UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
MASTER 1, 2009/2010

Le 23/04/2010

EXAMEN MARTINGALES

Durée 1h30

PROBLÈME I

10 points

Le but de ce premier problème est de donner un contre exemple prouvant que, dans l'algorithme de Robbins-Monro pour le dosage

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_n (Y_{n+1} - \alpha),$$

la suite déterministe, positive et décroissante vers zéro (γ_n) doit satisfaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty.$$

On suppose que

$$Y_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}$$

avec $\theta > 0$, où l'état initial X_0 est un nombre réel arbitrairement choisi et (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose également que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < +\infty.$$

1) Si $\beta_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + \theta \gamma_k)$, montrer que la suite (β_n) converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{\beta_n} \right)^2 < +\infty.$$

2) Vérifier que l'on a l'égalité $X_{n+1} - x^* = \beta_n (X_0 - x^*) + \beta_n M_{n+1}$ avec $x^* = \alpha/\theta$ et

$$M_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{\beta_k} \varepsilon_{k+1}.$$

3) Vérifier que (M_n) est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ et calculer $<M>_n$.

4) En déduire que (M_n) converge p.s. vers une variable aléatoire de carré intégrable.

5) Finalement, montrer que (X_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire $\Lambda = x^* + L$, déterminer la loi de L et conclure.

PROBLÈME II

10 points

Soit (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle symétrique, encore appelée loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda |x|).$$

Soit (X_n) la suite définie, pour tout $n \geqslant 1$, par $X_n = n^a \varepsilon_n$ avec $a > 0$. On pose

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Calculer l'espérance, la variance et le moment d'ordre 4 de la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

2) Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable.

3) Calculer son processus croissant $< M >_n$ et vérifier que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{< M >_n}{n^{2a+1}} = \frac{2}{\lambda^2 (2a+1)}.$$

4) En déduire la convergence presque sûre

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_n}{n^{2a+1}} = 0.$$

5) Montrer également le théorème limite centrale

$$\frac{M_n}{n^a \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{\lambda^2 (2a+1)}\right).$$