UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **Le 11/03/2010**
MASTER 1, 2009/2010

PARTIEL
MARTINGALES

Durée 2 heures

PROBLÈME I

10 points

Soit f une densité de probabilité paire et continue sur $\mathbb{R}$. On observe le modèle de translation

$$X_n = \theta + \varepsilon_n$$

où (ε_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, de densité de probabilité f et fonction de répartition F et où θ est un paramètre réel inconnu à estimer. Par analogie avec l'algorithme de Robbins-Monro, on estime θ par l'estimateur récursif

$$\widehat{\theta}_{n+1} = \widehat{\theta}_n - \gamma_n \left(Y_{n+1} - \frac{1}{2} \right) \qquad \text{avec} \qquad Y_{n+1} = \mathrm{I}_{\{X_{n+1} \leqslant \widehat{\theta}_n\}}$$

où la valeur $\widehat{\theta}_0$ est choisie arbitrairement et (γ_n) est positive, décroissante vers zéro avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty.$$

1) Montrer que conditionnellement à $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, Y_{n+1} suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ avec p_n à déterminer.

2) En déduire que $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = p_n$.

3) Si $h(x) = F(x - \theta)$, vérifier que $h(\theta) = \alpha = 1/2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \theta$,

$$(x - \theta)(h(x) - \alpha) > 0.$$

4) Conclure via l'algorithme de Robbins-Monro que

$$\lim_{n \to \infty} \widehat{\theta}_n = \theta \qquad \text{p.s.}$$

PROBLÈME II

10 points

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$. Pour tout entier $q \geqslant 1$ et $n \geqslant q$, on pose

$$Y_n(q) = X_n X_{n-1} \cdots X_{n-q+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad \Sigma_n(q) = \sum_{k=q}^{n} Y_k.$$

Si $q = 1$, on peut noter que $Y_n(1) = X_n$ et $\Sigma_n(1) = S_n$. Soit (M_n) la suite définie pour tout $n \geqslant q$ par

$$M_n = \sum_{k=q}^{n} \left(\frac{Y_k(q) - pY_{k-1}(q-1)}{k} \right).$$

1) Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} S_n = p \qquad \text{p.s.}$$

2) Vérifier que (M_n) est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ et calculer $<M>_n$.

3) En déduire que (M_n) converge p.s. vers une variable aléatoire de carré intégrable.

4) Conclure par le lemme de Kronecker que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \Sigma_n(q) = p^q \qquad \text{p.s.}$$