UPS TOULOUSE III — Le 26/01/2004

DEA 2004

EXAMEN
ALGORITHMES STOCHASTIQUES

Durée 3 heures

PROBLÈME I

4 points

Le but de ce premier problème est de donner un contre exemple prouvant que, dans l'algorithme de Robbins-Monro pour le dosage

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_n(Y_{n+1} - \alpha),$$

la suite déterministe, positive et décroissante vers zéro (γ_n) doit satisfaire à la condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty.$$

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose que

$$Y_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}$$

où l'état initial X_0 est un nombre réel arbitrairement choisi, $\theta > 0$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < +\infty.$$

1) Soit $x^* = \alpha/\theta$ et $\beta_n = (1+\theta\gamma_0)(1+\theta\gamma_1)\cdots(1+\theta\gamma_n)$. Montrer la relation de récurrence

$$X_{n+1} - x^* = \beta_n(X_0 - x^*) + \beta_n M_{n+1}$$

avec

$$M_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{\beta_k}\varepsilon_{k+1}.$$

2) Etudier le comportement asymptotique presque sûr et trouver la loi limite de (M_n).

3) Montrer que $X_n \to x^* + L$ p.s. avec L non nulle p.s. et conclure.

PROBLÈME II

8 points

Dans ce second problème, on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite des gains moyens pour le bandit à 2 bras. On considère une machine à sous à deux leviers A et B. Pour le levier A (resp. B), le gain est 1 avec probabilité θ^A (resp. θ^B), et 0 avec probabilité $1-\theta^A$ (resp. $1-\theta^B$). On suppose que $0 < \theta^A, \theta^B < 1$ avec $\theta^A \neq \theta^B$.
A l'instant n, le joueur choisit le levier U_n avec $U_n = A$ ou $U_n = B$ au vu des observations antérieures. Soit (X_n) la suite des gains du joueur. Pour tout $n \geq 0$, on a clairement $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|U_n) = \theta^{U_n}$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|U_n) = 1-\theta^{U_n}$. La suite des gains moyens du joueur (G_n) est définie par

$$G_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Le joueur va chercher à optimiser asymptotiquement son gain moyen, par un choix adéquat des leviers U_n. S'il connaissait θ^A et θ^B, la stratégie optimale serait de jouer toujours avec le levier A si $\theta^A > \theta^B$ et avec le levier B sinon. On aurait alors

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \max(\theta^A, \theta^B) \qquad \text{p.s.}$$

1) Pour $n \geq 0$, soit N_n^A le nombre de fois où le joueur choisi le levier A avant l'instant n, $N_n^B = n - N_n^A$ et soit

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \theta^A N_n^A - \theta^B N_n^B.$$

Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable et déterminer son processus croissant $(<M>_n)$.

2) En déduire que $M_n = o(n)$ p.s. ce qui entraine

$$\min(\theta^A, \theta^B) \leq \liminf G_n \leq \limsup G_n \leq \max(\theta^A, \theta^B) \qquad \text{p.s.}$$

3) On estime θ^A et θ^B par

$$\widehat{\theta}_n^A = \frac{1}{N_n^A}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_{(U_k=A,\ X_{k+1}=1)} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\theta}_n^B = \frac{1}{N_n^B}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_{(U_k=B,\ X_{k+1}=1)}.$$

Vérifier que si l'on joue une infinité de fois avec le levier A et avec le levier B, alors $\widehat{\theta}_n^A \to \theta^A$ et $\widehat{\theta}_n^B \to \theta^B$ p.s. De plus, si $N_n^A/n \to l_A$ et $N_n^B/n \to l_B$ p.s. avec $0 < l_A, l_B < 1$, montrer que

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^A - \theta^A) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_A^2) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^B - \theta^B) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_B^2)$$

avec σ_A^2 et $\sigma_B^2 > 0$ à déterminer.

4) A l'instant $n \geq 1$, une idée naturelle est de choisir

$$U_n = \begin{cases} A & \text{si } \widehat{\theta}_n^A \geq \widehat{\theta}_n^B, \\ B & \text{si } \widehat{\theta}_n^A < \widehat{\theta}_n^B. \end{cases}$$

Montrer que cette stratégie n'est pas optimale.

Indication. On pourra examiner les premières valeurs du processus.

5) Soit (c_n) une suite de $\mathbb{N}$, croissante, et telle que $n = o(c_n)$. Soit $I_c = \{c_n,\ n \geq 1\}$. A l'instant $n \geq 1$, on choisit $U_n = A$ si $\widehat{\theta}_n^A \geq \widehat{\theta}_n^B$ et $n \notin I_c$, $U_n = B$ si $\widehat{\theta}_n^A < \widehat{\theta}_n^B$ et $n \notin I_c$, $U_n = A$ si $n = c_{2k}$ avec $k \geq 1$ et $U_n = B$ si $n = c_{2k+1}$ avec $k \geq 0$. Montrer que cette stratégie est optimale

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \max(\theta^A, \theta^B) \qquad \text{p.s.}$$

et

$$\sqrt{n}(G_n - \max(\theta^A, \theta^B)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

avec $\sigma^2 > 0$ à déterminer.

PROBLÈME III

8 points

Soit $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $[x]$ l'entier le plus proche de x, c.a.d. défini de la façon suivante: s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [n, n+1/2]$ (resp. $x \in]n+1/2, n+1]$), alors $[x] = n$ (resp. $[x] = n+1$). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ désigne la valeur absolue de x. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : S^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x/\pi - [x/\pi]|. \end{aligned}$$

1) Dessiner le graphe de f. Montrer que f est continue, lipschitzienne et bornée.

   On admettra que cela implique l'unicité des courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

   Soit Φ le flot associé à cette équation différentielle.

2) Quels sont les équilibres de Φ? Quels sont les ensembles compacts invariants? Quels sont les ensembles intérieurement récurrents par chaînes? Justifier.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le processus à valeurs dans S^1 défini par $x_1 \in]0, 2\pi[$ fixé, et

$$x_{n+1} - x_n = \gamma_n(f(x_n) + \varepsilon_{n+1}),$$

où (γ_n) est une suite déterministe et positive, et $(\varepsilon_n)_{n\geq 2}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires centrées non nulles. Soit $L(x_n)$ l'ensemble limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$L(x_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} \overline{\{x_k\}}.$$

Supposons que $\gamma_n = o(1/\log n)$, $\sum \gamma_n = \infty$, et qu'il existe une constante $b > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\varepsilon_n| \leq b$. Quels sont les ensembles limites possibles $L(x_n)$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

4) Etant donné $a > 0$, supposons $\gamma_n = a/n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $a < 1/2$ et si les conditions de la question 3) sont vérifiées, alors

$$\mathbb{P}(L(x_n) = \{0\}) + \mathbb{P}(L(x_n) = \{\pi\}) = 1.$$

Indication. On pourra montrer que si, pour tout $j \in \{k, k+1, \ldots, n\}$, $x_j \in [-\pi, 0]$ alors, en posant $\beta_n = \prod_{k=1}^n (1-\gamma_k)$,

$$x_{n+1} = \frac{\beta_n}{\beta_{k-1}} \left(x_k + \beta_{k-1} \sum_{j=k}^{n} \frac{\gamma_j}{\beta_j} \varepsilon_{j+1} \right).$$

5) Supposons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \gamma_n^2 = \infty,$$

et que les conditions de la question 3) sont vérifiées. Montrer que

$$\mathbb{P}(L(x_n) = S^1) = 1.$$