**UNIVERSITÉ BORDEAUX 1** **Le 03/05/2010**
**LICENCE L3**

# EXAMEN
# PROBABILITÉS

*Durée 3h*

## PROBLÈME I

*3 points*

Soit $(X_n)$ la suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p, \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = p$$

avec $p \in [0, 1/2]$. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Montrer que $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - (2p)^n$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = (2p)^n/2$.

2) Etudier, suivant les valeurs de $p$, la convergence presque sûre de $(Y_n)$.

## PROBLÈME II

*3 points*

La loi de Weibull sert en fiabilité pour modéliser les durées de vie. On dit que $Y$ suit la loi de Weibull $\mathcal{W}(a, \lambda)$ avec $a, \lambda > 0$ si $Y = X^{1/a}$ où $X$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1) Montrer que la fonction de répartition de $Y$ est donnée par

$$F_Y(y) = (1 - \exp(-\lambda y^a))\mathrm{I}_{(y \geq 0)}.$$

2) Rappeler comment générer $X$ à partir d'une variable aléatoire $U$ uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et en déduire comment générer $Y$ à partir de $U$.

## PROBLÈME III

*4 points*

Soient $U$ et $V$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$,

$$X = \sqrt{-2\log(U)}\cos(2\pi V) \qquad \text{et} \qquad Y = \sqrt{-2\log(U)}\sin(2\pi V).$$

1) Calculer la densité de probabilité du couple $(X, Y)$.

2) En déduire que $X$ et $Y$ sont indépendantes et trouver leurs lois marginales.

# PROBLÈME IV

*4 points*

Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien de densité de probabilité définie pour $|r|<1$ par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\Big(-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)}\Big).$$

1) Déterminer son espérance $m$ et sa matrice de covariance $\Gamma$.

2) Trouver la loi conditionnelle de $Y$ sachant $X$.

3) Quelle est la loi de la variable aléatoire

$$V = \frac{X^2 - 2rXY + Y^2}{(1-r^2)}.$$

# PROBLÈME V

*6 points*

Soit $(X_n)$ la suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de densité de probabilité $f$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{\theta^3} x(\theta - x) & \text{si } \ 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\theta > 0$. On estime le paramètre inconnu $\theta$ par

$$\widehat{\theta}_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

1) Déterminer la fonction de répartition commune aux variables $X_n$.

2) Calculer la fonction de répartition de $\widehat{\theta}_n$.

3) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers $\theta$.

4) Montrer également que

$$\sqrt{n}(\theta - \widehat{\theta}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$$

où $Y$ suit la loi de Weibull $\mathcal{W}(2, \lambda)$ rencontrée plus haut avec $\lambda > 0$ à déterminer.

**Indication :** Si $(x_n)$ est une suite de nombres réels qui converge vers $x$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x_n}{n}\Big)^n = \exp(x).$$