

# EXAMEN

## PROBABILITÉS & APPLICATIONS

*Durée 3 heures*

### PROBLÈME I

*5 points*

La loi de Laplace est utilisée pour modéliser des erreurs d'expérience. Soit  $X$  une variable aléatoire de loi de Laplace, de densité de probabilité  $f$  donnée, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|).$$

- 1) Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .
- 2) Montrer que la fonction de répartition  $F$  de  $X$  est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \exp(x) & \text{si } x \leq 0, \\ 2 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- 3) Pour  $y \in ]0,1[$ , calculer la fonction de quantile  $F^{-1}(y)$  et en déduire un programme MATLAB pour simuler  $X$  à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0,1]$ .

### PROBLÈME II

*5 points*

Soit  $Y$  et  $Z$  des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ .

- 1) Montrer que la différence  $Y - Z$  suit la même loi que  $X$ .
- 2) En déduire un second programme MATLAB pour simuler une loi de Laplace.
- 3) Soit  $\varepsilon$  une variable aléatoire indépendante de  $Y$  et de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1/2)$ . Montrer que  $\varepsilon Y - (1 - \varepsilon)Y$  suit la même loi que  $X$  et en déduire un troisième programme MATLAB pour simuler une loi de Laplace.

# PROBLÈME III

10 points

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Laplace. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose

$$U_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k \quad \text{et} \quad V_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

- 1) Trouver la loi de  $-X_1$  et en déduire que  $U_n$  suit la même loi que  $-V_n$ .
- 2) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , calculer  $\mathbb{P}(U_n > x)$  et  $\mathbb{P}(V_n \leq x)$  et proposer un programme MATLAB permettant de visualiser sur un histogramme l'égalité en loi de  $U_n$  et  $-V_n$ .
- 3) On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de la variable normalisée

$$W_n = \frac{V_n}{\log n}.$$

- a) On suppose tout d'abord que  $\varepsilon > 0$ . Montrer que, pour  $n \geq 3$ ,

$$\mathbb{P}(W_n > 1 + \varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^{1+\varepsilon}}\right)^n.$$

En déduire que  $\mathbb{P}(W_n > 1 + \varepsilon)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

- b) On suppose maintenant que  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Montrer que, pour  $n \geq 3$ ,

$$\mathbb{P}(W_n < 1 - \varepsilon) = \left(1 - \frac{1}{2n^{1-\varepsilon}}\right)^n.$$

En déduire que  $\mathbb{P}(W_n < 1 - \varepsilon)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

- c) On suppose finalement que  $\varepsilon > 1$ . Montrer que, pour  $n \geq 3$ ,

$$\mathbb{P}(W_n < 1 - \varepsilon) = \frac{n^{1-\varepsilon}}{2^n}.$$

En déduire que  $\mathbb{P}(W_n < 1 - \varepsilon)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Déduire des questions précédentes a), b), c), que  $W_n$  converge en probabilité vers 1. Écrire un programme MATLAB permettant de visualiser cette convergence.