# Feuille n° 2 (Ensembles de nombres)

## I. ENTIERS NATURELS ET RELATIFS

**Exercice 1.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Exercice 2.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3,$$

et en déduire la valeur de cette dernière somme.

**Exercice 3.** Montrer pour tout $n \geqslant 2$ l'identité

$$2^{n-1} \cos\frac{\pi}{2^2} \times \cos\frac{\pi}{2^3} \times \cdots \times \cos\frac{\pi}{2^n} \times \sin\frac{\pi}{2^n} = 1.$$

**Exercice 4.** Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, c'est à dire $n < p \Rightarrow \varphi(n) < \varphi(p)$. Montrer par récurrence que l'on a : $\varphi(n) \geqslant \varphi(0) + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 5.** Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, 7 divise le nombre $3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

**Exercice 6.** Calculer le pgcd de 10102 et 99. Soit $d$ le pgcd obtenu. Trouver $u$ et $v$ appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que :

$$10102u + 99v = d.$$

**Exercice 7.** Soient deux entiers naturels $a$ et $b$ ($a \geqslant b > 0$) et $r$ le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$. Démontrer que $2r < a$.

**Exercice 8.** Soit $n$ un élément de $\mathbb{Z}$ et $a$ et $b$ deux élément de $\mathbb{N}^*$. Soient $q$ le quotient dans la division euclidienne de $n$ par $a$ et $q'$ celui de $q$ par $b$. Montrer que $q'$ est aussi le quotient de $n$ par le produit $ab$.

**Exercice 9.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $2n^2 + 2n$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur pgcd est 1.

**Exercice 10.** Déterminer les entiers $n$ appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $\mathrm{pgcd}(3n+1, 2n) = 1$.

**Exercice 11.** On considère l'équation :

$$29x + 11y = 1, \quad (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \tag{1}$$

**a.** Ecrire l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 29 et 11.

**b.** En déduire une solution particulière de (1), puis l'ensemble des solutions.

**c.** Déduire de ce qui précède une solution particulière, puis l'ensemble des solutions de l'équation :

$$29x + 11y = 5, \quad (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

# II. NOMBRES RÉELS

**Exercice 12.** Déterminer l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes :

$$a)\ \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = 0 \qquad b)\ (x^2 - 1)^2 > 1 \qquad c)\ \cos(2x) = -\frac{1}{2} \qquad d)\ 2 < |3x + 2| \leqslant 5.$$

**Exercice 13.** Pour chacun des ensembles $A, B, C$ suivants

$$A = \{0, 2, 3, 4\}\,, \qquad B = [0, 2], \qquad C = ]0, 1], \qquad D = ]-2, 3] \cup [4, 5[.$$

dire

- S'ils sont majorés ou minorés.
- S'ils ont un plus grand ou un plus petit élément. Si oui, les préciser.
- S'ils ont une borne supérieure ou une borne inférieure. Si oui, les préciser.

**Exercice 14.** Etudier l'existence des bornes inférieures et supérieure des ensembles suivants. Les déterminer si elles existent et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ y \in \mathbb{R} \colon \exists x \in ]1, 3], y = \frac{1}{x} \right\}, \\ B &= \left\{ z \in \mathbb{R} \colon \exists n \in \mathbb{N}, z = n^2 + 1 \right\}, \\ C &= \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \exists n \in \mathbb{N}^*, x = 1 - \frac{1}{n} \right\}. \end{aligned}$$

**Exercice 15.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides, minorées et majorées de $\mathbb{R}$.

**a.** Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

**b.** Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et que $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

**c.** Montrer que si $A \cap B$ est non vide, cet ensemble admet une borne supérieure et une borne inférieure et que l'on a les inégalités :

$$\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}\,.$$

Donner un exemple où les inégalités sont strictes.