UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Le 18/02/2008
LICENCE L3

PARTIEL
PROBABILITÉS

Durée 1h30

PROBLÈME I

8 points

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geqslant 1$. On tire successivement et sans remise les n boules de l'urne en notant après chaque tirage le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au rang k avec $1 \leqslant k \leqslant n$ si la k^{e} boule tirée porte le numéro k. On souhaite étudier la variable aléatoire X_n représentant le nombre total de rencontres au cours des n tirages. Si $A_k =$ "Il y a rencontre au rang k", on a

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}.$$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles prises par la variable aléatoire X_n.

2) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

3) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$.

4) Montrer avec la formule de Poincaré simplifiée que

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5) En déduire que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}.$$

6) Conclure que (X_n) converge en loi vers X dont on précisera la loi.

PROBLÈME II

6 points

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Soient U et V les variables aléatoires réelles définies par

$$U = \min(X, Y) \qquad \text{et} \qquad V = X - Y.$$

1) Montrer que la densité de probabilité du couple (U, V) est donnée par

$$f_{(U,V)}(u, v) = \lambda^2 \exp(-2\lambda u) \exp(-\lambda |v|) \mathbb{1}_{\{u \geqslant 0\}}.$$

2) En déduire les lois marginales de U et V.

3) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

4) Déterminer la loi probabilité de la variable aléatoire $W = |X - Y|$.

PROBLÈME III

6 points

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi de carré intégrable, d'espérance m et de variance $\sigma^2 \geqslant 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}.$$

1) Calculer l'espérance et la variance de S_n.

2) Montrer l'égalité

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\log n} - m\right)^2\right] = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{(\log n)^2} + \left(\frac{\mathbb{E}[S_n]}{\log n} - m\right)^2.$$

3) En déduire que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\log n} - m\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right).$$

4) Prouver via l'inégalité de Markov la loi faible logarithmique des grands nombres

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k} \xrightarrow{\mathcal{P}} m.$$

Indication : On utilisera le développement asymptotique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

où γ est la constante d'Euler.