UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 **Le 07/05/2009**
LICENCE L3

EXAMEN
PROBABILITÉS

Durée 3h

PROBLÈME I

3 points

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et de carré intégrable. On suppose que X est symétrique c'est-à-dire que X et $-X$ suivent la même loi. Soit ε une variable aléatoire indépendante de X, de loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $0 < p < 1$, donnée par

$$\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1 - p.$$

1) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \varepsilon X$?

2) Calculer de deux façons différentes l'espérance de Y.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la covariance entre X et Y soit nulle en fonction de X et p.

PROBLÈME II

9 points

L'objectif de ce problème est de montrer la loi forte des grands nombres pour les variables sous-gaussiennes. On dira qu'une variable aléatoire réelle X est sous-gaussienne s'il existe une constante $a > 0$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\Big[\exp(tX)\Big] \leq \exp\Big(\frac{a^2t^2}{2}\Big).$$

On notera $\alpha(X)$ le plus petit réel $a > 0$ satisfaisant cette inégalité. Si X est sous-gaussienne, il est facile de voir que X est centrée, $\mathbb{E}[X] = 0$.

1) Vérifier que, si X suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors X est sous-gaussienne avec $\alpha(X) = \sigma^2$.

2) Montrer que, si X est une variable aléatoire réelle centrée avec $|X| \leq 1$, alors X est sous-gaussienne avec $\alpha(X) \leq 1$.

3) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et sous-gaussiennes avec $\alpha(X_n) \leq 1$. Si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\exp(tS_n)] \leq \exp\Big(\frac{nt^2}{2}\Big).$$

4) En déduire par l'inégalité de Markov que, pour tous $x, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\Big(S_n \geq x\Big) \leq \exp\Big(-tx + \frac{nt^2}{2}\Big)$$

puis, avec un choix convenable de t, que

$$\mathbb{P}\Big(S_n \geq x\Big) \leq \exp\Big(-\frac{x^2}{2n}\Big).$$

5) Avec un raisonnement analogue pour $\mathbb{P}(S_n \leq -x)$, conclure que, pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}\Big(|S_n| \geq x\Big) \leq 2\exp\Big(-\frac{x^2}{2n}\Big).$$

6) Finalement, montrer par le lemme de Borel-Cantelli la convergence presque sûre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0.$$

Indication : On utilisera que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$

$$\exp(tx) \leq \exp(t^2/2) + x \sinh(t).$$

PROBLÈME III

5 points

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $0 < p < 1$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

1) Montrer que Y_n suit une loi de Rademacher $\mathcal{R}(\pi)$ avec π à déterminer.

2) Montrer la convergence presque sûre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = (2p-1)^2.$$

3) Donner le théorème limite centrale pour chacune des suites (P_n) et (Q_n) avec

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{2k} \qquad \text{et} \qquad Q_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{2k-1}.$$

4) Est-il possible d'en déduire le théorème limite centrale associé à (S_n) ?

PROBLÈME IV

3 points

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 4)$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ non nuls avec $a^2 + b^2 = 1$, on définit les variables aléatoires

$$U = aX + bY \qquad \text{et} \qquad V = bX - aY.$$

1) Montrer que U et V sont indépendantes et déterminer leurs lois.

2) Si $S = a(U+V)^2$ et $T = V/b$, calculer $\mathbb{E}[S|T]$.