Feuille n° 5

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2\,x - 5}\ ; \quad h(x) = \ln(4\,x+3)$$

Exercice 2. Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1)$

d. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$

Exercice 4.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $g(0) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right).$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$.

Exercice 5.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

a. Montrer que

$$\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

b. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a, x_0 = b, x_0 \in]a,b[$. [*Indication : dans le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$*].

c. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $g(x) = 1$ si $x = 1$. Montrer que

$$\sup_{0<x<1} g(x) \neq \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$

Quelle hypothèse essentielle du **b** nous manque-il ici ?

Exercice 6.

Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = (\sin x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 7.

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer l'implication : (f dérivable)$\Rightarrow$ (f continue). Que dire de la réciproque ?

Exercice 8.

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \ \text{ si } x \neq 1 \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 9.

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \ \text{ et } \ f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10.

Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Exercice 11. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

a. **(i)** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

(ii) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.

b. **(i)** En déduire l'inégalité suivante :

$$(1 + x)^n \leqslant 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(ii) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x + y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$