UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **Le 21/11/2008**
MASTER 1, 2008/2009

PARTIEL
MARTINGALES

Durée 2 heures

PROBLÈME I

12 points

Une entreprise de transport de marchandises s'interesse au nombre de kilomètres parcourus par ses camions. Si un camion fonctionne normalement le matin, il effectue un nombre constant a de kilomètres dans la journée. Sinon, il reste à l'entrepôt où il est réparé. Si X_n représente le nombre de kilomètres parcourus par un camion à la fin de la n^e journée, on a donc, pour tout $n \geqslant 0$,

$$X_{n+1} = X_n + aY_n$$

avec $X_0 = 0$, où Y_n est une variable aléatoire réelle indépendante de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$. Le gérant de l'entreprise, prudent, décide de remplacer un camion dès que son compteur affiche N kilomètres où N est un multiple donné de a. On s'intéresse donc à la variable aléatoire $T = \inf\{n \geqslant 1, X_n = N\}$. Pour tout $t \geqslant 0$, on pose

$$M_n(t) = \frac{\exp(tX_n)}{(p\exp(at) + 1 - p)^n}.$$

1) Pour tout $t \geqslant 0$, montrer que $(M_n(t))$ est une martingale positive d'espérance 1.

2) Pour tout $t \geqslant 0$, vérifier que $(M_{n\wedge T}(t))$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers la variable aléatoire

$$L_T(t) = \frac{\exp(tN)}{(p\exp(at) + 1 - p)^T}.$$

3) En déduire que, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{E}[(p\exp(at) + 1 - p)^{-T}] = \exp(-tN)$.

4) Conclure que, pour tout $0 < u < 1$,

$$\mathbb{E}[u^T] = \Big(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{up}\Big)^{-N/a}.$$

5) Vérifier que

$$\mathbb{E}[T] = \frac{N}{ap} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{N(1-p)}{ap^2}.$$

PROBLÈME II

8 points

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $p < 1/2$, $q = 1 - p$ et soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Si $M_n = (q/p)^{S_n}$, montrer que (M_n) est une martingale positive d'espérance 1.

2) Vérifier que, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant a\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} M_k \geqslant \Big(\frac{q}{p}\Big)^a\Big).$$

3) En déduire via l'inégalité maximale de Kolmogorov que, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant a\Big) \leqslant \Big(\frac{p}{q}\Big)^a.$$

4) Conclure que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k\Big] \leqslant \frac{p}{1 - 2p}.$$