UNIVERSITÉ BORDEAUX I **PROBABILITÉS**
LICENCE L3, TD IV **2010/11**

Lois et Espérances Conditionnelles

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $\{x_1, \dots, x_n\}$. Si Y est intégrable et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbb{P}(X = x_k) > 0$, montrer que

$$\mathbb{E}[Y|X] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\{X=x_k\}}}{\mathbb{P}(X = x_k)} \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{\{X=x_k\}}].$$

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables, indépendantes et de même loi.

1) Comparer les lois des couples aléatoires $(X, X+Y)$ et $(Y, X+Y)$.

2) En déduire que

$$\mathbb{E}[X|X+Y] = \mathbb{E}[Y|X+Y] = \frac{X+Y}{2}.$$

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$.

1) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X+Y$.

2) En déduire que

$$\mathbb{E}[X|X+Y] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}(X+Y).$$

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles avec Y de carré intégrable. La variance conditionnelle de Y sachant X est donnée par

$$\mathbb{V}(Y|X) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2 | X\right].$$

Etablir l'égalité

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(\mathbb{E}[Y|X]) + \mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)].$$

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles telles que la densité conditionnelle de Y sachant X est donnée, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_Y(y|X=k) = k(1-y)^{k-1} \mathbb{1}_{\{0<y<1\}}$$

où X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$.

1) Déterminer la loi de Y.

2) Trouver la loi conditionnelle de X sachant Y et calculer $\mathbb{E}[XY]$.

Exercice 6. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la densité de probabilité est donnée par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\Delta\}}$$

avec

$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\text{ avec }\; 0 < y < x < 1\right\}.$$

1) Déterminer les lois de X et de Y.
2) En déduire les espérances et variances de X et de Y.
3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Trouver les lois conditionnelles de Y sachant X et de X sachant Y.
5) En déduire $\mathbb{E}[Y|X]$ et $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 7. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles telles que la loi conditionnelle de Y sachant X est la loi uniforme $\mathcal{U}([0, X])$ où X suit la loi Gamma de paramètres 2 et $\lambda > 0$, de densité de probabilité f_X donnée par

$$f_X(x) = \lambda^2 x \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{x\geqslant 0}.$$

1) Déterminer la densité de probabilité du couple (X, Y) et la loi marginale de Y.
2) Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y.
3) En déduire $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$.

Exercice 8. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de carré intégrable, d'espérance m et de variance σ^2. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de carré intégrable, et indépendante de (X_n). Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Montrer que

$$\mathbb{E}[S_N|N] = Nm \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[S_N^2|N] = N\sigma^2 + N^2 m^2.$$

2) Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_N en fonction de l'espérance et de la variance de N.

Exercice 9. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et, pour tout $n \geqslant 1$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Montrer que la loi conditionnelle de X_1 sachant S_n est la loi

$$\mathcal{N}\Big(\frac{S_n}{n}, 1 - \frac{1}{n}\Big).$$