56214x^{20} - 13489$-
$2x^{19} + 254292x^{18} + 413712x^{17} - 147114x^{16} - 567492x^{15} + 870624x^{14} +$
$311400x^{13} - 513120x^{12} - 779364x^{11} + 2359044x^{10} - 1116320x^{9} - 18756x^{8}$
$- 446484x^{7} + 2421312x^{6} - 2488872x^{5} + 1405149x^{4} - 509412x^{3} + 116952x^{2}$
$- 14256x^{1} + 733$

Ordre: 36, Indice: 14, Nom: $3^2 \rtimes 4$

$x^{36} + 12x^{34} - 144x^{32} - 5040x^{30} - 61290x^{28} - 220968x^{26} + 9627444 \times$
$x^{24} + 148891392x^{22} + 622214865x^{20} - 323381700x^{18} - 4405276044x^{16} +$
$20225527632x^{14} + 108505417536x^{12} - 737226774720x^{10} + 1790972907840x^{8}$
$- 2437435411200x^{6} + 1387815379200x^{4} + 141647616000x^{2} + 1492992000$

Ordre: 38, Indice: 2, Nom: D_{38}

$x^{38} - 23x^{37} + 1775x^{36} - 35103x^{35} + 1447927x^{34} - 24964853x^{33} + 72363$-
$2749x^{32} - 10990404216x^{31} + 248953082928x^{30} - 3355690412130x^{29} + 62744$-

$717941887x^{28} - 754495345570954x^{27} + 12027806661979852x^{26} - 1294332886$-
$70493085x^{25} + 1795871411715327803x^{24} - 17316509179975894452x^{23} + 21202$-
$1875888812598866x^{22} - 1830691508136843243263x^{21} + 199679013116460$-
$70573595x^{20} - 153974145801731595405302x^{19} + 1505934650447340441208924 \times$
$x^{18} - 10317703099270209172641465x^{17} + 90900595221631494091342232x^{16}$
$- 548843931301560621083868266x^{15} + 437008026681963802010088461x^{14}$
$- 22966408829002007403689732452x^{13} + 165719231944864545375473392653 \times$
$x^{12} - 744116123436772263483278858813x^{11} + 4880841827146515163965345$-
$331674x^{10} - 18204558705372131332594077886854x^{9} + 10908149512802330793$-
$6928657963813x^{8} - 323241299361223776396287388720050x^{7} + 1786295787$-
$015073908578614887879623x^{6} - 3902258974024862783171852173738097x^{5} +$
$20274710253553398893747359526785395x^{4} - 283778214888510033333202291753$-
$42600x^{3} + 144023733124961640089742312996160515x^{2} - 926331627264998$-
$17849588712586535037x^{1} + 493599794667049001443058829382617719$

Ordre: 39, Indice: 2, Nom: $13 \rtimes 3$

$x^{39} - 234x^{37} - 195x^{36} + 23634x^{35} + 33579x^{34} - 1369524x^{33} - 2524860 \times$
$x^{32} + 50993046x^{31} + 109726461x^{30} - 1293879717x^{29} - 3076777665x^{28} +$
$23136775155x^{27} + 58870139211x^{26} - 297121258395x^{25} - 792695081529x^{24}$
$+ 2763239423139x^{23} + 7634693279889x^{22} - 18593030584557x^{21} - 52918$-
$961392323x^{20} + 89502097403979x^{19} + 263399315088663x^{18} - 3004248426$-
$71733x^{17} - 931927500966267x^{16} + 668317588182621x^{15} + 229935179545496$-
$1x^{14} - 880844567796531x^{13} - 3836344361395923x^{12} + 458895734526762 \times$
$x^{11} + 4128225889909329x^{10} + 326890401637527x^{9} - 2676910504332870x^{8}$
$- 568509025209957x^{7} + 963250661818224x^{6} + 270527296711113x^{5} - 17549$-
$1163565523x^{4} - 50022000931617x^{3} + 13884361386246x^{2} + 2740650268824x^{1}$
$- 366701990616$

Ordre: 40, Indice: 7, Nom: $4 \times D_{10}$

$x^{40} - 70x^{39} + 2295x^{38} - 43632x^{37} + 505289x^{36} - 3242128x^{35} + 2809775x^{34}$
$+ 110119028x^{33} - 298021552x^{32} - 11200166352x^{31} + 133133865319x^{30} -$
$318061192054x^{29} - 3273268988655x^{28} + 48278857653924x^{27} + 1161009456$-
$97993x^{26} - 1006777227180882x^{25} + 19638865801874539x^{24} + 1328818176$-
$23293062x^{23} + 379649993747564890x^{22} + 9138851368159623108x^{21} + 10441$-
$5497011586337310x^{20} + 686043261820637683110x^{19} + 66481000923677525347$-
$30x^{18} + 63379700412026750540334x^{17} + 482430807926333029506714x^{16} +$
$3544519592579667807508588x^{15} + 26810337076034850657235156x^{14} + 18217$-
$8951582132124615784232x^{13} + 1134503315127826848856031642x^{12} + 68443$-
$56284509614016677997402x^{11} + 39116729252928703187220429494x^{10} + 20342$-
$9463322809323618239721560x^{9} + 986018287025237025698626428809x^{8} + 45035$-
$17483389107659292404785030x^{7} + 18772919185184402467145676123729x^{6} +$
$69568504098956418623438521844188x^{5} + 232283853603502213350129756719$-
$497x^{4} + 685019091834801180434740371312078x^{3} + 16172297612729923598$-

$48832877060317x^2 + 2566981111471280950741598959147134x^1 + 2049331429$-
546939758664456085813517
Ordre: 40, Indice: 10, Nom: $2 \times 5 \rtimes 4$
$x^{40} + 70392x^{30} + 5660441624x^{20} - 6771345011232x^{10} + 13114052591692816$
Ordre: 42, Indice: 5, Nom: $7 \rtimes 6$
$x^{42} + 48020x^{28} + 96001584x^{14} + 52706752$
Ordre: 44, Indice: 3, Nom: D_{44}
$x^{44} + 70x^{42} + 2219x^{40} + 42148x^{38} + 535433x^{36} + 4817380x^{34} + 31779137 \times$
$x^{32} + 157273576x^{30} + 592968375x^{28} + 1719676540x^{26} + 3852957030x^{24} +$
$6657149774x^{22} + 8770357215x^{20} + 8566157170x^{18} + 5861391360x^{16} + 25619$-
$71276x^{14} + 716543958x^{12} + 286653210x^{10} + 126368117x^8 - 11915402x^6 -$
$3223809x^4 + 1005650x^2 + 196249$
Ordre: 44, Indice: 4, Nom: 22.2
$x^{44} + 31x^{43} - 4942x^{42} - 153745x^{41} + 11139909x^{40} + 347278266x^{39} -$
$15142223037x^{38} - 472313661979x^{37} + 13819283433859x^{36} + 4307399626$-
$93220x^{35} - 8916659912169237x^{34} - 277571403352942245x^{33} + 4167935095$-
$968015363x^{32} + 129720521312213897008x^{31} - 1420544713345826950534x^{30}$
$- 44406035888022533597429x^{29} + 349801355275977490636995x^{28} + 11112$-
$610284682215212810520x^{27} - 60539942393555665659999373x^{26} - 2008146570$-
$817028219425025979x^{25} + 6958440514636381271427748587x^{24} + 2564556848$-
$60490273577034257384x^{23} - 470260918129148658050110460015x^{22} - 22510$-
$509087487121282945804049571x^{21} + 12374513981860225455574218425239 \times$
$x^{20} + 1326029366809974032934026513682288x^{19} + 43327857272391788554$-
$8633956396370x^{18} - 52351133058833690476573324604902352x^{17} - 43939$-
$617851860887838232882460125343x^{16} + 140029162814183613278382897451$-
$7398218x^{15} + 1488009010788476673888939830519718065x^{14} - 2565247609$-
$3332567679557772306089822222x^{13} - 27133123132215677929002562768748901$-
$186x^{12} + 323015982846202510787310135616532045832x^{11} + 282459625295220$-
$152454241810842216243779x^{10} - 2768394892007623090819442860857221920247 \times$
$x^9 - 1566847601834659133589173341084678573324x^8 + 156272945949780$-
$35229054645122761267701333x^7 + 30611322360006797551619062750291389$-
$06216x^6 - 53963567710503297575414995322784680449021x^5 + 9087101306$-
$293659362738139077809210599966x^4 + 97111767026744151231642023107436231$-
$853966x^3 - 44722119375728281208925453731666715204747x^2 - 5868512671$-
$3345521298739585197127978255927x^1 + 323323944052078886167410968174$-
34006495389
Ordre: 46, Indice: 2, Nom: D_{46}
$x^{46} - 19x^{45} + 3887x^{44} - 68513x^{43} + 7191254x^{42} - 117787982x^{41} + 84289$-
$74203x^{40} - 128439871829x^{39} + 7027901220906x^{38} - 99688116391498x^{37} +$
$4436178213872087x^{36} - 58581821048106313x^{35} + 2202615138754313045x^{34}$
$- 27067669860599767477x^{33} + 882224924628161714213x^{32} - 1007956651$-

$2344388366084x^{31} + 29002719275713432891 7553x^{30} - 30760637558996001439$-
$33597x^{29} + 7919571660542170113871 6853x^{28} - 77807205129405893276632 12$-
$57x^{27} + 18107664863895349974313307021x^{26} - 164320451887149938771890 2$-
$43265x^{25} + 34840739457742749721633278407 25x^{24} - 2909377335079015511 2$-
$091504543973x^{23} + 56547858300361316999647585448818 5x^{22} - 4324380355$-
$341582733013056840975199x^{21} + 7741982486414655582700082901274883 9 \times$
$x^{20} - 538872171244362105760759123139815271x^{19} + 891995131283418115 01$-
$8578545622590061 4x^{18} - 5606576762592173097765797058987757105 8x^{17} +$
$860572957038468305216973645472990751632x^{16} - 48348726658349742481623 59$-
$547983538089284x^{15} + 6896695516121472885238324342103279211126 0x^{14} -$
$34169646225254541501672828039493572315242 0x^{13} + 4536759321786604732 3$-
$2706305737609560769506 4x^{12} - 19462832087579244232323869887805169046 10$-
$7671x^{11} + 2407703892359889766712180970983045237493472 93x^{10} - 87166$-
$3211955852533094687405531711159522892368x^9 + 10052137118655204468938 64$-
$702352912483026249311 7x^8 - 29558163776173627959576782403053526261 89$-
$4448329x^7 + 3177675292995595698034302120232308965443284979 93x^6 - 71344$-
$822580797264747650436254257131764382596913 6x^5 + 71469142315290810227$-
$67797271542188252536640031098x^4 - 109227391651499132696413029922624 46$-
$533757389744727x^3 + 10185942455688203039081476460646317047867926785305$-
$7x^2 - 797304286625355977003858556745991402767165840639 30x^1 + 69115$-
$13029646373822417285931256625375335390846070 25$

Ordre: 48, Indice: 7, Nom: $6 \times Q_8$

$x^{48} - 160x^{46} - 24x^{45} + 11544x^{44} + 3264x^{43} - 498904x^{42} - 198696x^{41} +$
$14467118x^{40} + 7190784x^{39} - 298788000x^{38} - 173220504x^{37} + 4553297080x^{36}$
$+ 2946375552x^{35} - 52347047320x^{34} - 36631569768x^{33} + 460410909735x^{32}$
$+ 340018195968x^{31} - 3124487887936x^{30} - 2386803504240x^{29} + 1643354601$-
$7008x^{28} + 12761974608000x^{27} - 67072283924208x^{26} - 52131179131152x^{25} +$
$212088398947300x^{24} + 162626383580160x^{23} - 517266296866624x^{22} - 38615$-
$4229416624x^{21} + 965561530863984x^{20} + 693594824782848x^{19} - 1363249012$-
$428720x^{18} - 933398419093584x^{17} + 1430798417624959x^{16} + 9280248061$-
$67040x^{15} - 1088822077679904x^{14} - 667855174527480x^{13} + 579483422187896 \times$
$x^{12} + 337406759212224x^{11} - 204434796927160x^{10} - 114229651690056x^9 +$
$43959751863054x^8 + 24132719917824x^7 - 4981100927520x^6 - 2853634038$-
$072x^5 + 209711556952x^4 + 158419623552x^3 + 2867507400x^2 - 2714914248 \times$
$x^1 - 182629511$

Ordre: 48, Indice: 13, Nom: $3 \times QD_{16}$

$x^{48} + 36x^{44} - 4x^{42} + 1440x^{41} + 900x^{40} + 5904x^{38} + 51840x^{37} + 12538x^{36} +$
$10080x^{35} + 818496x^{34} - 66816x^{33} + 123012x^{32} + 4129920x^{31} + 418160x^{30}$
$- 1459008x^{29} + 13702968x^{28} + 25098624x^{27} - 31808952x^{26} + 56211840x^{25}$
$+ 39858499x^{24} - 196877952x^{23} - 181349136x^{22} - 21090816x^{21} + 25988$-
$1948x^{20} - 254095488x^{19} + 1316536400x^{18} + 312016896x^{17} - 1337789448x^{16}$

$- 9242371584x^{15} + 3032412336x^{14} + 3339152640x^{13} + 13072363210x^{12} -$
$5611047264x^{11} + 8087752512x^{10} - 8082867456x^{9} + 409125960x^{8} - 10880$-
$980992x^{7} + 4408843388x^{6} + 137434176x^{5} + 3426668280x^{4} - 9336960x^{3} +$
$423243864x^{2} - 83645568x^{1} + 3922993$

Ordre: 48, Indice: 22, Nom: $2^2 \times \mathfrak{A}_4$

$x^{48} - 4x^{47} - 554x^{46} + 2296x^{45} + 132549x^{44} - 590138x^{43} - 18093820x^{42} +$
$88428364x^{41} + 1563728184x^{40} - 8529384410x^{39} - 89528885736x^{38} + 55605$-
$5844066x^{37} + 3439510144065x^{36} - 25154879169740x^{35} - 87046186090982x^{34}$
$+ 800809593735138x^{33} + 1338976439083701x^{32} - 18066858403631970x^{31} -$
$8437691400833644x^{30} + 29009005020482460 0x^{29} - 103975814901091994 \times$
$x^{28} - 3336060463960638156x^{27} + 3096302498735070220x^{26} + 2782312284$-
$7923076762x^{25} - 36677121669975719775x^{24} - 17135003484917953917 8x^{23}$
$+ 268286668616096488852x^{22} + 795811729088383415300x^{21} - 1332649602$-
$535250965586x^{20} - 2844641338230914163354x^{19} + 4635960233041529163 1$-
$66x^{18} + 7928946934687593482234x^{17} - 11300929086629975624009x^{16} - 17163$-
$087781794848799064x^{15} + 188022111131547147500 26x^{14} + 279943877112754$-
$21099864x^{13} - 200300366074224753663 63x^{12} - 324336208096407497391 22 \times$
$x^{11} + 118333062276499570092 76x^{10} + 244959956760528493292 94x^{9} - 23120$-
$7110489296379104 0x^{8} - 108430683636396723211 68x^{7} - 855685373484155$-
$161578x^{6} + 255436892723217486188 6x^{5} + 453535871009482562091x^{4} - 28152$-
$821034141623821 4x^{3} - 626846428284611299 94x^{2} + 111822704680877903 58 \times$
$x^{1} + 2537864536396891751$

Ordre: 48, Indice: 23, Nom: $4 \times \mathfrak{A}_4$

$x^{48} + 1456x^{46} + 951808x^{44} + 370521476x^{42} + 96103164144x^{40} + 1761692587$-
$8656x^{38} + 2364108690215922x^{36} + 237522707268881736x^{34} + 1813300082$-
$3411066528x^{32} + 1062117477707719894032x^{30} + 48018480067655937525504 \times$
$x^{28} + 1680626417371052078304416x^{26} + 45550052380562731634986795x^{24} +$
$953721975931320655032937912x^{22} + 15344295241089972661241205936x^{20} +$
$188032890143550630884818427536x^{18} + 17321679369092469439888394812$-
$8x^{16} + 11773556973840772828164973192992x^{14} + 57509702537491166590$-
$108471275298x^{12} + 194356414524925576769546068788888x^{10} + 4288763109$-
$210781383644656899448 64x^{8} + 5596612104770786840682257044830 92x^{6} + 34924$-
$04335021211530932883332581 12x^{4} + 470122970364311921947133069711 68x^{2}$
$+ 4791987747300088138013872632 1$

Ordre: 48, Indice: 36, Nom: $2 \times \mathfrak{S}_4$

$x^{48} - 784x^{44} - 4816x^{42} + 380912x^{40} - 5931744x^{38} + 109378416x^{36} + 65151$-
$19296x^{34} - 204246260960x^{32} - 8786049238848x^{30} + 106855243485760x^{28}$
$+ 1883310325171072x^{26} + 40403289647381600x^{24} + 889904755283568640x^{22}$
$- 19882280782017092096x^{20} - 579003853577746152192x^{18} + 1054021378$-
$6174196508160x^{16} - 948954079840025951677 44x^{14} - 983237989405035994 45$-
$248x^{12} + 5947499349871228455269376x^{10} + 1347998769857223857749591$-

$04x^8 - 8902072626309649355962193 92x^6 + 7623051845029853896953433088 \times x^4 - 1227735981921565036972761 2928x^2 + 7344311178730778270744924416$

Ordre: 48, Indice: 37, Nom: $4 + \mathfrak{S}_4$

$x^{48} + 1260x^{46} + 722358x^{44} + 250155840x^{42} + 58588818813x^{40} + 9846858805\text{-}560x^{38} + 1229904966070386x^{36} + 116686668851704980x^{34} + 8525172976\text{-}207077330x^{32} + 483600105240058567300x^{30} + 21388868325119995035966 \times x^{28} + 738295283284102318503960x^{26} + 19852816925049736982694093x^{24} + 414006152334119149716064440x^{22} + 6646400610927591676193646678x^{20} + 81265804396919454405796890060x^{18} + 745497961052140785524712524946 \times x^{16} + 5024304085699552068001033111980x^{14} + 241451061276311680755972 0\text{-}6738170x^{12} + 79235750228759680061073945094200x^{10} + 166736790261099\text{-}496211382202398525x^8 + 206499401518228608555462637476000x^6 + 13812\text{-}5506990823219650856561916750x^4 + 430937246915642781980905054725 00x^2 + 4203727109635343570647003400625$

Ordre: 48, Indice: 38, Nom: $D_8 \times \mathfrak{S}_3$

$x^{48} - 4x^{47} - 22x^{46} + 146x^{45} - 71x^{44} - 2152x^{43} + 9742x^{42} + 5486 \times x^{41} - 170459x^{40} + 312640x^{39} + 1565974x^{38} - 5623850x^{37} - 7958668x^{36} + 47746344x^{35} + 6125468x^{34} - 241426140x^{33} + 145281885x^{32} + 534598952 \times x^{31} - 477649574x^{30} + 1979817580x^{29} - 1661505904x^{28} - 7426612692x^{27} + 46475551290x^{26} - 128767911466x^{25} - 599661766912x^{24} + 1465040828136x^{23} + 5984328183530x^{22} - 3575013559182x^{21} - 30003710711095x^{20} - 66552\text{-}18864256x^{19} + 97972077055428x^{18} + 101451602355778x^{17} - 1468716112\text{-}02253x^{16} - 333605645971826x^{15} - 19293373248838x^{14} + 619095095719664 \times x^{13} + 1038187905704283x^{12} + 833000425718818x^{11} - 430781598742514 \times x^{10} - 2454200994041868x^9 - 3460777286577617x^8 - 1822335278517566 \times x^7 + 1500206396883790x^6 + 4584405894423376x^5 + 6831735275214634 \times x^4 + 7936827424994628x^3 + 7112116454062442x^2 + 4188376431845652x^1 + 1353246508677001$

Ordre: 48, Indice: 39, Nom: $Q_8 \times \mathfrak{S}_3$

$x^{48} + 24x^{47} + 228x^{46} + 952x^{45} + 306x^{44} - 11592x^{43} - 21804x^{42} + 139464 \times x^{41} + 612243x^{40} - 145456x^{39} - 5692344x^{38} - 10693128x^{37} + 2324072 \times x^{36} - 19475496x^{35} - 255001536x^{34} - 440822472x^{33} + 1059032106x^{32} + 5484428424x^{31} + 9988011196x^{30} + 17057703192x^{29} + 54502935870x^{28} + 128981856664x^{27} + 86545383660x^{26} - 315338635224x^{25} - 906309677169 \times x^{24} - 1236659851440x^{23} - 2137624011144x^{22} - 4241003657912x^{21} + 55088\text{-}8743192x^{20} + 26372197693992x^{19} + 52072673820496x^{18} - 1591777265976 \times x^{17} - 140625327752514x^{16} - 141883501282440x^{15} + 177087199447908x^{14} + 449372992733928x^{13} + 76820288109338x^{12} - 697562783333016x^{11} - 80915\text{-}9768870412x^{10} + 107739131579768x^9 + 1017332583579063x^8 + 8669447971\text{-}46208x^7 - 11475030753312x^6 - 545825415511800x^5 - 371875829040324x^4 + 13693577081704x^3 + 148006177012248x^2 + 77982869817480x^1 + 14109\text{-}$

260441761

Ordre: 48, Indice: 49, Nom: $Gl(2,3)$

$x^{48} - 480x^{46} + 106032x^{44} - 14334880x^{42} + 1330572756x^{40} - 9017212320\text{-}0x^{38} + 4632436702240x^{36} - 184932117694400x^{34} + 5836378454395900x^{32} - 147421662776595200x^{30} + 3007387769863690112x^{28} - 498727935787562\text{-}96960x^{26} + 6752300091248861077744x^{24} - 74787172143491226137 60x^{22} + 67735\text{-}477390293773377792x^{20} - 500333309936005354995200x^{18} + 300133070933832\text{-}2333222640x^{16} - 1455803640519671872413440 0x^{14} + 5696322478606785920 4\text{-}960000x^{12} - 179517250398668753661043200x^{10} + 448010738403819871 61\text{-}0275136x^{8} - 814363021355913279012500480x^{6} + 811235058764403766088653 3\text{-}12x^{4} - 377097486722546705100 2880x^{2} + 46217421322268167907359 36$

Ordre: 50, Indice: 4, Nom: $D_{10} \times 5$

$x^{50} + 144x^{48} + 8276x^{46} + 229733x^{44} + 642334x^{42} - 272678835x^{40} - 14569\text{-}354635x^{38} - 311776014000x^{36} - 169474184484x^{34} + 163122591780489x^{32} + 4937945100032527x^{30} + 71439018510864661x^{28} + 623847112379751851 \times x^{26} + 19120295096674272 5x^{24} - 5189853007052793005 8x^{22} - 1164531435\text{-}385165806222x^{20} - 1780143591696736539641 5x^{18} - 79572544923343220683\text{-}121x^{16} + 12061215863407458053958 63x^{14} + 15576595897397720842771499 \times x^{12} + 30871431520462718488415761x^{10} + 1821966647765742904929749 4x^{8} + 399906636539878130988166718 2x^{6} + 1676156285554672738596187092 8x^{4} + 2144327137783229522440980821 2x^{2} + 7602845745547973221576706927$

Ordre: 52, Indice: 5, Nom: $13 \rtimes 4$

$x^{52} - 156x^{48} + 2886x^{46} - 34736x^{44} + 354055x^{42} - 2076503x^{40} + 12124\text{-}060x^{38} - 34831238x^{36} + 63128260x^{34} + 227125860x^{32} - 1086058389x^{30} + 2339708332x^{28} + 898300572x^{26} - 8763639664x^{24} + 17644614507x^{22} - 34949\text{-}52448x^{20} - 14038302720x^{18} + 23472400874x^{16} + 3091442640x^{14} - 56685\text{-}30231x^{12} + 1174399759x^{10} + 340104388x^{8} - 189359430x^{6} + 16336892x^{4} + 371293$

Ordre: 54, Indice: 10, Nom: $(3^2 \rtimes 3) \rtimes 2$

$x^{54} - 12x^{52} + 66x^{50} + 270x^{48} - 4005x^{46} + 17898x^{44} - 19761x^{42} - 60264 \times x^{40} + 232779x^{38} + 123604x^{36} - 403788x^{34} - 140190x^{32} + 5706556x^{30} + 10317866x^{28} - 10512759x^{26} + 42986034x^{24} + 177565959x^{22} + 59638914 \times x^{20} + 332615797x^{18} + 1134639672x^{16} + 809469948x^{14} + 1626311948x^{12} + 3727393840x^{10} + 2186103312x^{8} + 3297227872x^{6} + 4196007232x^{4} + 60319\text{-}3600x^{2} + 1851804352$

Ordre: 54, Indice: 11, Nom: $3^2 \rtimes 6$

$x^{54} + 354x^{48} + 10635x^{42} + 593188x^{36} + 3563403x^{30} - 5994042x^{24} + 33080\text{-}6953x^{18} + 305286660x^{12} - 571514832x^{6} + 203297472$

Ordre: 54, Indice: 12, Nom: $9 \rtimes 6$

$x^{54} + 796392x^{36} + 292918032x^{18} + 1259712$

Ordre: 55, Indice: 2, Nom: $11 \rtimes 5$

$x^{55} - 363x^{53} + 60984x^{51} - 6302043x^{49} + 449130825x^{47} - 23460036237x^{45} +$
$107811x^{44} + 931895535879x^{43} - 24365286x^{42} - 28832257220283x^{41} + 24969$-
$02760x^{40} + 706029614105112x^{39} - 154164986316x^{38} - 138316716108037$-
$17x^{37} + 6426707505570x^{36} + 218308713906378150x^{35} - 192097300410972 \times$
$x^{34} - 2787393214068783507x^{33} + 4266860946322491x^{32} + 288420638652516$-
$41037x^{31} - 72016498419623208x^{30} - 241795224894635099028x^{29} + 93644$-
$0719987972914x^{28} + 1638866033643906595044x^{27} - 9454554551838307824 \times$
$x^{26} - 8945101151984936070396x^{25} + 74351070284455103931x^{24} + 39081$-
$014188164299179818x^{23} - 455068880659378838853x^{22} - 135530365359390$-
$044967396x^{21} + 2157992620648908799140x^{20} + 368820458213843142659196 \times$
$x^{19} - 7861730940409239633663x^{18} - 775343684524538563293816x^{17} + 21712$-
$303942303285939221x^{16} + 1232048086856049080301750x^{15} - 4456797262$-
$2940864449429x^{14} - 1434540674609961339402927x^{13} + 660293078522330$-
$27718603x^{12} + 1168216799378479504463502x^{11} - 67524319046359768236$-
$435x^{10} - 617145561838782816659226x^{9} + 44341315177524832667772x^{8} +$
$184147870979966572621602x^{7} - 16386367879612389232629x^{6} - 2222182070$-
$6252796410364x^{5} + 2492075051135372372472x^{4} - 1015019163870712110x^{3}$
$- 8221655227352768091x^{2} + 304505749161213633x^{1} - 3075815648093067$
Ordre: 56, Indice: 13, Nom: $2^3 \rtimes 7$
$x^{56} + 196x^{54} + 18648x^{52} + 1133440x^{50} + 48436640x^{48} + 1544233712 \times$
$x^{46} + 38173818592x^{44} + 750338412032x^{42} + 12017839696576x^{40} + 16127$-
$3296879744x^{38} + 1891145474666560x^{36} + 20779466926807680x^{34} + 22242$-
$7012090037888x^{32} + 2262599604963751424x^{30} + 21200197494382998784x^{28}$
$+ 170020719270244111360x^{26} + 1199289179920933721088x^{24} + 8995954481$-
$401999641600x^{22} + 60404313076782803079168x^{20} + 24265528460156612592$-
$2304x^{18} + 652595332762725163700224x^{16} + 1425951617917189660745728 \times$
$x^{14} - 32022932478117832486416384x^{12} - 332078338664619085207904256x^{10}$
$- 533094781597745918525140992x^{8} + 5359975441288050457500516352x^{6} +$
$29207701669922718984324333568x^{4} + 58014308102576444942478475264x^{2} +$
$41882067330411980012414058496$
Ordre: 58, Indice: 2, Nom: D_{58}
$x^{58} + 25733x^{56} + 319664325x^{54} + 2552668884634x^{52} + 14721312894625062 \times$
$x^{50} + 65303276614038825563x^{48} + 231735170686870212881152x^{46} + 67545$-
$4590406864881730448649x^{44} + 1647705375863825408397013647762x^{42} + 34102$-
$18811418980047604415891715615x^{40} + 60493993512140885279618979232563632$-
$07x^{38} + 9267150966851062560449952522055645656524x^{36} + 123277148772270$-
$70167180351412588420502945508x^{34} + 14295661045098716039258455335469570$-
$887065551143x^{32} + 14487128331819044058510604145313302773285923950957 \times$
$x^{30} + 12845100255393340285069148610978309925795650928025781x^{28} + 99648$-
$07047489381550140229361791628379110865860689070290x^{26} + 6755444493$-
$542225442440840551400605848329649389168671581623x^{24} + 399226798224162$-

$4400511467297329936996631935093316883177141144x^{22} + 204871420431241$-
$6006968652617936223170084010713457852206128522825x^{20} + 907901657766673$-
$8580607756745627960333530631372961623139444918338810x^{18} + 3448367424$-
$92503762169781831776604227387636040563267911704879038454727x^{16} + 11112$-
$0898685838376334472712302609355476914086428203143744341630663107816 \times$
$x^{14} + 299670234646320539315675000027901627166820517929564771721348$-
$04070949814065x^{12} + 663778893201236267876836967296084033108342669920 77$-
$6118470761807987843604 5295x^{10} + 117612879453002704392205521070502 92$-
$960384364346376375215204789621505964655913 25x^{8} + 1602891481932113 5306$-
$7882424572597128857743991574796387115817821021130728426310921x^{6} + 15775$-
$5654055692710870406803234045640156660116210957457862141653427388148698$-
$81736093x^{4} + 99802309578211949731780933575720356765403147444124682 27$-
$09025699287061180826126434550x^{2} + 3047799347662802513858752608301 7662$-
$441569546992936101524543424728702322228375071479375$
Ordre: 64, Indice: 12, Nom: $2^3 \times D_8$
$x^{64} + 32x^{63} + 584x^{62} + 7688x^{61} + 80556x^{60} + 707216x^{59} + 5371500 \times$
$x^{58} + 36065096x^{57} + 217392842x^{56} + 1190064216x^{55} + 5968785752x^{54} +$
$27615857208x^{53} + 118496019634x^{52} + 473505957368x^{51} + 1767714180988x^{50}$
$+ 6180261291680x^{49} + 20270194060278x^{48} + 62438502903752x^{47} + 18073$-
$2475033616x^{46} + 491605430388176x^{45} + 1255879698436130x^{44} + 3009467879$-
$403096x^{43} + 6750347976954592x^{42} + 14126061046883880x^{41} + 2743782398$-
$4904746x^{40} + 49065797973119376x^{39} + 79681467354187960x^{38} + 1145437083$-
$28462248x^{37} + 137652946489715784x^{36} + 115033443670350912x^{35} - 88416$-
$03053370116x^{34} - 304064811258898824x^{33} - 828243078366567702x^{32} - 15723$-
$78647356037256x^{31} - 2382946438625471792x^{30} - 2881641625339266024 \times$
$x^{29} - 2424545786501394238x^{28} - 1523134218915513 68x^{27} + 4832031779$-
$791918028x^{26} + 1316747744032782 7552x^{25} + 24897669639615105210x^{24} +$
$39222945245665387624x^{23} + 54478587430206016168x^{22} + 684114023717132$-
$79760x^{21} + 78708037403995196194x^{20} + 83609408892592016280x^{19} + 82390$-
$449398700006392x^{18} + 75528388175721899496x^{17} + 64508212754167706537 \times$
$x^{16} + 51357946084587277648x^{15} + 38099132000641369824x^{14} + 2630180974$-
$1150438368x^{13} + 16860388349673390540x^{12} + 10003603132860311920x^{11} +$
$5468966166451864808x^{10} + 2738317677654970288x^{9} + 1245570464348947552 \times$
$x^{8} + 509131000136960352x^{7} + 184278532533761808x^{6} + 578827312775271$-
$36x^{5} + 15339059333153280x^{4} + 3291403861267200x^{3} + 536230694598480x^{2}$
$+ 59067036483840x^{1} + 3321880412004$
Ordre: 64, Indice: 18, Nom: $2 \times 4 \times D_8$
$x^{64} + 16x^{63} + 160x^{62} + 1168x^{61} + 6928x^{60} + 34768x^{59} + 153192x^{58} + 60324$-
$8x^{57} + 2161372x^{56} + 7111184x^{55} + 21688392x^{54} + 61644048x^{53} + 16427$-
$2492x^{52} + 411621568x^{51} + 974861136x^{50} + 2183804080x^{49} + 4653089209x^{48}$
$+ 9416416008x^{47} + 18218934968x^{46} + 33580608840x^{45} + 59428890698x^{44} +$

$100439239072x^{43} + 163536305508x^{42} + 254868331112x^{41} + 383262437398 \times x^{40} + 553212986304x^{39} + 768366811616x^{38} + 1030545766424x^{37} + 1315766312684x^{36} + 1647680004672x^{35} + 1924733477180x^{34} + 2274989274160 \times x^{33} + 2469364630110x^{32} + 2794777079464x^{31} + 3037711526624x^{30} + 3265525348336x^{29} + 4003884045086x^{28} + 3908763708400x^{27} + 5458545298464 \times x^{26} + 4792472140232x^{25} + 6595090966888x^{24} + 5418741910784x^{23} + 6522775482832x^{22} + 4782115818896x^{21} + 5521544093588x^{20} + 2686698561520 \times x^{19} + 4046491099992x^{18} + 694575484704x^{17} + 2125947121394x^{16} - 123257258360x^{15} + 764698496056x^{14} - 394407702584x^{13} + 409677328582x^{12} - 379464146384x^{11} + 205802358916x^{10} - 141693889096x^{9} + 55670336144 \times x^{8} - 32976962104x^{7} + 20526344696x^{6} - 11922830416x^{5} + 5857393566x^{4} - 1413185712x^{3} + 144204488x^{2} - 5991832x^{1} + 217921$

Ordre: 64, Indice: 27, Nom: $4 \times D_8 \curlyvee 4$

$x^{64} - 32x^{63} + 688x^{62} - 10896x^{61} + 142304x^{60} - 1581232x^{59} + 15455632 \times x^{58} - 134998496x^{57} + 1069753068x^{56} - 7761976464x^{55} + 52006877360x^{54} - 323696319280x^{53} + 1881528172720x^{52} - 10255298321248x^{51} + 52603289938208x^{50} - 254660869852432x^{49} + 1166549958363466x^{48} - 5067035472727280x^{47} + 20908349919642720x^{46} - 82087962814438016x^{45} + 307062191061252496x^{44} - 1095627200904322256x^{43} + 3732708222511986224x^{42} - 12152807035919160816x^{41} + 37838355705977242048x^{40} - 112732241802222628032x^{39} + 321540113471172811696x^{38} - 878331629884173248400x^{37} + 2298491377767844159648x^{36} - 5763321305845583213392x^{35} + 13848284716825081963312x^{34} - 31887700325347001921408x^{33} + 70360720698029483702659x^{32} - 148750312611105272748848x^{31} + 301239735712915210312032x^{30} - 584204344042741256534272x^{29} + 1084556062762278096604688x^{28} - 1926526112176285822104080x^{27} + 3272640758114208241216496x^{26} - 5313125486568088047256752x^{25} + 8237963224947269230171008x^{24} - 12188719401344121647551296x^{23} + 17193905339875307078509424x^{22} - 23101307841430970832302416x^{21} + 29530240151353594978163936x^{20} - 35870789068369642840835856 \times x^{19} + 41350567983475518062716400x^{18} - 45170272410764218010937600 \times x^{17} + 46681942743698102742972666x^{16} - 45559369651143574431852112 \times x^{15} + 41901897513750141578479088x^{14} - 36229157783862511922726448 \times x^{13} + 29361633989624889823529840x^{12} - 22224282060516721733361760 \times x^{11} + 15638931786329976235684320x^{10} - 10170033841402547917529744x^{9} + 6063795901814917047263068x^{8} - 3279679170567664596479216x^{7} + 1585850471557343801609152x^{6} - 671482545579204047721632x^{5} + 241697642409068108082864x^{4} - 70508000684552906172656x^{3} + 15442420910859377611408x^{2} - 2131574847642839466672x^{1} + 131613281113033864561$

Ordre: 64, Indice: 34, Nom: $8 \times D_8$

$x^{64} - 32x^{63} + 528x^{62} - 5936x^{61} + 50864x^{60} - 352896x^{59} + 2058720x^{58} - 10362368x^{57} + 45852572x^{56} - 180918576x^{55} + 643657600x^{54} - 20833\text{-}$

$53776x^{53} + 6180004360x^{52} - 16904152528x^{51} + 42861793216x^{50} - 10122$-
$5392192x^{49} + 223689691950x^{48} - 464748623984x^{47} + 912698995712x^{46} -$
$1704814143680x^{45} + 3050766211584x^{44} - 5272243124272x^{43} + 8868949645$-
$040x^{42} - 14615890869472x^{41} + 23677583790484x^{40} - 37691485880288x^{39} +$
$58739391884320x^{38} - 89119663330000x^{37} + 130880383133104x^{36} - 18516$-
$9897263744x^{35} + 251559715755200x^{34} - 327530606318336x^{33} + 4082603257$-
$10219x^{32} - 486762244916464x^{31} + 554390987282240x^{30} - 601787481389536 \times$
$x^{29} + 620380804626592x^{28} - 604419521133680x^{27} + 553103397268208x^{26} -$
$471935000121312x^{25} + 372326313495188x^{24} - 269072784432576x^{23} + 17637$-
$3251441024x^{22} - 103984095176048x^{21} + 55172641273712x^{20} - 2722954978$-
$8640x^{19} + 13970699637856x^{18} - 8768065065984x^{17} + 6702948837306x^{16} -$
$5233841633968x^{15} + 3669573481520x^{14} - 2194364600432x^{13} + 1095608494$-
$912x^{12} - 448073566096x^{11} + 144987812368x^{10} - 34243109664x^{9} + 44123$-
$66728x^{8} + 578097904x^{7} - 523859040x^{6} + 125024608x^{5} + 17435624x^{4} -$
$20022736x^{3} + 6260896x^{2} - 943296x^{1} + 83521$

Ordre: 64, Indice: 35, Nom: $8 \times Q_8$

$x^{64} + 8x^{63} - 124x^{62} - 1128x^{61} + 6710x^{60} + 73056x^{59} - 202700x^{58} -$
$2891736x^{57} + 3439855x^{56} + 78507664x^{55} - 18437796x^{54} - 1554914656x^{53}$
$- 637666788x^{52} + 23324925200x^{51} + 20620425348x^{50} - 271511057120x^{49} -$
$341606563092x^{48} + 2492091428936x^{47} + 3923706991752x^{46} - 1822291027$-
$5424x^{45} - 33926286237580x^{44} + 106778943626384x^{43} + 228912125546768 \times$
$x^{42} - 502336133760512x^{41} - 1228406544663653x^{40} + 1893136218387928x^{39}$
$+ 5299394139116168x^{38} - 5672688197239960x^{37} - 18488668955819594x^{36} +$
$13299687848572576x^{35} + 52308253530528944x^{34} - 23583438777365840x^{33} -$
$120050527383299267x^{32} + 29032019253914600x^{31} + 223132481072479916x^{30}$
$- 17186472047940176x^{29} - 334694185092478276x^{28} - 18089336574247056 \times$
$x^{27} + 403003502456820012x^{26} + 64014276036369384x^{25} - 386700817840289$-
$257x^{24} - 93907303773373440x^{23} + 292876629749281248x^{22} + 9084144968$-
$1601480x^{21} - 172929692119282470x^{20} - 62941474779645504x^{19} + 78352$-
$695295871036x^{18} + 31858722359392752x^{17} - 26697452503198414x^{16} - 11737$-
$580688568696x^{15} + 6668703634057324x^{14} + 3091870090728304x^{13} - 11833$-
$16942116630x^{12} - 564815639062072x^{11} + 143720789186184x^{10} + 6842492645$-
$1752x^{9} - 11451805057181x^{8} - 5151250319440x^{7} + 564639212408x^{6} + 21574$-
$8274032x^{5} - 15312432156x^{4} - 3888333496x^{3} + 166201688x^{2} + 5644816x^{1}$
$- 44711$

Ordre: 64, Indice: 55, Nom: $4 \times D_{16}$

$x^{64} + 16x^{63} + 144x^{62} + 940x^{61} + 4834x^{60} + 20468x^{59} + 73260x^{58} + 225676 \times$
$x^{57} + 611017x^{56} + 1502404x^{55} + 3536040x^{54} + 8473648x^{53} + 21141386x^{52} +$
$52669928x^{51} + 123279134x^{50} + 262298220x^{49} + 514012886x^{48} + 985664632 \times$
$x^{47} + 1981332292x^{46} + 4195211020x^{45} + 8909063806x^{44} + 18445618372x^{43}$
$+ 37543878588x^{42} + 75841052708x^{41} + 150461864249x^{40} + 288302537580x^{39}$

$+ 530676514970x^{38} + 942929020204x^{37} + 1624139408415x^{36} + 2706790763$-
$812x^{35} + 4349600525538x^{34} + 6739649163612x^{33} + 10097316538738x^{32} +$
$14648994576580x^{31} + 20562408849478x^{30} + 27877299671148x^{29} + 36482$-
$841118103x^{28} + 46127641778428x^{27} + 56372570666986x^{26} + 6648852914$-
$7908x^{25} + 75511396951389x^{24} + 82456068551948x^{23} + 86607638842898x^{22}$
$+ 87556393862920x^{21} + 85085035568217x^{20} + 79218380266168x^{19} + 70611$-
$746068562x^{18} + 60493550266912x^{17} + 50454520032473x^{16} + 4145897848$-
$3824x^{15} + 33905363388198x^{14} + 27791713752268x^{13} + 23281227200709x^{12}$
$+ 20207936340876x^{11} + 18244042639788x^{10} + 16129044987088x^{9} + 13566$-
$582867108x^{8} + 10079544152564x^{7} + 6705538252730x^{6} + 3735847437400x^{5}$
$+ 1823351835069x^{4} + 703848326440x^{3} + 232494383274x^{2} + 51437239088x^{1}$
$+ 9271511461$

Ordre: 64, Indice: 56, Nom: $4 \times QD_{16}$

$x^{64} + 48x^{60} + 4856x^{56} - 7536x^{52} - 610388x^{48} - 42084240x^{44} + 664367336 \times$
$x^{40} - 15763446192x^{36} + 148240804630x^{32} + 447080751504x^{28} + 7400659531$-
$016x^{24} + 16840951410864x^{20} + 57953635354828x^{16} + 59282186463696x^{12} +$
$21714585944984x^{8} - 9384154512x^{4} + 1874161$

Ordre: 64, Indice: 134, Nom: $2 \times D_{32}$

$x^{64} + 16x^{63} + 164x^{62} + 1222x^{61} + 7386x^{60} + 37570x^{59} + 166533x^{58} + 65553$-
$4x^{57} + 2331792x^{56} + 7582514x^{55} + 22760187x^{54} + 63460928x^{53} + 16503$-
$7765x^{52} + 400983106x^{51} + 909925516x^{50} + 1924234600x^{49} + 3775150632 \times$
$x^{48} + 6817637386x^{47} + 11175301322x^{46} + 16178260278x^{45} + 1941725645$-
$4x^{44} + 15602055906x^{43} - 3934333658x^{42} - 49153465242x^{41} - 1236268099$-
$28x^{40} - 208682513496x^{39} - 241293313895x^{38} - 98278513478x^{37} + 38626$-
$9100693x^{36} + 1336535782442x^{35} + 2669690713258x^{34} + 3899480299678 \times$
$x^{33} + 4053289970415x^{32} + 1914697306508x^{31} - 3259415044002x^{30} - 10662$-
$166114648x^{29} - 17031175089157x^{28} - 16750809540760x^{27} - 3603031111$-
$404x^{26} + 26086842999158x^{25} + 70403557963869x^{24} + 121021347654338 \times$
$x^{23} + 165870325257401x^{22} + 194274391795204x^{21} + 201522289206445x^{20} +$
$189947582155480x^{19} + 166119013630025x^{18} + 136665777986960x^{17} + 10592$-
$6704939583x^{16} + 76337704875934x^{15} + 49888309891594x^{14} + 2864739395$-
$5648x^{13} + 13960976307695x^{12} + 5565438069664x^{11} + 1780433275936x^{10} +$
$526724827456x^{9} + 247448314719x^{8} + 181086111342x^{7} + 116384095773x^{6} +$
$54149162002x^{5} + 17625402136x^{4} + 3650173450x^{3} + 554318050x^{2} + 52937$-
$500x^{1} + 3705625$

Ordre: 64, Indice: 154, Nom: $D_8 \times D_8$

$x^{64} + 24x^{63} + 76x^{62} - 2598x^{61} - 22097x^{60} + 91410x^{59} + 1630426x^{58} +$
$621056x^{57} - 64236296x^{56} - 169026344x^{55} + 1563751786x^{54} + 7177388564x^{53}$
$- 23866366387x^{52} - 178209998016x^{51} + 189428178843x^{50} + 3048460633$-
$480x^{49} + 648334522983x^{48} - 38149276668004x^{47} - 42574081149533x^{46} +$
$358436254081482x^{45} + 679177159155602x^{44} - 2543501912250630x^{43} - 69271$-

$58532392329x^{42} + 13415152600260130x^{41} + 51670245166184071x^{40} - 49389$-
$809136400386x^{39} - 295496750707025191x^{38} + 96853743329413768x^{37} + 13231$-
$36699010494752x^{36} + 158738681276637928x^{35} - 468110571992051 2384x^{34} -$
$218933145724390079 0x^{33} + 1310866351937271419 5x^{32} + 998192897016226$-
$0558x^{31} - 2893088403506059623 5x^{30} - 2994700601086371424 2x^{29} + 49760$-
$108431751862014x^{28} + 6586579159306406487 0x^{27} - 65262246276584652993 \times$
$x^{26} - 10975382164292577851 8x^{25} + 6250537658196166722 6x^{24} + 1397581460$-
$77164162318x^{23} - 3930966142399940922 2x^{22} - 13551773971922089000 0 \times$
$x^{21} + 9894697739180277699x^{20} + 9885341500486515114 0x^{19} + 8215945520$-
$764399785x^{18} - 5316436313711612990 4x^{17} - 1080276297488254287 5x^{16} +$
$2048786889444335488 8x^{15} + 608922493364358513 6x^{14} - 545153542000943$-
$8320x^{13} - 2026196159920375696x^{12} + 959325391410488928x^{11} + 4132376247$-
$61001312x^{10} - 107021069064226624x^{9} - 50884031757078560x^{8} + 72117$-
$39225984896x^{7} + 3591811800278272x^{6} - 272718852969728x^{5} - 1287412651$-
$54048x^{4} + 5106553261568x^{3} + 1692373543168x^{2} - 41471536128x^{1} + 22640$-
3584
Ordre: 64, Indice: 155, Nom: $D_8 \times Q_8$
$x^{64} + 24x^{63} + 68x^{62} - 2784x^{61} - 22618x^{60} + 111408x^{59} + 1789976x^{58} -$
$92272x^{57} - 75798549x^{56} - 171161704x^{55} + 2005375756x^{54} + 8255334784x^{53}$
$- 34179299906x^{52} - 223258838664x^{51} + 338203741532x^{50} + 4120441856$-
$304x^{49} - 417732436456x^{48} - 55475165335792x^{47} - 47773333238300x^{46} +$
$560570307277040x^{45} + 928154018892142x^{44} - 4285393958908208x^{43} - 10538$-
$073793528132x^{42} + 24479257260905448x^{41} + 85456955839332798x^{40} - 99207$-
$266244955960x^{39} - 526055623072326500x^{38} + 232507154068595544x^{37} + 25223$-
$71663564141216x^{36} + 1541366196323963 84x^{35} - 9528907533637679804x^{34} -$
$4277315604361907776x^{33} + 2845358261953401869 7x^{32} + 221183028236536$-
$33968x^{31} - 66933524790786872704x^{30} - 72794647121879486752x^{29} + 12270$-
$183499227716276 0x^{28} + 17466431559989315633 6x^{27} - 17131473866572894910$-
$4x^{26} - 318299825932431827408x^{25} + 173315677887379386480x^{24} + 44633$-
$571504097246118 4x^{23} - 110407216633408875840x^{22} - 48157630199306053116$-
$8x^{21} + 151714991748986516 00x^{20} + 396216095409126473120x^{19} + 52944$-
$565173074007936x^{18} - 244236257310300485984x^{17} - 65143669768724642296 \times$
$x^{16} + 109652893915820323776x^{15} + 41863206116495280832x^{14} - 343051151 0$-
$0382901120x^{13} - 16931156436444135744x^{12} + 6954406049152358848x^{11} +$
$4365827546179965824x^{10} - 796190005711238336x^{9} - 687436953872152928 \times$
$x^{8} + 34959013411012992x^{7} + 6109936691306348 8x^{6} + 925332409590016x^{5}$
$- 2819401610520384x^{4} - 106296909749120x^{3} + 57816734351040x^{2} + 17092$-
$70243456x^{1} - 378623908976$
Ordre: 64, Indice: 156, Nom: $Q_8 \times Q_8$
$x^{64} - 2112x^{62} + 2053440x^{60} - 1224359424x^{58} + 503023587984x^{56} - 15166$-
$0179093888x^{54} + 34888236394132800x^{52} - 6285103683477700608x^{50} + 90297$-

$0003728726435232x^{48} - 1048158868548995569658 88x^{46} + 992361695042866$-
$2814321920x^{44} - 771495933739250920489205760x^{42} + 49481137203983080212$-
$897156096x^{40} - 262579630500723368021816475648 0x^{38} + 115457390614189$-
$193628264685000704x^{36} - 4206808722326395485067290826113024x^{34} + 12685$-
$697621801663299650709496578944 0x^{32} - 3157840666698920719797299696 08$-
$9325568x^{30} + 64633229828974472236946743285379321856x^{28} - 1081735254$-
$764806033437869800562222039040x^{26} + 146975286863428078805237546768$-
$18653986816x^{24} - 1606274283487866834389349679334657792409 60x^{22} + 13958$-
$3922541275167860707387841741424345088 0x^{20} - 950860891548657992255238 5$-
$815457226276470784x^{18} + 499091932540707301881055197407338228120043 52 \times$
$x^{16} - 19776129835445904455588363883864381094271385 6x^{14} + 5777063370$-
$753017325604819491002337257472000 00x^{12} - 121091602982132031511037 5$-
$907422700197310889984x^{10} + 176356557305270664394310117117717099948 0$-
$745984x^8 - 1710156222368701106697432092221157230804205568x^6 + 10341$-
$2685850553718655582350005372362564435968 0x^4 - 345745451886813805 52$-
$6519187565558835441565696x^2 + 476048502237021372333876764411524794$-
33916416
Ordre: 78, Indice: 5, Nom: $13 \rtimes 6$
$x^{78} - 60x^{76} + 1758x^{74} - 31374x^{72} + 361545x^{70} - 2526138x^{68} + 63960$-
$93x^{66} + 65272320x^{64} - 820344366x^{62} + 4238917560x^{60} - 11097539136x^{58}$
$+ 25998312276x^{56} - 253950442092x^{54} + 1904107366404x^{52} - 6150241590$-
$390x^{50} - 7394115465828x^{48} + 206357506486443x^{46} - 1013203672387992x^{44}$
$+ 860274381349188x^{42} + 10628619004481202x^{40} - 32781277560497877x^{38} +$
$104884418145574710x^{36} - 405140641705293867x^{34} + 295493622562386612 \times$
$x^{32} + 4061589170382599031x^{30} - 12355286209448784336x^{28} + 9210801631$-
$390598736x^{26} + 19692883183608903114x^{24} - 62999157702489094359x^{22} +$
$92601020895674068134x^{20} - 92503314656275396167x^{18} + 698232909262776$-
$11352x^{16} - 41386230713232095544x^{14} + 19054958649198180912x^{12} - 64822$-
$4419319894692 8x^{10} + 1565626342187234880x^8 - 291847113728275392x^6 +$
$56287868834276352x^4 - 10379802940157952x^2 + 963961798754304$
Ordre: 81, Indice: 12, Nom: $3 \wr 3$
$x^{81} + 36x^{80} + 387x^{79} - 1395x^{78} - 59283x^{77} - 291276x^{76} + 2736255x^{75} +$
$31837212x^{74} - 4674630x^{73} - 1451329720x^{72} - 4806739671x^{71} + 3488812259$-
$1x^{70} + 244083499593x^{69} - 313863589602x^{68} - 6648982491813x^{67} - 77187$-
$46538009x^{66} + 115163866563177x^{65} + 355511172942642x^{64} - 1242398389$-
$848403x^{63} - 7322238454404402x^{62} + 5466586508148315x^{61} + 9892539496$-
$6261876x^{60} + 73884626508149289x^{59} - 94149253332704517 3x^{58} - 18715$-
$27993547736388x^{57} + 62075154359748038 70x^{56} + 22246504024776587529x^{55}$
$- 23852173983773956681x^{54} - 18010381598818691042 4x^{53} - 1550415843$-
$8333507415x^{52} + 107058437040425850326 2x^{51} + 100606123196798095260 0 \times$
$x^{50} - 47104834176845295755 55x^{49} - 849778352216014974617 0x^{48} + 14593$-

$078050764486298336x^{47} + 45365739603298474047051x^{46} - 249183674138811$-$45688752x^{45} - 176673204366462684007749x^{44} - 27645465561293206641468 \times x^{43} + 52039937434350120457294 7x^{42} + 371668566627251563980354x^{41} - 11548$-$89444202283964434103x^{40} - 149043703593439562999000 5x^{39} + 1839850738$-$875298038043029x^{38} + 393132041237602049067075 3x^{37} - 173493256136356$-$0351362280x^{36} - 763001706557446493332155 0x^{35} - 30556902179573254986$-$0192x^{34} + 1121817158888321620233027 9x^{33} + 455919611640566912618219 4 \times x^{32} - 1246215000664834341807457 2x^{31} - 9398253109734504828444463x^{30} + 1012578956028580274957549 1x^{29} + 1207196793424907430333573 3x^{28} - 543062526335545298532055 1x^{27} - 1108562945041315488913685 7x^{26} + 11048$-$80415324061256584591x^{25} + 7531469238435843590676525x^{24} + 1054019273$-$195404621201719x^{23} - 3791304072694625581240623x^{22} - 126564741343914$-$3866762462x^{21} + 1385932012940440933213425x^{20} + 7279881838143501483 6$-$9558x^{19} - 3496572958739907064544 07x^{18} - 271964381783588129128299x^{17} + 530121683670313747927 32x^{16} + 696844743236974795646 67x^{15} - 19621$-$23587720577048306x^{14} - 1224308463871307823581 7x^{13} - 100874600221531$-$1183267x^{12} + 143309347045742841884 4x^{11} + 23466386695360319260 5x^{10} - 10525129116299626070 3x^{9} - 24555900023074777299x^{8} + 431352083285308$-$6080x^{7} + 1355841849619223837x^{6} - 75213831871689987x^{5} - 3732315282$-$8193351x^{4} + 135629240062652x^{3} + 469211439690099x^{2} + 5055565068333x^{1} - 2170677442653$

Ordre: 84, Indice: 10, Nom: $2 \times 7 \rtimes 6$

$x^{84} - 476x^{82} + 108458x^{80} - 15755936x^{78} + 1639938419x^{76} - 1302978966$-$52x^{74} + 8221944472546x^{72} - 423270470510292x^{70} + 18123292541731321x^{68} - 654715873467280688x^{66} + 20174615399789140010x^{64} - 534765487715869$-$690112x^{62} + 12274114077245050080680x^{60} - 245199696101609972955708 \times x^{58} + 4280362890922754344811194x^{56} - 65490659508606815411039972x^{54} + 880163620138764833697921340x^{52} - 10405491613396347014523135292 \times x^{50} + 108297668513085002379775395580x^{48} - 992446456726594907227673 3$-$67248x^{46} + 8004693275149667832444478084091x^{44} - 56767550254812534403$-$555008449176x^{42} + 353421812429626583410417346683140x^{40} - 1927500693$-$4498198514641203617974 48x^{38} + 9183791836130203139283387644963627x^{36} - 38101447202318865671500173622101396x^{34} + 137110533309420489805493 8$-$03433874506x^{32} - 426085666767474357659514513396832576x^{30} + 1137923144$-$3315978023098792859500427 23x^{28} - 2598306759389008744874738594243490 1$-$80x^{26} + 5046707125676761787399322446429159158x^{24} - 829989735200548$-$99356022730342936635 88x^{22} + 11521055660498574996926017374682484650 \times x^{20} - 13492374607516429430793233645216221628x^{18} + 133902755324571$-$1798939524245717130659 6x^{16} - 11388605313347799994658937526974903992 \times x^{14} + 8440258242346776316999822035732659137x^{12} - 551549452324524346 19$-$50576215675598056x^{10} + 3136230493405143762619161615677596112x^{8} - 14686$-

$5496487911843864443449216472332 8x^6 + 52353666930996032147077124297 8$-
$232832x^4 - 1283633393945816182828066548140728 32x^2 + 221899190815287$-
$8529235946276114022 4$

Ordre: 96, Indice: 96, Nom: $96.24b$

$x^{96} + 27431992x^{72} + 3547332576024x^{48} + 797307852959968x^{24} + 16$

Ordre: 98, Indice: 4, Nom: $7 \times D_{14}$

$x^{98} + 392x^{94} + 8232x^{92} - 148862x^{90} + 5877648x^{88} - 86485392x^{86} + 12325$-
$06114x^{84} - 8465294537x^{82} + 31774156232x^{80} + 452638133472x^{78} - 52711$-
$85763046x^{76} + 24758438826828x^{74} - 337575600945128x^{72} + 1018348210$-
$6441567x^{70} - 1281065822231588 12x^{68} + 35699848497219015 9x^{66} + 66998$-
$7855945033673 6x^{64} - 636539694291590150 60x^{62} + 4985960076567058122 8 \times$
$x^{60} + 128395380694772559456 2x^{58} - 1782042159155395684260x^{56} - 26191$-
$007981879794627238x^{54} + 1816336572714137723200 42x^{52} - 669435902470821$-
$167829959x^{50} - 3297537952828564416363 56x^{48} + 7286453768273651617 3$-
$72020x^{46} + 257194443229894006751121 62x^{44} - 25017314482423795381075 49$-
$13x^{42} + 1143679165710002516119618940x^{40} + 1412744847817256772401411$-
$43x^{38} - 1179081784529493271741468935 2x^{36} - 5303643659359382938179696$-
$6406x^{34} + 8415100927168254614645401623 6x^{32} - 438665925592094889 32$-
$4559847952x^{30} + 1459945541309331992595631948402x^{28} + 114065025156759$-
$57620260653339863x^{26} + 19701772052079332802406957266024x^{24} + 55960$-
$2502997467622759973522758 24x^{22} + 2121850514444228070964688216772 02 \times$
$x^{20} + 45497138075575549249871778363483 2x^{18} + 566079694350715546 88$-
$96453768017 84x^{16} + 43016994381849741795446074107374 5x^{14} + 1973136061$-
$7101679417492202805171 2x^{12} + 51166960408935776516594204498336x^{10} +$
$66983201366711400821676258716 16x^8 + 4124878148585076983144673180 16 \times$
$x^6 + 54538137482853452561950838784x^4 + 1125604811654625512746968678 4 \times$
$x^2 + 5294518276728189629121003 52$

Bibliographie

[AcKl] Vincenzo ACCIARO at Jürgen KLÜNERS, *Computing Automorphisms of Abelian Number Fields*, Math. Comp., **68**, 1999, 1179–1186.

[ASZ] John ABBOTT, Victor SHOUP et Paul ZIMMERMANN *Factoring in* $\mathbb{Z}[X]$*: The Searching Phase*, ISSAC 2000, 2000, 1–7.

[Benchmark] *List of polynomials of the benchmark*,
`http://www.math.u-bordeaux.fr/~allomber/nfgaloisconj_benchmark.html`

[BrKu] R.P. BRENT et H.T. KUNG,*Fast algorithms for manipulating formal power series*, J. Assoc. Comput. Mach., **25**, 1978, 581–595

[CoEn] George E. COLLINS et Mark J. ENCARNACÍON, *Efficient rational number reconstruction*, J.Symbolic Comp., **20**, 1995, 287–297.

[Cohen] Henri COHEN, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics., **138**, Springer, 1993, corr. 3^{rd} printing 1996

[Eichenlaub] Yves EICHENLAUB, *Problèmes effectifs de théorie de Galois en degré 8 à 11*, Thesis, Université Bordeaux I, 1996.

[FoLe] David FORD et Pascal LETARD,*Implementing the Round Four maximal order algorithm*, J.T.N.B. **6**, 1994, 39–80

[GAP] The GAP Group, *GAP — Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.1, Aachen, St Andrews, 1999
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap`

[GP2C] Bill ALLOMBERT, *GP2C, the GP to C compiler*,
`ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/GP2C`

[Hall] Marshall HALL, *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1959.

[KaSh] Erich KALTOFEN et Victor SHOUP, *Subquadratic-time factorization of polynomials over finite fields*, Math. Comp. **67**, 1998, 1179–1197.

[Klüners1] Jürgen KLÜNERS *Über die Berechnung von Automorphismen und Teilkörpern algebraischer Zahlkörper*, Thesis, Technischen Universität Berlin, 1997.

[Klüners2] Jürgen KLÜNERS *On computing subfields — A detailed description of the algorithm*, J. Théorie des Nombres Bordeaux, **10**, 1998, 243–271.

[KlMa] Jürgen KLÜNERS et Gunter MALLE *Explicit Galois realization of transitive groups of degree up to 15*, J. Symb. Comput. **30**, 2000, 675–716.

[KANT V4] M. DABERKOW, C. FIEKER, J. KLÜNERS, M. POHST, K. ROEGNER, M. SCHÖRNIG et K. WILDANGER, *KANT V4*, J. Symb. Comput. **24**, 1997, 267–283.

[Landau] S. Landau,*Factoring polynomials over algebraic number fields*, SIAM J. Comput. **14**, 1985, 184–195.

[Lenstra] Hendrik W. LENSTRA, *Finding isomorphism between finite fields.*, Math. Comp. **56**, 1991, 329–347.

[Magma] W. BOSMA, J. CANNON and C. PLAYOUST, *The Magma algebra system I: The user language*, J. Symb. Comput., **24**, 1997, 235–265.

[PARI] PARI, C. BATUT, K. BELABAS, D. BERNARDI, H. COHEN et M. OLIVIER, *User's Guide to PARI-GP*, version 2.2.2.

[Perec] Georges PEREC, *Cantatrix Soprano L.* J. Math. Vivisec. **27**, 1974, 134–143.

[Roblot] Xavier ROBLOT, *Algorithmes de factorisation dans les extensions relatives et applications de la conjecture de Stark à la construction de corps de classes de rayon*, Thesis, Université Bordeaux I, 1997.

[Shoup1] Victor SHOUP, *Fast construction of irreducible polynomials over finite fields*, J.Symbolic Comp. **17**, 1994, 371–391.

[Shoup2] Victor SHOUP, *New algorithms for finding irreducible polynomials over finite fields*, Math. Comp. **54**, 1990, 435–447.

[Shoup3] Victor SHOUP, *NTL: A Library for doing Number Theory (version 4.0a)* , http://www.shoup.net/ntl/.

Table des matières