UPS TOULOUSE III **MODÉLISATION STATISTIQUE**
MAGISTÈRE 2002

ANALYSE DE LA COVARIANCE

On étudie la consommation de gaz d'un foyer en fonction du jour de la semaine, dimanche exclus, et de la température moyenne de la semaine, pendant 9 semaines consécutives. On dispose des résultats suivants où la dernière ligne correspond à la température moyenne de la semaine.

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L	5	1	-4	5	-13	-8	-2	-4	-10
M	3	6	-10	-2	-7	-2	-4	2	2
M	8	4	-14	-3	0	0	5	-11	-12
J	8	10	-5	-1	4	-2	4	1	-12
V	4	-1	7	-5	5	-3	-7	-3	-6
S	3	-9	3	-8	-6	0	-3	8	-1
Température	-10	-5	10	8	5	8	0	0	10

On désigne par y_{ij} la consommation de gaz le i^e jour de la j^e semaine et on note x_j la température moyenne de la j^e semaine. On suppose que y_{ij} est une réalisation d'une variable aléatoire Y_{ij} satisfaisant, pour $i = 1, \cdots, 6$ et $j = 1, \cdots, 9$,

$$Y_{ij} = m_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

où $m_{ij} \in \mathbb{R}$ et (ε_{ij}) est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1) Soit (w) le modèle à un facteur défini, pour $i = 1, \cdots, 6$ et $j = 1, \cdots, 9$, par

   (w) $$Y_{ij} = m_i + \varepsilon_{ij}.$$

   Estimer les paramètres m et σ^2. Tester l'hypothèse d'égalité des consommations pour les différents jours de la semaine.

2) Soit $(\mathcal{A})$ le modèle additif défini, pour $i = 1, \cdots, 6$ et $j = 1, \cdots, 9$, par

   $(\mathcal{A})$ $$Y_{ij} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}$$

   avec les contraintes $a_* = 0$ et $b_* = 0$. Soit $(\mathcal{B})$ le sous-modèle de $(\mathcal{A})$

   $(\mathcal{B})$ $$Y_{ij} = \mu + a_i + b(x_j - x_*) + \varepsilon_{ij}$$

   Estimer μ, a et b dans $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$. Tester $(\mathcal{B})$ dans $(\mathcal{A})$ et (w) dans $(\mathcal{A})$.

3) Soit $(\mathcal{C})$ le modèle avec intéraction défini, pour $i = 1, \cdots, 6$ et $j = 1, \cdots, 9$, par

   $(\mathcal{C})$ $$Y_{ij} = \mu + a_i + b_j + c_i(x_j - x_*) + \varepsilon_{ij}$$

   avec la contrainte $c_* = 0$. Estimer les paramètres μ, a, b et c dans $(\mathcal{C})$. Tester $(\mathcal{A})$ dans $(\mathcal{C})$