

## Processus de Poisson

### 1 Introduction au processus de Poisson.

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . Si  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,  $N_0 = 0$  et pour tout  $t > 0$

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(S_n \leq t)},$$

$(N_t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

**Exercice 1.** Montrer que, pour tout  $t > 0$ ,  $N_t$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda t)$ . En déduire un code Matlab permettant de générer un vecteur aléatoire  $Y$  contenant  $N$  réalisations i.i.d. de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  où les valeurs  $N \geq 1$  et  $\lambda > 0$  sont affectées par l'utilisateur. Pour  $N$  assez grand, vérifier la loi des grands nombres sur les moyennes empiriques successives de  $Y$ .

**Exercice 2.** Soit  $(N_t)$  un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ . Quelle est la loi conditionnelle de  $N_s$  sachant  $N_t$  avec  $0 < s < t$ , puis plus généralement de  $N_{s_1}, N_{s_2} - N_{s_1}, \dots, N_{s_n} - N_{s_{n-1}}$  sachant  $N_t$  avec  $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < t$ .

### 2 Paradoxe de l'autobus.

Soit  $(N_t)$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$ . On appelle  $S_n$  l'instant du  $n^e$  saut du processus et on pose  $S_0 = 0$ . On pose ensuite

$$Z_t = t - S_{N_t} \quad \text{et} \quad W_t = S_{N_t+1} - t.$$

**Exercice 3.** Calculer la loi du couple  $(Z_t, W_t)$ . Montrer que  $Z_t$  et  $W_t$  sont indépendantes et que  $W_t$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Donner la loi de  $Z_t$  et vérifier que  $Z_t$  a la même loi que  $\min(S_1, t)$ . Montrer que la fonction de répartition de  $Z_t$  tend vers la fonction de répartition de  $S_1$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Calculer  $\mathbb{E}[Z_t + W_t]$ . Trouver sa limite quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Que pensez-vous de ce résultat? Finalement, on considère les arrivées successives d'un autobus à un arrêt donné comme définissant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Un passager potentiel arrive à l'arrêt à l'instant  $t$ . Quelle est l'espérance de son temps d'attente?

### 3 Mesure de comptage.

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi  $\mu$ . Soit  $\tau$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  indépendante de la suite  $(X_n)$ . Pour un borélien  $B$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $0 < \mu(B) < 1$ , on définit la variable aléatoire  $N(B) = \sum_{n=1}^{\tau} \mathbb{1}_B(X_n)$  si  $\tau \geq 1$  et  $N(B) = 0$  sinon.

**Exercice 4.** Calculer la loi de probabilité de  $N(B)$  et la loi du couple  $(N(B), N(B^c))$ . Montrer que  $\tau$  suit une loi de Poisson si, et seulement si, pour tout borélien  $B$ ,  $N(B)$  et  $N(B^c)$  sont indépendantes. Déterminer la loi de  $N(B)$  dans ce cas.