Vecteurs aléatoires gaussiens

Exercice 1. Montrer sur un exemple que deux variables aléatoires gaussiennes peuvent être non corrélées et dépendantes.

Exercice 2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ avec $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_n)$. On pose

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=1}^{n} b_k X_k.$$

Montrer que A et B sont indépendantes si et seulement si le produit scalaire $< a, b >= 0$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que les variables aléatoires

$$U = aX + bY \qquad \text{et} \qquad V = bX - aY$$

sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 4. La loi Log-normale est utilisée en linguistique pour modéliser le nombre de mots dans une phrase. On dit que X suit une loi Log-normale de paramètres m et $\sigma^2 > 0$ si $X = \exp(Y)$ avec Y de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1) En se ramenant à la loi $\mathcal{N}(0,1)$, déterminer la densité de probabilité de X.

2) Calculer de façon astucieuse l'espérance et la variance de X.

3) Si $Z = X^a$ avec $a > 0$, montrer que Z suit une loi Log-normale.

4) En déduire les moments entiers positifs de tous les ordres associés à X.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X a une loi stable si, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute suite $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X, il existe des constantes $a_n > 0$ et b_n telles que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad a_n X + b_n$$

suivent la même loi. Vérifier que si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors X n'est pas de loi stable. Montrer que si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$, alors X est de loi stable. Finalement, proposer un autre exemple de loi stable.

Exercice 6. L'algorithme de Box-Muller permet la génération de variables aléatoires gaussiennes à partir de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$X = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V) \qquad \text{et} \qquad Y = \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V).$$

Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 7. Soit X un vecteur aléatoire gaussien de loi $\mathcal{N}(0,\Gamma)$ avec Γ inversible. Montrer que $X^t\Gamma^{-1}X$ suit la loi du chi deux $\chi^2(n)$.

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$ avec $n \geqslant 1$. On pose

$$T = \sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}}.$$

La variable aléatoire T suit la loi de Student à n degrés de liberté notée $t(n)$. Montrer que $\mathbb{E}[T]=0$ et, si $n>2$

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{n}{n-2}.$$

Exercice 9. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2.$$

1) Montrer que les variables aléatoires $\overline{X}_n$ et S_n^2 sont indépendantes.
2) Déterminer les lois de $\overline{X}_n$ et de S_n^2.
3) En déduire la loi de

$$T_n = \sqrt{n}\frac{(\overline{X}_n - m)}{S_n}.$$

Exercice 10. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Montrer que, pour tout $x>0$,

$$\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\Big)\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \leqslant \int_x^{+\infty} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)dt \leqslant \frac{1}{x}\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big).$$

2) Vérifier que S_n suit la loi $\mathcal{N}(mn,\sigma^2 n)$.
3) Déduire du 1) et du 2) que pour tout $a>0$,

$$\mathbb{P}\left(\Big|\frac{S_n}{n} - m\Big| \geqslant a\right) \sim \frac{2\sigma}{a\sqrt{2\pi n}}\exp\Big(-\frac{a^2 n}{2\sigma^2}\Big).$$

4) Conclure que pour tout $a>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(\Big|\frac{S_n}{n} - m\Big| \geqslant a\right) = -\frac{a^2}{2\sigma^2}.$$