UNIVERSITÉ BORDEAUX I — PROBABILITÉS

LICENCE L3, TD I — 2010/11

Espaces de Probabilités
Probabilités Conditionnelles, Indépendance

Exercice 1. Dans un jeu de tarot, on isole les 21 atouts numérotés de 1 à 21 puis l'on choisit trois atouts au hasard. Calculer la probabilité d'obtenir parmi ces trois atouts

1) Le 1 ou le 21.
2) Au moins un numéro multiple de cinq.
3) Au plus deux numéros multiples de cinq.
4) Exactement un numéro multiple de cinq et un numéro multiple de quatre.

Exercice 2. On lance trois dés non pipés.

1) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six.
2) Trouver la probabilité d'obtenir trois chiffres différents.
3) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre.
4) Trouver la probabilité que la somme des points obtenus sur les trois faces soit paire.

Exercice 3. Un domino est un rectangle sur lequel figurent deux chiffres pris avec répétition dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$.

1) Si l'on tire au hasard, successivement et sans remise, deux dominos dans un jeu complet, quelle est la probabilité qu'ils possèdent un chiffre en commun ?
2) Si l'on tire maintenant, successivement et sans remise, quatre dominos dans un jeu complet, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un domino double ?

Exercice 4. Un sauteur en hauteur tente de franchir successivement des hauteurs numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$ avec $n \geqslant 1$. Une fois les hauteurs précédentes passées, le sauteur réussit le saut à la hauteur n avec une probabilité $1/n$. Les hauteurs doivent être passées les unes après les autres dans l'ordre. Le sauteur s'arrête dès que l'une des hauteurs n'est pas franchie. Calculer la probabilité p_n que le dernier saut réussi le soit à la hauteur n.

Exercice 5. Une urne U contient a boules blanches et b boules rouges tandis qu'une urne V contient b boules blanches et a boules rouges. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule dans U ou dans V selon les règles suivantes. On commence par tirer une boule dans U. Si on a obtenu une boule blanche, le tirage suivant s'effectue dans U, et si on a obtenu une boule rouge, le tirage suivant s'effectue dans V. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne dont elle provient. Pour $n \geqslant 1$, soit p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n^e tirage.

1) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, la relation $p_{n+1} = cp_n + d$ avec c et d à déterminer.

2) En déduire la valeur de p_n et sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille de $\mathcal{A}$.

1) Montrer la formule de Poincaré
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right).$$

2) Si $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ ne dépend que de l'entier k, en déduire la formule de Poincaré simplifiée
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k).$$

3) On a n marins ivres qui regagnent de nuit leur bateau. Quelle est la probabilité qu'aucun d'eux ne couche dans son propre hamac ? Trouver la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7. On choisit au hasard un des n premiers entiers $1, 2, \cdots, n$. Soit $1 \leqslant p \leqslant n$ et soit A_p l'événement correspondant à ce que le nombre choisi soit divisible par p.

1) Calculer $P(A_p)$ lorsque p divise n.

2) Si $p_1, p_2, \cdots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, montrer que les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \cdots, A_{p_k}$ sont indépendants.

3) Si Φ est la fonction indicatrice d'Euler, en déduire l'égalité
$$\Phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 8. Un vin Chilien et un Pessac-Léognan sont servis à cinq goûteurs "à l'aveugle", Un vin donné est choisi avec probabilité 1/2 et le même vin est servi aux cinq goûteurs. On suppose que les goûteurs sont indépendants et que chacun reconnaît bien un vin avec probabilité 3/4. Sachant que 4 goûteurs sur 5 ont trouvé que le vin était un Bordeaux, trouver la probabilité que ce soit le vin Chilien qui ait été servi.

Exercice 9. On considère n "menteurs" $I_1, I_2, \cdots, I_n$. Le premier menteur I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non". Il transmet l'information à I_2, ainsi de suite jusqu'à I_n qui l'annonce au monde. Chacun des menteurs transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p et le contraire avec la probabilité $1 - p$ où $0 < p < 1$. De plus, les réponses des n individus sont indépendantes.

1) Soit p_n la probabilité que l'information soit fidèlement transmise. Déterminer une relation liant p_n et p_{n+1}.

2) En déduire la valeur de p_n et sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 10. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n avec $n \geqslant 2$. L'urne numéro k contient k boules rouges et $n - k$ boules blanches. On choisit au hasard une des n urnes puis on tire successivement avec remise deux boules de cette urne.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges?

2) Répondre à la même question si le tirage des deux boules s'effectue sans remise.

3) En déduire les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini.