**Mots clés** : Algébre linéaire, systèmes linéaires, inverse.

*Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury demande que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Il est souhaitable que vous organisiez votre présentation comme si le jury n'avait pas connaissance du texte. Le jury aura néanmoins le texte sous les yeux pendant votre exposé.*

# Pseudo-inverse

## 1. Introduction

Lorsqu'on cherche à modéliser un phénomène physique à l'aide de données expérimentales pour obtenir soit une loi, soit une représentation graphique, la plus simple possible, on dispose en général de trop de données, non toutes fiables. Si la modélisation est linéaire, on obtient un système linéaire $Ax = b$ dont le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues. Un tel système est dit sur-déterminé et en géneral n'admet pas de solutions. Une solution acceptable est de choisir un vecteur $x$ qui minimise la quantité $\|Az - b\|^2$.

Dans un système physique, un contrôleur prend des mesures et calcule une commande numérique de façon discrète au bout d'un délai fixé, périodiquement renouvelé. Si le calcul est linéaire et en "boucle ouverte", le contrôleur doit effectuer la commande $x$ sans utiliser les mesures éventuelles internes au système afin d'amener une partie du système dans un certain état. Ce calcul est alors le produit par une matrice $A$ définie par le système d'un vecteur dont les composantes représentent les $t$ premières commandes $x_1, ..., x_t$. Le calcul se fait dans une dimension fixée (par exemple 1 si le contrôleur calcule une position sur un segment) alors que le nombre de commandes utilisées peut-être arbitrairement grand. Le système linéaire $AX = b$ que doit vérifier le vecteur des $t$ premières commandes afin de parvenir au calcul de $b$ a en géneral plus d'inconnues que d'équations. Un tel système est dit sous-déterminé et s'il est compatible, il admet une infinité de solutions. Il est donc possible de chercher parmi ces solutions une qui minimise un coût (par exemple une durée ou une quantité d'énergie) ce qui dans certains cas peut se ramener à la recherche d'une solution de norme euclidienne minimale, parmi les solutions.

Soit $A$ une matrice $(s, t)$ à coefficients réels et soit $b$ un vecteur de $\mathbb{R}^s$ ; nous cherchons à minimiser la quantité $\|Ax - b\|$ lorsque $x$ parcourt $\mathbb{R}^t$, en notant $\| \ \|$ la norme euclidienne. Au besoin en ajoutant des contraintes (par exemple $\|x\|$ minimal), le minimum est atteint en un **unique** vecteur $x$ de $\mathbb{R}^t$, qu'on note $A^\circ b$. Les propositions suivantes peuvent se vérifier :

**Proposition 1** *Si $A$ est une matrice inversible, alors $A^\circ = A^{-1}$.*

**Proposition 2** *Soit $b \in \mathbb{R}^s$. Un vecteur $z$ réalise le minimum de $\|Ax - b\|$ lorsque $x$ parcourt $\mathbb{R}^t$, si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^s$, $< Az - b, Ax >= 0$.*

**Corollaire 1** *Si $A^\circ b$ existe, alors ${}^tAAA^\circ b = {}^t Ab$.*

Le but de ce texte est d´étudier sous certaines conditions comment calculer effectivement une telle application $A^\circ$.

### 2. Pseudo-inverses

**Définition :** Soit $A$ une matrice réelle $(s, t)$. On appelle matrice pseudo inverse de $A$ toute matrice $B$ telle que $ABA = A$.

Soit $A$ une matrice réelle $(s, t)$. Il existe des matrices de déterminant non nuls, $U \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_t(\mathbb{R})$, et une matrice $\pi$ telle que

$$\pi = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = U\pi V.$$

On montre alors que les pseudo-inverses de $A$ sont toutes de la forme

$$V^{-1} \begin{pmatrix} I_r & W \\ S & T \end{pmatrix} U^{-1}.$$

En effectuant des opérations élémentaires sur la matrice $A$, une telle matrice pseudo inverse peut être calculée de façon à être inversible lorsque $s = t$. De plus, on montre pour toute pseudo-inverse $B$ de $A$ que si le système $AX = b$ admet une solution, alors $Bb$ en est une solution.

### 3. Pseudo-inverse de Moore-Penrose

**Définition :** Soit $A$ une matrice réelle $(s, t)$. On appelle matrice pseudo inverse de Moore-Penrose de $A$ une matrice $B$ vérifiant les quatre propriétés :

(i) $ABA = A$,

(ii) $BAB = B$

(iii) $AB$ est une matrice symétrique,

(iv) $BA$ est une matrice symétrique.

**Proposition 3** *Tout matrice réelle admet une unique matrice pseudo inverse de Moore-Penrose.*

**Notation :** La matrice pseudo inverse de Moore-Penrose de la matrice $A$ est notée $A^\sharp$.

On montre que $A^\sharp = ({}^tAA)^\sharp\, {}^tA$. Le calcul de $A^\sharp$ repose donc sur celui de $S^\sharp$, pour $S$ matrice symétrique.

**Théorème 1** *Le minimum de $\|Ax-b\|$, lorsque $x$ parcourt $\mathbb{R}^t$, est atteint pour le vecteur $x = A^\sharp b$. De plus, $x = A^\sharp b$ est l'unique vecteur de norme minimale parmi les vecteurs $y$ réalisant le minimum de $\|Ay-b\|$.*

## 4. Algorithmes de calcul

La matrice pseudo inverse de Moore-Penrose d'une matrice $A$ de rang maximal peut se calculer en utilisant la décomposition $UDV$ de la matrice $A$ ($U$ orthogonale, $D$ diagonale positive décroissante, $V$ orthogonale). En effet, $A^\sharp =^t VD^\sharp\, {}^tU$. Cette décomposition se calcule de façon itérative, car elle suppose le calcul des valeurs singulières de $A$, c'est à dire des racines carrées des valeurs propres de ${}^tAA$, dont le calcul ne peut-être exact. Néanmoins puisqu'il s'agit de la solution d'un système linéaire, le calcul de la matrice $A^\sharp$ peut se faire de façon exacte.

On peut aussi calculer la matrice pseudo inverse de Moore-Penrose d'une matrice $A$ en utilisant la décomposition $QR$ de la matrice $A$ ($Q$ orthogonale, $R$ triangulaire supérieure). La matrice $Q$ se calcule de façon effective comme produit de matrices de Householder.

Soit $R = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $T$ triangulaire supérieure inversible de taille $r$ ; $\forall x \in \mathbb{R}^t$, $\|Ax-b\|^2 = \|Rx -^t Qb\|^2 = \|Tx'-u\|^2 + \|v\|^2$, en ayant noté $x'$ (respectivement $u$) le vecteur formé par les $r$ premières coordonnées de $x$ (respectivement ${}^tQb$) et $v$ par les $s-r$ dernières coordonnées de ${}^tQb$. donc $A^\sharp b$ est le vecteur dont les $r$ premières coordonnées sont celles de $T^{-1}u$ et les $t-r$ suivantes sont 0.

L'algorithme suivant dû à Gréville permet aussi le calculde $A^\sharp$ :

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $(s,t)$ réelle. On note $C_i$ la $i$-ème colonne de $A$ et $A_i$ la matrice $(C_1, ..., C_i)$ formée par les $i$ premières colonnes de $A$.

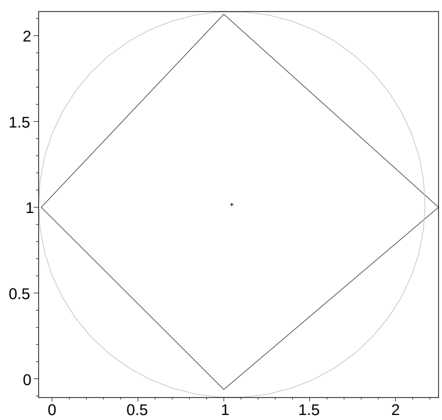
```
si C_1 = 0            alors A_1^♯ := 0
sinon                 A_1^♯ := 1/(ᵗC_1 C_1) ᵗC_1
fin si

Pour k = 2 à t        faire d_k := A_{k-1}^♯ C_k
                            c_k := C_k − A_{k-1} d_k
                            si c_k = 0 alors b_k := 1/(1+ᵗd_k d_k) ᵗd_{k-1} A_{k-1}^♯
                            sinon b_k := 1/(ᵗc_k c_k) ᵗc_k
                           fin si
```

$$A_k^\sharp := \begin{pmatrix} A_{k-1}^\sharp - d_k b_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

**5. Un exemple**

Un appareil de lecture optique permet de prendre des mesures rasantes plus ou moins exactes d'un objet circulaire dont on souhaite déterminer le centre et le rayon. Les mesures fournissent les points : $Z_1 = (9/4, 1)$, puis à 90 degrés, $Z_2 = (1, 17/8)$, puis à 180 degrés, $Z_3 = (-1/16, 1)$, puis à 270 degrés, $Z_4 = (1, -1/16)$. En cherchant à minimiser la distance entre $Z_1, ..., Z_4$ et quatre points obtenus comme images par $Z \mapsto C + RQZ$ ($C$ est le centre du cercle, $R$ son rayon et $Q$ une transformation orthogonale) des points $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, une des méthodes décrites ci-dessus permet d'obtenir que $C = \begin{pmatrix} 67/64 \\ 65/64 \end{pmatrix}$ et $R = 9/8$.



**Suggestions de développements**
*Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pourrez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre et d'une façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement conseillé que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- On pourra justifier la proposition **3**.
- On pourra proposer un algorithme qui calcule une matrice pseudo inverse.
- On pourra justifier la proposition **4**.
- On pourra justifier le théorème **1**.
- On pourra justifier précisément un ou plusieurs des algorithmes décrits dans la partie **4**.
- On pourra mettre en oeuvre l'algorithme nécessaire pour réaliser l'exemple de façon paramétrée (avec en entrée des points $Z_1, ..., Z_4$ dont les coordonnées sont des paramètres et en sortie la représentation graphique des quatre points ainsi que du cercle solution.