

(public-C1)

Résumé : On étudiera les relations entre des configurations de points sur une droite ou dans le plan et leur diagramme des distances

Mots clés : géométrie, arithmétique des polynômes

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

L'étude des ensembles finis de points (appelés aussi configurations) dans un espace euclidien est courante en astronomie, en cartographie, pour les empreintes digitales mais également en biologie. Dans ces contextes, il est par exemple important de déterminer efficacement quand deux configurations peuvent être transformées l'une en l'autre par une isométrie affine. L'idée principale du texte est d'associer à un ensemble de points son *diagramme des distances* (voir Figure 1) qui est le même pour deux ensembles de points équivalents par une isométrie affine. Nous proposons d'étudier les relations entre une configuration et son diagramme des distances dans le cas des configurations linéaires puis des configurations planes.

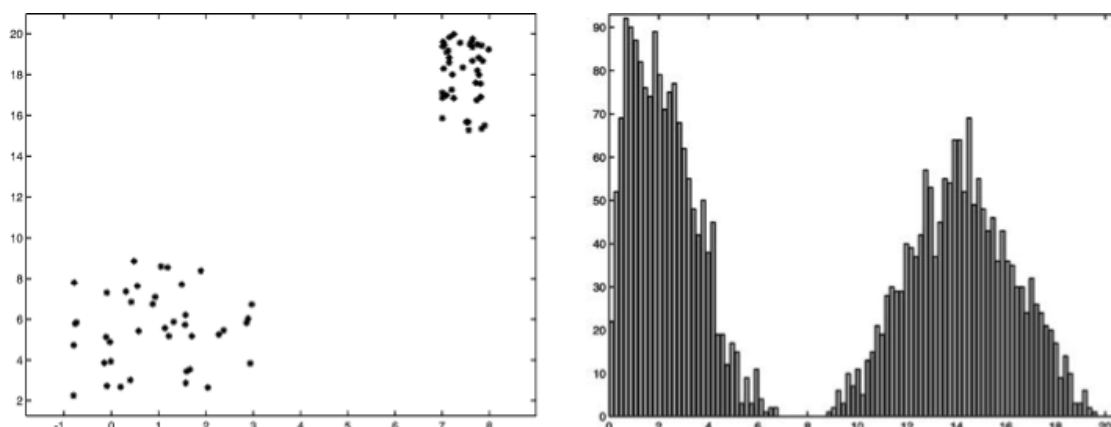


FIGURE 1. Un ensemble de points et son diagramme des distances

1. Configuration et diagramme des distances

Formalisons tout d'abord le problème mentionné dans l'introduction. Soit $m \geq 1$ et $n \geq 2$ des entiers. On munit \mathbb{R}^m de la norme euclidienne usuelle et on note $v \cdot w$ le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{R}^m . Dans la suite, en fixant une origine o , on décompose une isométrie affine en $(M, T) \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m$ où M est une isométrie vectorielle et T une translation.

Définition 1. Soient $\{p_1, \dots, p_n\}$ et $\{q_1, \dots, q_n\}$ deux ensembles de points de \mathbb{R}^m . Ces deux configurations sont dites équivalentes, s'il existe une permutation $\pi \in S_n$ (appelée renumérotation) et une isométrie affine (M, T) telles que $M\overrightarrow{op_i} + T = \overrightarrow{oq_{\pi(i)}}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Dans tout ce texte, on note $\mathcal{P} = \{\{i, j\}, 1 \leq i < j \leq n\}$. Le lemme suivant sera utile.

Lemme 1. Si $\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$ pour tout $\{i, j\} \in \mathcal{P}$ alors il existe une isométrie affine (M, T) telle que $M\overrightarrow{op_i} + T = \overrightarrow{oq_i}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. On se ramène tout d'abord à un problème purement vectoriel avec $v_i = p_{i+1} - p_1$ et $w_i = q_{i+1} - q_1$. On ne considère ici que le cas (le plus utile) où les vecteurs v_i engendrent \mathbb{R}^m (en particulier $n > m$) et on peut supposer que (v_1, \dots, v_m) est une base de \mathbb{R}^m .

Les égalités $\|v_i\| = \|w_i\|$ et $\|v_i - v_j\| = \|w_i - w_j\|$ entraînent

$$(1) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n-1\}^2, \quad v_i \cdot v_j = w_i \cdot w_j.$$

On définit alors l'homomorphisme d'espaces vectoriels M qui transforme v_i en w_i pour tout $i = 1, \dots, m$. En utilisant (1), on montre que M est une isométrie vectorielle.

Il nous reste à montrer que $Mv_j = w_j$ pour tout $j > m$. Soit $j \in \{m+1, \dots, n-1\}$. Comme M est une isométrie,

$$(2) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad v_i \cdot v_j = w_i \cdot Mv_j$$

En combinant (1) et (2) on conclut que $Mv_j = w_j$ pour tout $1 \leq j < n$. □

Étant données deux configurations, une idée naturelle (mais coûteuse lorsque n est grand) pour vérifier si elles sont équivalentes est donc d'essayer toutes les renumérotations. Il serait toutefois plus intéressant d'avoir une caractérisation de l'équivalence a priori. À une configuration $\{p_1, \dots, p_n\}$, on peut associer son *diagramme des distances* qui est le graphe de la fonction $x \mapsto \#\{\{i, j\} \in \mathcal{P}, \|p_i - p_j\| = x\}$ de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{N} . Deux ensembles équivalents ont le même diagramme des distances. Une question naturelle est d'étudier la réciproque.

Définition 2. On dit qu'une configuration $\{p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{R}^m$ est restructurable à partir de son diagramme des distances (ou simplement restructurable) si tout $\{q_1, \dots, q_n\} \in \mathbb{R}^m$ ayant le même diagramme des distances est équivalent à $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Dans la Section 3, on donnera une condition suffisante pour qu'une configuration plane soit restructurable.

2. Le cas $m = 1$

Ce cas apparaît en génomique dans ce que l'on appelle *le problème de la digestion partielle* sur des morceaux d'ADN. Des morceaux identiques d'ADN sont exposés à une enzyme en quantité limitée. L'enzyme ne peut découper les morceaux d'ADN qu'en des points particuliers que l'on identifiera à des points distincts $x_1 < \dots < x_n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Du fait de la quantité limitée du réactif, tous les morceaux ne sont pas coupés en tous ces points. En mesurant les longueurs des fragments après digestion partielle, on obtient les distances $\Delta X = (|x_i - x_j|)_{1 \leq i < j \leq n}$. Il s'agit donc de construire à partir du diagramme des distances les configurations X possibles. Nous fixerons le point $x_1 = 0$. Le nombre de configurations possibles est ainsi fini.

Une approche directe pour trouver ces configurations est de classer les distances $\Delta X = d_1 > d_2 \geq d_3 \dots \geq d_r$ avec $r = n(n-1)/2$ par ordre décroissant et de procéder comme suit. La plus longue distance correspond au point x_n . Puis pour la distance suivante, le point peut être indifféremment situé à l'abscisse correspondant à cette distance de x_1 ou par symétrie à l'abscisse correspondant à cette distance du point x_n . Après cela, il y a toujours au plus 2 possibilités pour le point suivant que l'on teste en regardant si elles conduisent ou non à une contradiction. On explore ainsi un arbre binaire.

Une autre idée est basée sur l'observation suivante.

Proposition 1. Soit $P = \sum_{i=1}^n T^{x_i} \in \mathbb{Z}[T]$ le polynôme associé de manière unique à une configuration X . On a

$$P(T)P(1/T) = n + \sum_{i=1}^r (T^{d_i} + T^{-d_i}).$$

Ainsi $Q = T^{d_1} P(T)P(1/T) \in \mathbb{Z}[T]$ est un polynôme connu que l'on factorise sur \mathbb{Z} . On en déduit alors les configurations possibles.

Exemple 1. Si l'on considère le diagramme de distances $\Delta X = (8, 7, 5, 3, 2, 1)$, avec $n = 4$, on obtient $Q = T^{16} + T^{15} + T^{13} + T^{11} + T^{10} + T^9 + 4T^8 + T^7 + T^6 + T^5 + T^3 + T + 1$. En calculant la factorisation de ce polynôme dans $\mathbb{Z}[T]$, on constate qu'il n'y a qu'une manière de le décomposer en un produit de deux polynômes de degré 8. À savoir : $Q = (T^8 + T^3 + T + 1)(T^8 + T^7 + T^5 + 1)$.

3. Le cas $m = 2$

Tous les triangles sont reconstituables à partir de leur diagramme des distances. Par contre on peut construire des ensembles de quatre points qui ne le sont pas comme l'indique la Figure 2 (en rajoutant des points sur la droite en pointillés, on peut étendre cette propriété à un nombre quelconque de points $n \geq 4$). Se pose donc la caractérisation des configurations planes qui sont reconstituables.

Le groupe des permutations S_r avec $r = n(n-1)/2$ agit sur \mathcal{P} . Pour $\sigma \in S_r$ et $\{i, j\} \in \mathcal{P}$ on note $\sigma \cdot \{i, j\}$ l'image de $\{i, j\}$ par σ . Pour que deux configurations aient le même diagramme

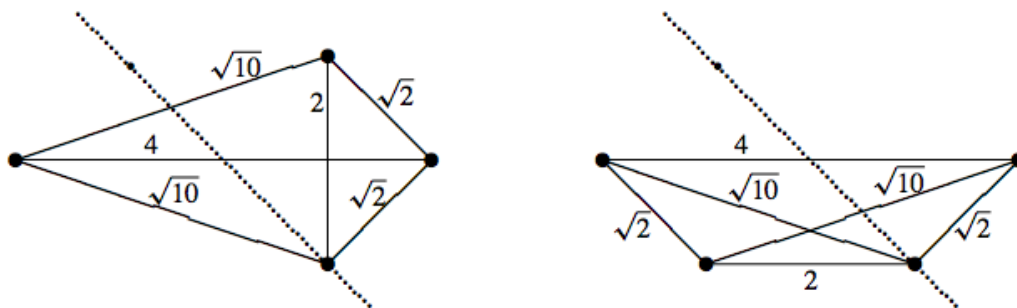


FIGURE 2. Deux configurations avec le même diagramme des distances mais non équivalentes

des distances, il faut et il suffit qu'il existe une permutation $\sigma \in S_r$ qui transforme les distances entre deux points de la première configuration en les distances entre deux points de la seconde configuration. Plus précisément, si $\{p_1, \dots, p_n\}$ et $\{q_1, \dots, q_n\}$ sont deux ensembles de points de \mathbb{R}^m et si $d_{\{i,j\}} = \|p_i - p_j\|^2$ et $d'_{\{i,j\}} = \|q_i - q_j\|^2$ alors ces deux configurations ont le même diagramme des distances si et seulement s'il existe $\sigma \in S_r$ telle que

$$d_{\sigma \cdot \{i,j\}} = d'_{\{i,j\}}, \quad \forall \{i,j\} \in \mathcal{P}.$$

Dans l'ensemble S_r , certaines permutations correspondent à une renumérotation des points : σ est une renumérotation des points s'il existe une permutation $\pi \in S_n$ des indices telle que $\sigma \cdot \{i,j\} = \{\pi(i), \pi(j)\}$ pour tout $\{i,j\} \in \mathcal{P}$. D'après le lemme 1, ces permutations sont les bonnes permutations car si une renumérotation existe, les deux configurations sont équivalentes. Le lemme suivant montre en quelque sorte que les renumérotations sont les permutations qui préservent un sommet commun.

Lemme 2. *Supposons $n \neq 4$. Une permutation $\sigma \in S_r$ est une renumérotation si et seulement si pour tous les indices $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ distincts deux à deux on a*

$$(3) \quad \sigma \cdot \{i,j\} \cap \sigma \cdot \{i,k\} \neq \emptyset.$$

Démonstration. Le lemme est vrai pour $n \leq 3$ et toute renumérotation satisfait (3). On suppose $n \geq 5$ et soit $\sigma \in S_r$ satisfaisant (3). En utilisant l'injectivité de σ , on montre tout d'abord que pour tout $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ deux à deux distincts, on a

$$\sigma \cdot \{i,j\} \cap \sigma \cdot \{i,k\} \cap \sigma \cdot \{i,l\} \neq \emptyset.$$

Ceci permet alors de définir une application $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ de la manière suivante. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a d'après ce qui précède que $\cap_{j \neq i} \sigma \cdot \{i,j\}$ est réduit à un seul élément que l'on note $\pi(i)$.

Il reste à montrer que π est bien la renumérotation recherchée. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit $M_i = \{\{i,j\}, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\}$. Par définition de π , on a que l'image par σ des éléments de M_i est incluse dans $M_{\pi(i)}$ et on a donc égalité de ces deux ensembles. En considérant deux indices i et i' distincts, on en déduit alors l'injectivité de π .

Finalement, par définition de π , on peut écrire pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts $\sigma \cdot \{i, j\} = \{\pi(i), \pi(j)\}$, pour un certain $j' \in \{1, \dots, n\}$. En échangeant les rôles de i et de j , on en conclut que $\sigma \cdot \{i, j\} = \{\pi(i), \pi(j)\}$ comme désiré. \square

Nous étudions ici une condition suffisante de reconstructibilité dans le cas du plan. Soit p_i, p_j, p_k et p_l quatre points distincts du plan. On a la relation suivante entre les carrés des distances

$$\begin{vmatrix} -2d_{\{i,l\}} & d_{\{i,j\}} - d_{\{i,l\}} - d_{\{j,l\}} & d_{\{i,k\}} - d_{\{i,l\}} - d_{\{k,l\}} \\ d_{\{i,j\}} - d_{\{i,l\}} - d_{\{j,l\}} & -2d_{\{j,l\}} & d_{\{j,k\}} - d_{\{j,l\}} - d_{\{k,l\}} \\ d_{\{i,k\}} - d_{\{i,l\}} - d_{\{k,l\}} & d_{\{j,k\}} - d_{\{j,l\}} - d_{\{k,l\}} & -2d_{\{k,l\}} \end{vmatrix} = 0.$$

Autrement dit, si on note

$$\begin{aligned} g = & 2U^2Z + 2UVX - 2UVY - 2UVZ - 2UXW - 2UXZ + 2UYW - \\ & 2UYZ - 2UWZ + 2UZ^2 + 2V^2Y - 2VXY - 2VXW + 2VY^2 - 2VYW - \\ & 2VYZ + 2VWZ + 2X^2W - 2XYW + 2XYZ + 2XW^2 - 2XWZ, \end{aligned}$$

on a

$$(4) \quad g(d_{\{i,j\}}, d_{\{i,k\}}, d_{\{i,l\}}, d_{\{j,k\}}, d_{\{j,l\}}, d_{\{k,l\}}) = 0.$$

On obtient ainsi le théorème suivant.

Théorème 1. Soit $n \geq 5$ et $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$ distincts. Supposons que pour tout choix d'indices

$$i_0, i_1, i_2, j_1, j_2, k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2 \in \{1, \dots, n\}$$

tel que les paires

$$\{i_0, i_1\}, \{i_0, i_2\}, \{j_1, j_2\}, \{k_1, k_2\}, \{l_1, l_2\}, \{m_1, m_2\}$$

soient distinctes, on ait

$$(5) \quad g(d_{\{i_0, i_1\}}, d_{\{j_1, j_2\}}, d_{\{k_1, k_2\}}, d_{\{l_1, l_2\}}, d_{\{m_1, m_2\}}, d_{\{i_0, i_2\}}) \neq 0.$$

Alors $\{p_1, \dots, p_n\}$ est reconstructible à partir de son diagramme des distances.

Démonstration. Soit $\{q_1, \dots, q_n\}$ une configuration avec le même diagramme des distances que $\{p_1, \dots, p_n\}$ et soit $d'_{\{i,j\}} = \|q_i - q_j\|^2$. Il existe une permutation $\sigma \in S_r$ telle que

$$d'_{\{i,j\}} = d_{\sigma \cdot \{i,j\}}.$$

On va montrer que σ^{-1} est une renumérotation et ce sera donc le cas pour σ également. On pourra alors conclure en utilisant le lemme 1.

Soient donc $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ des indices deux à deux distincts. L'équation (4) implique que

$$g(d_{\sigma \cdot \{i,j\}}, d_{\sigma \cdot \{i,k\}}, d_{\sigma \cdot \{i,l\}}, d_{\sigma \cdot \{j,k\}}, d_{\sigma \cdot \{j,l\}}, d_{\sigma \cdot \{k,l\}}) = g(d'_{\{i,j\}}, d'_{\{i,k\}}, d'_{\{i,l\}}, d'_{\{j,k\}}, d'_{\{j,l\}}, d'_{\{k,l\}}) = 0.$$

En utilisant l'hypothèse (5), on en déduit alors que $\sigma \cdot \{i, j\}$ et $\sigma \cdot \{k, l\}$ sont disjoints. Par contraposée, on a donc que si $\sigma \cdot \{i, j\}$ et $\sigma \cdot \{k, l\}$ ont une intersection non vide alors il en est de même pour $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$. Ceci permet alors de montrer que (3) est vérifié pour σ^{-1} et qu'il s'agit donc d'une renumérotation. \square

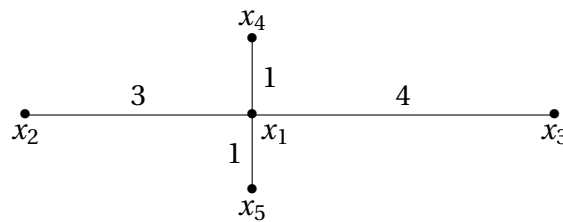


FIGURE 3. Configuration reconstructible pour laquelle (5) échoue

On a ainsi un test pour vérifier qu'une configuration est reconstructible qui demande $O(n^{11})$ vérifications de la condition (5). Il est à noter qu'il existe des configurations reconstructibles (telles la Figure 3) pour lesquelles au moins une de ces vérifications échoue (mais elles sont "rares").

Suggestions et pistes de réflexion

► *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

- On pourra donner le diagramme des distances des sommets de l'hexagone régulier.
- On pourra détailler les preuves des différents énoncés du texte.
- On pourra détailler sur l'exemple suivant comment fonctionne l'approche directe de la section 2

$$\Delta X = (8, 7, 5, 3, 2, 1).$$

- En utilisant la Proposition 1 et ce qui suit, on pourra trouver toutes les configurations possibles (à l'aide de l'outil informatique) pour les diagrammes des distances :

$$\Delta X = (11, 10, 8, 7, 7, 7, 6, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 1)$$

$$\Delta X = (17, 16, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$$

- On pourra préciser le nombre de vérifications en $O(n^{11})$.
- On pourra préciser la remarque finale sur la Figure 3.