ANALYSE SPECTRALE DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

1 Existence.

Soit $(\gamma(t))$ la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t = 0, \\ r & \text{si} \quad |t| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre r pour lesquelles la fonction $(\gamma(t))$ est la fonction d'autocovariance d'une série chronologique stationnaire.
2) Trouver la densité spectrale associée à cette fonction d'autocovariance.
3) En déduire les deux processus moyenne mobile possibles associés à $(\gamma(t))$.

2 Autocovariance.

Trouver la fonction d'autocovariance du processus (X_t) dont la densité spectrale est donnée, pour tout $x \in \mathbb{T}$, par

$$f(x) = \frac{\pi - |x|}{\pi^2}.$$

3 Sinus cosinus.

Pour $\theta \in]0, \pi[$ et pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on considère le processus

$$X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) + \varepsilon_t$$

avec $\varepsilon_t = cV_{t-1} + V_t$, où (V_t) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $c \in \mathbb{R}$. On suppose que A et B deux variables aléatoires centrées, non corrélées et de variance τ^2, indépendantes du bruit blanc (V_t).

1) Montrer que (X_t) est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.
2) Vérifier que (X_t) n'admet pas de densité spectrale et trouver la mesure spectrale associée à (X_t).

4 Processus autorégressif.

On considère le processus autorégressif défini, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par

$$X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $|\theta| < 1$ et (ε_t) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer que (X_t) possède une densité spectrale donnée, pour tout $x \in \mathbb{T}$, par

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi(1 + \theta^2 - 2\theta\cos(x))}.$$

5 Processus moyenne mobile.

On considère le processus moyenne mobile défini, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par

$$X_t = \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$

où (ε_t) est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.

1) Calculer la densité spectrale associée à (X_t).

2) Montrer que la distribution spectrale de (X_t) est donnée, pour tout $x \in \mathbb{T}$, par

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(y)\,dy = \frac{\sigma^2}{2\pi}\Big((1+\theta^2)(x+\pi) + 2\sin(x)\Big).$$

6 Composition.

On considère les processus stationnaires (X_t) et (Y_t) définis, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par

$$X_t = \theta X_{t-1} + V_t \qquad \text{et} \qquad Y_t = \rho Y_{t-1} + X_t + W_t$$

avec $|\theta| < 1$ et $|\rho| < 1$, où (V_t) et (W_t) sont deux bruits blancs décorrélés de variances respectives $\sigma^2 > 0$ et $\tau^2 > 0$. Déterminer la forme de la fonction d'autocovariance associée à (Y_t) puis calculer la densité spectrale de (Y_t).

7 Processus harmonique.

On considère le processus (X_t) défini, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par

$$X_t = \alpha\cos(at + U) + \beta\cos(bt + V)$$

avec $a, b \in]0, \pi[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, où U et V sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1) Montrer que (X_t) est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

2) Vérifier que (X_t) n'admet pas de densité spectrale et trouver la mesure spectrale associée à (X_t)