UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **Le 13/01/2009**
MASTER 1, 2008/2009

EXAMEN
MARTINGALES

Durée 1h30

PROBLÈME I

20 points

On considère le processus autorégressif à coefficient aléatoire

$$X_{n+1} = \theta_{n+1} X_n + \varepsilon_{n+1}$$

où l'état initial $X_0 = 0$ et (θ_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi avec $\mathbb{E}[\theta_n] = \theta$ et $\mathbb{E}[\theta_n^2] = \tau^2 > \theta^2$. On se place dans le cas explosif avec $\tau^2 > 1$. On suppose que (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi avec $\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_n^2] = \sigma^2 > 0$. On suppose également que les suites (θ_n) et (ε_n) sont indépendantes. La filtration naturelle du modèle est $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{E}[\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$,
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \theta X_n \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \tau^2 X_n^2 + \sigma^2.$$

2) Soit (Y_n) la suite donnée, pour tout $n \geqslant 1$, par $Y_n = X_n^2/\tau^{2n}$. Vérifier que (Y_n) est une sous-martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$.

3) En déduire que (Y_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable Y. Dans toute la suite, on supposera que Y est non nulle presque sûrement.

4) Montrer via le lemme de Toeplitz que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau^{2n}} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \left(\frac{\tau^2}{\tau^2 - 1}\right) Y \qquad \text{p.s.}$$

5) Vérifier par la loi forte des grands nombres que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \theta_k^2 = \tau^2 \qquad \text{p.s.}$$

6) On propose tout d'abord d'estimer le paramètre inconnu θ par l'estimateur des moindres carrés donné par $\widehat{\theta}_n = A_n/B_n$ avec

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1} \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2.$$

Si $N_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}\varepsilon_k$, montrer que

$$\widehat{\theta}_n - \theta = \frac{1}{B_n}\left(N_n + \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2(\theta_k - \theta)\right).$$

7) Vérifier par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $N_n^2 = O(n\tau^{2n})$ donc $N_n = o(\tau^{2n})$ presque sûrement puis conclure que si $\widehat{\theta}_n \to \theta$ alors $\theta_n \to \theta$ presque sûrement ce qui est absurde car $\tau^2 > \theta^2$.

8) On propose ensuite estimer θ par l'estimateur des moindres carrés pondérés défini par $\widetilde{\theta}_n = C_n/D_n$ avec

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} X_k X_{k-1} \qquad \text{et} \qquad D_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} X_{k-1}^2$$

avec $a_n = (1 + X_n^2)^{-1}$. Si $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} X_{k-1}(\varepsilon_k + X_{k-1}(\theta_k - \theta))$, vérifier que

$$\widetilde{\theta}_n - \theta = \frac{M_n}{D_n}.$$

9) Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable dont le processus croissant $< M >_n = O(n)$ presque sûrement. Vérifier que $D_n/n \to 1$ puis en déduire que $\widetilde{\theta}_n \to \theta$ presque sûrement.

10) Si $\mathbb{E}[\theta_n^4] = \nu^4$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_n^4] = \lambda^4$, établir le théorème limite centrale

$$\sqrt{n}(\widetilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^2 - \theta^2).$$

Indication : Le lemme de Toeplitz nous apprend que si (a_n) est une suite de nombres réels strictement positifs satisfaisant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ et si (x_n) est une suite de nombres réels convergeant vers $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = x.$$