MARTINGALES À TEMPS DISCRET

1 Somme.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$, c'est à dire $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Montrer que (S_n) est une martingale si $p = 1/2$, sous-martingale si $p \geqslant 1/2$ et sur-martingale si $p \leqslant 1/2$.

2 Produit.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

Montrer que (P_n) est une martingale si $\lambda = 1$, sous-martingale si $\lambda \leqslant 1$ et sur-martingale si $\lambda \geqslant 1$.

3 Convergence.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et de carré intégrable avec $\mathbb{E}[X_n^2] = \sigma_n^2$ où $\sigma_n^2 \geqslant 0$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $M_n = S_n^2 - V_n$ avec

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

1) Montrer que (S_n) et (M_n) sont deux martingales.

2) Vérifier que (S_n) converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$ si $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < +\infty$.

4 Martingale exponentielle.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_n(t) = \exp\Big(tS_n - \frac{nt^2}{2}\Big).$$

1) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(M_n(t))$ est une martingale positive qui converge presque sûrement et déterminer sa limite.

2) Conclure que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $(M_n(t))$ ne converge pas dans $\mathbb{L}^1$.

5 Martingale autorégressive.

On considère la suite de variables aléatoires (X_n) définie, pour tout $n \geqslant 0$, par

$$X_{n+1} = \theta X_n + (1-\theta)\varepsilon_{n+1}$$

où le paramètre inconnu $0 < \theta < 1$ et l'état initial X_0 est égal à p avec $0 < p < 1$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ et l'on suppose que, pour tout $n \geqslant 0$, la loi de ε_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(X_n)$.

1) Vérifier que, pour tout $n \geqslant 0$, $0 < X_n < 1$.

2) Montrer que (X_n) est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire L.

3) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = (1-\theta)^2 \mathbb{E}[X_n(1-X_n)].$$

4) Calculer $\mathbb{E}[L(1-L)]$ puis conclure que L suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

6 Fortune ou ruine du joueur.

Un joueur possède une richesse initiale égale à a et son but est d'atteindre la richesse $b > a$ avant d'être ruiné avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Il joue à un jeu constitué de n épreuves indépendantes où, à chaque épreuve, il gagne 1 euro avec probabilité p et il perd 1 euro avec probabilité $q = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. On peut modéliser cette situation à l'aide d'une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$. La richesse du joueur à l'issue de la n^e épreuve est

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Vérifier que (S_n) tend vers $+\infty$ si $p > 1/2$ et vers $-\infty$ si $p < 1/2$.

2) Que se passe-t-il si le jeu est équitable avec $p = 1/2$?

3) Si $M_n = (q/p)^{S_n}$, montrer que (M_n) est une martingale positive d'espérance 1.

4) Soit T_{ab} l'instant aléatoire où le jeu s'arrêtera

$$T_{ab} = \inf\{n \geqslant 1, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

Le jeu se termine par la fortune du joueur si $S_{T_{ab}} = b$ ou sa ruine si $S_{T_{ab}} = -a$. Vérifier que l'on a $\mathbb{E}[M_{T_{ab}}] = 1$, $\mathbb{E}[S_{T_{ab}}] = m\mathbb{E}[T_{ab}]$ et $\mathbb{E}[(S_{T_{ab}} - mT_{ab})^2] = \sigma^2\mathbb{E}[T_{ab}]$ avec m et σ^2 à déterminer.

5) Si le jeu est équitable, montrer que la valeur moyenne de la durée du jeu $\mathbb{E}[T_{ab}] = ab$.