UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **Le 16/01/2012**
MASTER 2, 2011/2012

EXAMEN
SÉRIES CHRONOLOGIQUES

Durée 3 heures

PROBLÈME I

6 points

On considère le processus autorégressif d'ordre un défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$\begin{cases} X_n &= \theta X_{n-1} + \varepsilon_n \\ \varepsilon_n &= \rho \varepsilon_{n-1} + V_n \end{cases}$$

avec $|\theta| < 1$, $|\rho| < 1$ et $\theta \neq \rho$, où (V_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a la relation

$$X_n = (\theta + \rho) X_{n-1} - \theta \rho X_{n-2} + V_n.$$

2) Vérifier que ce processus autorégressif d'ordre deux est causal.

3) Trouver la suite (c_n) telle que le processus (X_n) s'écrive sous la forme linéaire

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}.$$

4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \frac{\sigma^2 (1 + \theta\rho)}{(1 - \theta^2)(1 - \rho^2)(1 - \theta\rho)}.$$

PROBLÈME II

4 points

On considère le processus autorégressif d'ordre deux défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = 2\rho \cos(\theta) X_{n-1} - \rho^2 X_{n-2} + \varepsilon_n$$

avec $0 < \theta < \pi$, $|\rho| < 1$ et $\rho \neq 0$, où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. On lui associe, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme $A(z) = \rho^2 z^2 - 2\rho z \cos(\theta) + 1$.

1) Montrer que les racines de A sont données par

$$z_1 = \frac{\exp(i\theta)}{\rho} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{\exp(-i\theta)}{\rho}.$$

2) En déduire que le polynôme A est causal.

3) Calculer la densité spectrale associée à (X_n).

PROBLÈME III

4 points

On considère le processus ARMA défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \frac{2}{3}X_{n-1} - \frac{1}{9}X_{n-2} + \frac{7}{3}\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

où (ε_n) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Trouver la suite (c_n) telle que le processus (X_n) s'écrive sous la forme linéaire

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}.$$

2) Calculer la fonction d'autocorrélation associée à (X_n).

PROBLÈME IV

6 points

On considère le processus autorégressif stationnaire défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$X_n = \theta X_{n-1} + \varepsilon_n$$

où le paramètre inconnu $|\theta| < 1$ et (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$. On estime le paramètre inconnu θ par l'estimateur de Yule-Walker

$$\widehat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}}{\sum_{k=0}^n X_k^2}.$$

1) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ.

2) Montrer également que

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1 - \theta^2).$$

3) On estime la variance inconnue σ^2 par

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - \widehat{\theta}_n X_{k-1})^2.$$

Vérifier que $\widehat{\sigma}_n^2$ converge presque sûrement vers σ^2 et que l'on a

$$\sqrt{n}(\widehat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4).$$