# CONVERGENCE DES MARTINGALES

## 1 Processus autorégressif.

Le processus autorégressif joue un rôle important en économétrie avec la prédiction d'indices économiques fluctuants. On considère le processus autorégressif

$$X_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}$$

où le paramètre inconnu $|\theta| < 1$ et l'état initial $X_0 = 0$. On suppose que $(\varepsilon_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$.

1) Montrer par récurrence que $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \theta^{n-k} \varepsilon_k$.

2) En déduire que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\Big).$$

3) Montrer par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$X_n^2 \leqslant \frac{1}{1-|\theta|} \sum_{k=1}^{n} |\theta|^{n-k} \varepsilon_k^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \leqslant \Big(\frac{1}{1-|\theta|}\Big)^2 \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2.$$

4) En déduire que presque sûrement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}.$$

## 2 Urne de Polya.

Soient $a, b, c$ trois entiers supérieurs ou égaux à 1. Une urne contient $a$ boules rouges et $b$ boules blanches. On tire une boule dans l'urne, on regarde sa couleur, puis on la replace et on ajoute $c$ boules de la même couleur, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne après l'instant 1. On itère ensuite la même procédure. Après l'instant $n$, il y a donc $a + b + nc$ boules dans l'urne. Soit $X_n$ le nombre de boules rouges dans l'urne après l'instant $n$ et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. La proportion associée est donc

$$M_n = \frac{X_n}{a+b+nc}.$$

1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_n$ ?

2) Montrer que l'on a la décomposition

$$X_n = a + c \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

où, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{L}(\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_n)$ avec $p_n$ à déterminer.

3) En déduire que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (a + b + c(n + 1))M_n$.

4) Montrer que $(M_n)$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire $L$.

5) Dans le cas particulier où $a = b = c$, montrer par récurrence que la variable aléatoire $X_n$ est uniformément distribuée sur $\{a, 2a, \ldots, (n + 1)a\}$ et que la limite $L$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

# 3 Martingale bornée.

Soit $(M_n)$ une martingale bornée satisfaisant, pour tout $n \geqslant 0$, $|M_n| \leqslant a$, $a > 0$. On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1}).$$

1) Vérifier que $(X_n)$ est une martingale.

2) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{E}[X_n^2] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2]$.

3) En déduire que $(X_n)$ converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$.

# 4 Processus de Galton-Watson.

Le processus de Galton-Watson, encore appelé processus de branchement, sert à modéliser la dynamique d'une population. On part d'un unique ancêtre. Il peut donner naissance à $0, 1, 2, \ldots$ enfants qui constituent la première génération. Chaque individu de la première génération peut donner naissance à $0, 1, 2, \ldots$ enfants et l'ensemble de tous les descendants forme la seconde génération et ainsi de suite. Le nombre d'individus $X_n$ de la $n^e$ génération est donc donné, pour tout $n \geqslant 0$, par la relation

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k}$$

avec $X_0 = 1$ où $Y_{n,k}$ correspond au nombre d'enfants du $k^e$ individu de la $n^e$ génération. On suppose que $(Y_{n,k})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$ avec $\sigma^2 > 0$. On suppose également que $(Y_{n,k})$ est indépendante de $X_n$.

1) Montrer que le processus de Galton-Watson peut s'ecrire sous la forme autorégressive $X_{n+1} = mX_n + \varepsilon_{n+1}$ avec $\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \sigma^2 X_n$. On pose alors

$$M_n = \frac{X_n}{m^n}.$$

2) Montrer que $(M_n)$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ dès que l'espérance $m > 1$.

3) Si $m > 1$, en déduire que $(M_n)$ converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire $L$ dont on précisera l'espérance et la variance.