EXAMEN
SÉRIES CHRONOLOGIQUES

Durée 3 heures

PROBLÈME I

2 points

On considère le processus moyenne mobile défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = a\varepsilon_{n-2} + b\varepsilon_{n-4} + \varepsilon_n$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Montrer que (X_n) est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

2) En déduire la densité spectrale associée à (X_n).

PROBLÈME II

5 points

Soit (X_n) un processus stationnaire centré de fonction d'autocovariance γ et soit Γ_n la matrice de covariance du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)^t$. On va montrer que si $\gamma(0) > 0$ et si $\gamma(n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini alors, pour tout $n \geqslant 1$, Γ_n est inversible. On suppose par l'absurde qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que Γ_p soit inversible et Γ_{p+1} ne soit pas inversible.

1) Montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que l'on a l'égalité presque sûre

$$X_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} a_k X_k.$$

2) Par stationnarité, montrer que pour tout $n \geqslant p+1$, il existe $a_{n,1}, \ldots, a_{n,p} \in \mathbb{R}$ tels que

$$X_n = \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} X_k.$$

3) Soit a_n le vecteur de $\mathbb{R}^p$, $a_n = (a_{n,1}, \ldots, a_{n,p})^t$ et soit λ_p la plus petite valeur propre de la matrice inversible Γ_p. Montrer que $\gamma(0) = a_n^t \Gamma_p a_n$ et $\gamma(0) \geqslant \lambda_p ||a_n||^2$.

4) Montrer également que

$$\gamma(0) = \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} \gamma(n-k).$$

5) Déduire du 3) et du 4) que $\gamma(0) = 0$ ce qui est absurde et conclure.

PROBLÈME III

5 points

On considère le processus moyenne mobile défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \theta\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

avec $|\theta| < 1$, où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Montrer via les équations de Yule-Walker que la meilleure prédiction linéaire de X_{n+1} sur l'enveloppe linéaire engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ est donnée par

$$\widehat{X}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k X_{n+1-k}$$

où $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ vérifient, pour tout $2 \leqslant k \leqslant n-1$, la relation de récurrence

$$\theta\Phi_{k-1} + (1+\theta^2)\Phi_k + \theta\Phi_{k+1} = 0$$

avec les conditions au bord $(1+\theta^2)\Phi_1 + \theta\Phi_2 = \theta$ et $(1+\theta^2)\Phi_n + \theta\Phi_{n-1} = 0$.

2) En déduire que la fonction d'autocorrélation partielle de (X_n) est égale à

$$\alpha(n) = -\frac{(-\theta)^n(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(n+1)}}.$$

PROBLÈME IV

4 points

On considère le processus autorégressif défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \frac{1}{2}X_{n-1} + \frac{1}{4}X_{n-2} + \varepsilon_n$$

où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Trouver la suite (c_n) telle que le processus (X_n) s'écrive sous la forme linéaire

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}.$$

2) Calculer la fonction d'autocorrélation associée à (X_n).

PROBLÈME V

4 points

On considère le processus ARMA défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \frac{2}{3}X_{n-1} - \frac{1}{9}X_{n-2} + \frac{7}{3}\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Trouver la suite (c_n) telle que le processus (X_n) s'écrive sous la forme linéaire

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}.$$

2) Calculer la fonction d'autocorrélation associée à (X_n).