Convergences

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles. Montrer que, si

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \qquad \text{alors} \qquad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Montrer que la réciproque est fausse sauf si $X = a$ presque sûrement avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient (X_n) et X des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que (X_n) converge en loi vers X ssi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ tend vers $\mathbb{P}(X = k)$.

Exercice 3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $0 < p < 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, soit

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Déterminer la loi de P_n.

2) En déduire que (P_n) converge en loi vers P dont on précisera la loi.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, a]$ avec $a > 0$. On pose

$$V_n = n \min(X_1, \ldots, X_n)$$

1) Déterminer la fonction de répartition de V_n.

2) En déduire que (V_n) converge en loi vers une variable V dont on précisera la loi.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

1) Déterminer la loi de Y_n.

2) Montrer que (S_n/n) converge presque sûrement vers p^2.

Exercice 6. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1/n)$ et soit $Y_n = X_n - [X_n]$ où $[X_n]$ désigne la partie entière de X_n.

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y_n?

2) Montrer que (Y_n) converge en loi vers Y dont on précisera la loi.

Exercice 7. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$ avec $c > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

1) Déterminer la loi de S_n.

2) En déduire que (S_n/n) converge en loi mais ne converge pas en probabilité.

Exercice 8. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Déterminer la loi de S_n.

2) Montrer que (S_n/n) converge presque sûrement vers λ et

$$\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

3) En déduire, sans calcul, que

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-n\lambda) \sum_{k=0}^{[n\lambda]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 9. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k.$$

1) Montrer que $(M_n/\log n)$ converge presque sûrement vers $1/\lambda$.

2) Montrer également que

$$M_n - \frac{\log n}{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} L$$

où L est une variable aléatoire de loi de Gumbel de paramètre λ.

Exercice 10. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leqslant \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \leqslant \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

En déduire que, si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$, alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = \sigma \qquad \text{p.s.}$$