ANNÉE 2006-2007 SESSION DE JANVIER 2007

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 5/01/2007 Durée : 3h00

Texte (*en italiques*) et corrigé détaillé (en roman)

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Question I (14 pts)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$$

(on convient, pour toute partie C de E, de noter $E \setminus C$ le complémentaire de C dans E).

Dire qu'un élément x de E n'est pas dans $A \cap B$ équivaut à dire que soit il n'est pas dans A, soit il n'est pas dans B. On a en effet la tautologie $\text{non}[P \wedge Q] = (\text{non}\, P) \vee (\text{non}\, Q)$ (cours). On a donc bien l'égalité ensembliste

$$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)\,.$$

Série de questions II (31 pts)

On considère dans cette série de questions l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2\,x_2$ pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$.

II.a (6+4+3=6) *Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit surjective de E dans F ? Montrer que l'application f donnée ici est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout nombre réel y, on a l'inégalité $y + |y| \geq 0$; montrer enfin que l'application $g\ : y \in \mathbb{R} \longmapsto (\sqrt{y + |y|}, |y|/2)$ est telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.*

Une application $f\ : E \longmapsto F$ est surjective si et seulement si

$$\forall Y \in F\,,\ \exists X \in E\,,\ Y = f(X)\,.$$

On remarque ici que si $y \in \mathbb{R}$,

$$f((0, -y/2)) = 0 - 2(-y/2) = y\,,$$

ce qui prouve bien que le couple $(0, -y/2)$ est un antécédent pour y ; l'application f est donc surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On a par définition $|y| = \sup(y, -y)$, en particulier donc $|y| \geq -y$, soit $|y| + y \geq 0$ pour tout nombre réel y.
L'application g est bien définie sur $\mathbb{R}$ à cause de ce qui précède et on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = (\sqrt{|y| + y})^2 - 2|y|/2 = y + |y| - |y| = y = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(y)\,.$$

II.b (6+6) *Que signifie le fait qu'une application d'un ensemble E dans un ensemble F soit injective de E dans F ? L'application f donnée ici est-elle injective comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?*
Une application $f\ : E \longmapsto F$ est injective si et seulement si

$$\forall X_1, X_2 \in E\,,\ f(X_1) = f(X_2) \Longrightarrow X_1 = X_2\,.$$

Ici $f((x,y)) = f((-x,y)) = x^2 - 2y$ pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$; comme $(x,y) \neq (-x,y)$ dès que $x \neq 0$, l'application f n'est pas injective comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

<u>Série de questions III (25 pts)</u>

III.a (7+6) *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ ainsi que les symboles mathématiques $\leq, >, \in$, exprimer les deux assertions :*
– « a est un majorant de A »
– « a n'est pas un majorant de A ».
Dire que a est un majorant de A s'écrit

$$\forall x \in A\,,\ x \leq a\,.$$

La négation de cette assertion (« a n'est pas un majorant de A ») s'écrit

$$\exists x \in A \,\text{tel que}\ x > a\,.$$

III.b (7+5) *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et a un majorant de A ; en utilisant les quantificateurs $\forall, \exists$ et les symboles $\leq, <, >, \in$, exprimer les deux assertions :*
– « a est la borne supérieure de A »
– « a n'est pas la borne supérieure de A ».
Dire que a est la borne supérieure de A (lorsque a est supposé être un majorant) s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0\, \exists x \in A \ \text{tel que}\ \ a - \epsilon < x \leq a\,.$$

La négation de cette assertion (« a n'est pas la borne supérieure de A ») s'écrit donc

$$\exists \epsilon > 0 \, , \; \forall x \in A \, , \; x \leq a - \epsilon$$

(a est ici supposé être un majorant de A, ce qui fait que les propriétés $x > a$ et $x \in A$ sont incompatibles).

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1 (21 pts)

Soient a et n des éléments de $\mathbb{N}$. On suppose $a \geq 2$ et $n \geq 1$.

1.a (6) *Montrer que les nombres entiers a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux.*

Si d est un entier divisant a et $a^n - 1$, d divise a^n (car d divise a) et $a^n - 1$, donc d divise $a^n - (a^n - 1) = 1$. Or les seuls diviseurs de 1 dans $\mathbb{Z}$ sont ± 1, donc $d = 1$ si $d > 0$. Le PGCD de a et $a^n - 1$ vaut donc 1, ce qui prouve que a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux.

1.b (6) *Montrer l'égalité $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$; en déduire que $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ et a^n sont des nombres entiers premiers entre eux.*

On a, en développant :

$$\begin{aligned} (a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1}) &= a + a^2 + \cdots + a^n - (1 + a + \cdots + a^{n-1}) \\ &= a^n - 1 \, . \end{aligned}$$

Si $d \in \mathbb{N}^*$ divise a et $1 + a + \cdots + a^{n-1}$, d divise a et $a^n - 1$ (puisque $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ divise $a^n - 1$). Comme a et $a^n - 1$ sont premiers entre eux, $d = 1$. Le PGCD de a et $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ vaut donc 1 et ces deux nombres sont bien premiers entre eux.

1.c (3 + 6) *On considère l'équation*

$$6x + 215y = 1 \; ; \qquad (E)$$

- *Après avoir vérifié que $215 = 6^3 - 1$, justifier (sans calcul) pourquoi il existe au moins un couple d'entiers relatifs (x, y) satisfaisant (E) ;*
- *déterminer tous les couples d'entiers relatifs qui satisfont (E).*

La formule $215 = 6^3 - 1$ est immédiate car $6^3 = 216$. Si l'on pose donc $a = 6$, on sait d'après le **1.a** que $a^3 - 1 = 215$ et $a = 6$ sont premiers entre eux ; il existe donc, d'après l'identité de Bézout, un couple d'entiers (x_0, y_0) tel que $6x_0 + 215y_0 = 1$. On remarque d'ailleurs immédiatement que

$(x_0, y_0) = (36, -1)$ convient. D'après le cours (et le lemme de Gauss), toutes les solutions de l'équation (E) sont les couples d'entiers (x, y) de la forme

$$(36 + 215k, -1 - 6k)\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

<u>Exercice 2 (18 pts).</u>

2.a. (6) *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $Z^2 - iZ + 2 = 0$.*

On a

$$\Delta = (-i)^2 - 4 \times 2 = -9 = (\pm 3i)^2\,.$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{i - 3i}{2} = -i = e^{-i\pi/2} \\ z_2 &= \frac{i + 3i}{2} = 2i = 2e^{i\pi/2}\,. \end{aligned}$$

2.b (6) *Déduire de* **2.a** *les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ (on donnera ces solutions sous forme polaire $z = re^{i\theta}$ en précisant les valeurs de r et θ).*

On remarque que

$$(z^6 - iz^3 + 2 = 0) \Longleftrightarrow \Big[(Z = z^3) \wedge (Z^2 - iZ + 2 = 0)\Big]\,.$$

Les racines de $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ s'obtiennent donc en résolvant les équations

$$z^3 = -i = e^{-i\pi/2} \qquad (1)$$

et

$$z^3 = 2i = 2e^{i\pi/2} \qquad (2)\,.$$

Les racines de l'équation (1) ont pour module $r = 1$ et pour arguments

$$-\pi/6\,,\ -\pi/6 + 2\pi/3 = \pi/2,\ -\pi/6 + 4\pi/3 = 7\pi/6\,.$$

Ce sont les trois nombres complexes $e^{-i\pi/6}, i, e^{7i\pi/6}$. Les racines de l'équation (2) ont pour module $r = 2^{1/3}$ et pour arguments

$$\pi/6\,,\ \pi/6 + 2\pi/3 = 5\pi/6,\ \pi/6 + 4\pi/3 = 3\pi/2\,.$$

Ce sont les trois nombres complexes $2^{1/3}e^{i\pi/6}, 2^{1/3}e^{5i\pi/6}, -2^{1/3}i$.

2.c (6) *Placer sur un dessin propre tous les points* (a, b) *du plan tels que* $a + ib$ *soit une solution de* $z^6 - iz^3 + 2 = 0$.

On se reporte à la figure ci-dessous, où les trois racines de $z^3 = -i$ ont été marquées par des ronds, les trois racines de $z^3 = 2i$ par des croix.

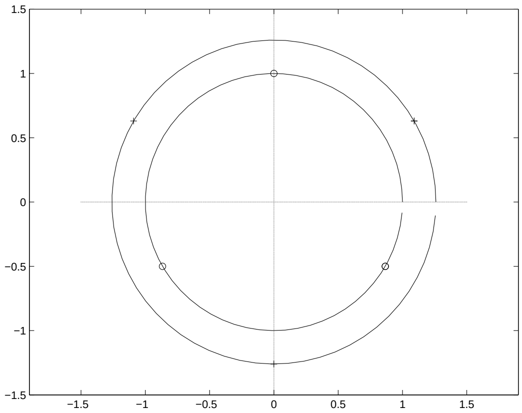

FIGURE 1 – Les 6 racines de l'équation $z^6 - iz^3 + 2 = 0$

<u>Exercice 3 (24 pts)</u>

3.a (6) *En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 34 et 21.*

On a

$$\begin{array}{rcl} 34 & = & 21 \times 1 + 13 \\ 21 & = & 13 \times 1 + 8 \\ 13 & = & 8 \times 1 + 5 \\ 8 & = & 5 \times 1 + 3 \\ 5 & = & 3 \times 1 + 2 \\ 3 & = & 2 \times 1 + 1 \\ 2 & = & 2 \times 1 + 0\,. \end{array}$$

Le dernier reste non nul dans cette suite de divisions euclidiennes vaut 1, donc PGCD(34,21)=1.

3.b (5 + 6 + 4) *On définit la suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par récurrence :* $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ *et*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

– *Rappeler le principe du raisonnement par récurrence et montrer, en appliquant ce principe, que* $F_n \in \mathbb{N}$ *pour tout* n.
– *Montrer que pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$, d *est un diviseur commun de* F_n *et* F_{n+1} *si et seulement si* d *est un diviseur commun de* F_{n+1} *et* F_{n+2} *; en déduire que* $\mathrm{PGCD}\,(F_{n+2}, F_{n+1}) = \mathrm{PGCD}\,(F_{n+1}, F_n)$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.
– *Déduire de ce qui précède que deux termes consécutifs de la suite* $(F_n)_{n\geq 0}$ *sont toujours premiers entre eux.*

Le principe (ici le second principe en fait) du raisonnement par récurrence est le suivant : supposons que l'on veuille démontrer qu'une assertion (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$. On commence à vérifier que (P_{n_0}) est vraie, puis l'on démontre :

$$\Big((P_k) \text{ vraie pour } k = n_0, ..., n\Big) \Longrightarrow \Big((P_{n+1}) \text{ est vraie}\Big).$$

Alors (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.
Ici, on doit montrer par récurrence la propriété $F_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 0$ ((P_n) vraie dans notre cas se lit « $F_n \in \mathbb{N}$ »). En fait, on sait que $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, donc la propriété (P_n) est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. D'autre part, pour $n \geq 1$, on a (d'après la relation de récurrence écrite avec $n-1$ à la place de n)

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n\,.$$

Si $F_k \in \mathbb{N}$ pour $k = 0, 1, ..., n$, alors F_n et F_{n-1} sont des entiers positifs, donc F_{n+1} aussi (comme somme de deux entiers positifs) et la propriété est donc bien vérifiée au cran $n+1$. L'assertion « $F_n \in \mathbb{N}$ »est donc bien ainsi démontrée par récurrence.

Si d divise F_n et F_{n+1}, d divise leur somme, soit F_{n+2}, donc divise aussi F_{n+1} et F_{n+2}. Si d divise F_{n+1} et F_{n+2}, d divise leur différence, soit $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d est un diviseur commun de F_n et F_{n+1} si et seulement si d est un diviseur commun de F_{n+1} et F_{n+2}. Les ensembles des diviseurs communs de F_n et F_{n+1} et de F_{n+1} et F_{n+2} sont donc les mêmes. Ces deux ensembles ont donc même plus grand élément, ce qui implique $\mathrm{PGCD}(F_n, F_{n+1}) = \mathrm{PGCD}(F_{n+1}, F_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par récurrence sur n, on voit que, pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{PGCD}(F_n, F_{n+1}) = 1$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$ (car 1 et 2 sont premiers entre eux). Si elle est vraie au cran n (F_n et F_{n+1} premiers entre eux), elle l'est au cran $n+1$ car

$$\mathrm{PGCD}(F_{n+1}, F_{n+2}) = \mathrm{PGCD}(F_n, F_{n+1}) = 1\,.$$

Donc la propriété « F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux »est vraie pour tout entier $n \geq 0$. Deux termes consécutifs de la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ sont donc toujours premiers entre eux.

<u>Exercice 4 (22 pts)</u>

On désigne par « $\log$ »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « $\ln$ ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. Soit la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+2) & -2 < x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ e^x & 0 < x \end{cases}$$

- **(4)** *Etudier ses limites en -2 et $+\infty$;*
- **(6)** *Montrer que f est continue sur I;*
- **(6)** *Montrer que f est dérivable sur I;*
- **(6)** *Etudier les variations de f et tracer son graphe.*

On a $\lim\limits_{X\to 0, X>0} \log X = -\infty$, donc

$$\lim_{x\to -2, x>-2} \log(x+2) = -\infty\,.$$

La limite de f lorsque x tend vers -2 (par valeurs supérieures bien sûr) vaut donc $-\infty$. Pour x tendant vers $+\infty$, on a $f(x) = e^x$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,.$$

La fonction f est continue sur $]-2,-1[$ (comme composée de deux fonctions continues puisque log est continue sur $]0,+\infty[$), sur $[-1,0]$ (car $x \longmapsto x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$) et sur $]0,+\infty[$ (car exp est continue sur $\mathbb{R}$). Pour montrer la continuité de f, il faut vérifier la continuité aux points -1 et 0, en fait uniquement la continuité à gauche en -1 et à droite en 0. Or

$$\lim_{x\to -1, x<-1} f(x) = \lim_{x\to -1, x<-1} \log(x+2) = \log 1 = 0 = f(-1)$$

car log est continue en 1. De même

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

car exp est continue en 0. La fonction f est donc bien continue en $x = -1$ et $x = 0$; comme elle était continue en tout autre point de $]-2, +\infty[$, elle est continue sur cet intervalle.

La fonction f est dérivable sur $]-2, -1[$ (comme composée de deux fonctions dérivable puisque log est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $X \longmapsto 1/X$), sur $]-1, 0[$ (car $x \longmapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \longmapsto 1$) et sur $]0, +\infty[$ (car exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée exp). Pour montrer la dérivabilité de f, il faut vérifier la dérivabilité aux points -1 et 0, en fait uniquement dérivabilité ̀gauche en -1 et à droite en 0 et le fait que $f'_g(-1) = f'_d(0) = 1$. Or

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1, x<-1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} &= \lim_{x\to -1, x<-1} \frac{\log(x+2) - \log 1}{x+1} \\
&= (\log(x+2))'(-1) = \left[\frac{1}{x+2}\right]_{x=-1} = 1 = f'_d(-1)
\end{aligned}$$

car log est dérivable en 1, de nombre dérivé 1. De même

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

car exp est dérivable en 0, de nombre dérivé 1. La fonction f est donc bien dérivable en $x = -1$ et $x = 0$ (car il y a « raccord »des dérivées à gauche et à droite en ces deux points) ; comme elle était dérivable en tout autre point de $]-2, +\infty[$, elle est dérivable sur cet intervalle.

La fonction f a une dérivée positive (strictement) en tout point de $]2, +\infty[$, car

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}$$

pour $x \in]-2, -1[$, $f'(x) = 1$ sur $[-1, 0]$, $f'(x) = e^x$ sur $]0, +\infty[$. Le graphe de la fonction f est tangent à la droite $y = x + 1$ aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$, se confond avec cette droite au dessus de $[-1, 0]$, présente une asymptote verticale en $x = -2$ et une branche parabolique (regardant vers l'axe des $y > 0$) du type « exponentielle »lorsque x tend vers $+\infty$ (voir la figure ci-dessous).

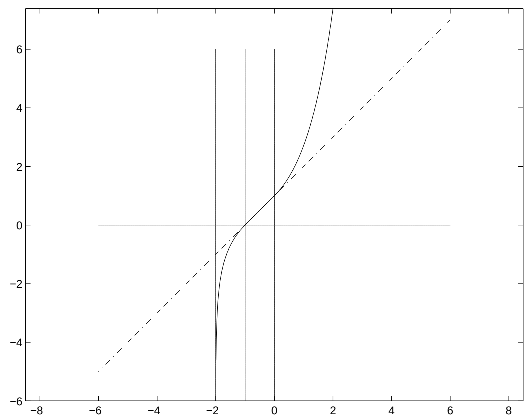

FIGURE 2 – Le graphe de f, sa tangente en $(-1, 0)$ et $(0, 1)$, l'asymptote en $t = -2$

<u>Exercice 5 (50 pts)</u>

5.a (5) *On désigne par « $\log$ »la fonction logarithme néperien (aussi notée au lycée « $\ln$ ») et par e^t l'exponentielle du nombre réel t. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^t + 1}$, transformer l'intégrale*

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t + 1}\, dt$$

en l'intégrale sur un intervalle que l'on précisera d'une certaine fraction rationnelle.

On suit le changement de variables proposé et on applique la formule de changement de variable. On a $e^t + 1 = u^2$, donc $e^t dt = 2udu$, ou encore $(u^2 - 1)dt = 2udu$. Si $t = \log 3$, $u = \sqrt{4} = 2$, tandis que si $t = \log 8$, $u = \sqrt{9} = 3$. Une fois le changement des bornes effectué (il ne faut pas l'oublier !), on trouve

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t + 1}\, dt = \int_2^3 u \times \frac{2udu}{u^2 - 1} = \int_2^3 \frac{2u^2}{u^2 - 1}\, du\,.$$

C'est la forme voulue car

$$X \longmapsto F(X) := \frac{2X^2}{X^2 - 1}$$

est bien une fraction rationnelle.

5.b (5+5) *Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b uniques (que l'on calculera) telles que*

$$\forall u > 1\,,\ \frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1}\,;$$

déduire de ce résultat (combiné avec celui de **5.a***) la valeur numérique de l'intégrale*

$$\int_{\log 3}^{\log 8} \sqrt{e^t+1}\, dt\,.$$

On cherche a et b par simple identification :

$$\frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} = \frac{(a+b)u + (a-b)}{u^2-1}\,.$$

Il convient donc de prendre $a+b=0$ et $a-b=1$, soit $a=1/2$ et $b=-1/2$. Comme il s'agit d'un système de Cramer (deux équations, deux inconnues, avec déterminant non nul), la solution (a,b) ainsi trouvée est unique et on a :

$$\frac{2u^2}{u^2-1} = 2 + \frac{2}{u^2-1} = 2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,.$$

En intégrant entre 2 et 3, il vient

$$\int_2^3 \frac{2u^2}{u^2-1} = 2+\log 2-\log 1-(\log 4-\log 3) = 2+\log 3-\log 2 = 2+\log(3/2)$$

(une primitive de $u \longmapsto (u\pm 1)^{-1}$ étant $\log|u\pm 1| = \log(u\pm 1)$ sur $]1,+\infty[$).

5.c (5) *Exprimer à l'aide des fonctions classiques (logarithme, radicaux, exponentielle) la primitive F (sur $\mathbb{R}$) de la fonction*

$$t\in\mathbb{R} \longmapsto \sqrt{e^t+1}$$

qui vérifie $F(0)=0$.

Cette primitive F s'éxprime sous la forme

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \sqrt{e^t+1}\,dt = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{u^2}{u^2-1}\,du \\
&= 2(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{2}) + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{du}{u-1} - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{du}{u+1} \\
&= 2(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{2}) + \log\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}
\end{aligned}$$

(le calcul a été fait ici en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^t + 1}$, les nouvelles bornes devenant $\sqrt{2}$ et $\sqrt{e^x + 1}$ lorsque t vaut respectivement 0 et x). On s'est inspiré du calcul conduit dans la question **5.b**.

5.d (3+3+3+4) *Calculer les limites lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big)$$

et en déduire les limites de la fonction F lorsque x tend vers $-\infty$ et x tend vers $+\infty$; justifier pourquoi F réalise une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a, de par les opérations sur les limites (composition, quotient) et le fait que $\lim_{-\infty} e^x = 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} = \frac{0}{2} = 0\,;$$

par conséquent, puisque $\log X$ tend vers $-\infty$ lorsque X tend vers 0 par valeurs positives,

$$\lim_{x \to -\infty} \log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big) = -\infty\,.$$

Si x tend vers $+\infty$, on peut écrire (en divisant numérateur et dénominateur par $e^{x/2}$)

$$\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} = \frac{\sqrt{1+e^{-x}}-e^{-x/2}}{\sqrt{1+e^{-x}}+e^{-x/2}}\,,$$

et, en utilisant les opérations sur les limites (composition, quotient) et le fait que $\lim_{+\infty} e^{-x} = \lim_{+\infty} e^{-x/2} = 0$, on voit que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} = 1\,.$$

Comme log est continue (et nulle) en $X = 1$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \log\Big(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\Big) = 0\,.$$

La fonction F est strictement croissante (car de dérivée $x \longmapsto \sqrt{e^x+1}$) et est égale à

$$F(x) = 2\sqrt{e^x+1} + \log\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C\,,$$

où C est une certaine constante (voir le **5.c**). On a donc

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 2 + (-\infty) + C = -\infty$$

d'après les théorèmes sur les limites. Mais on a aussi

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty + 0 + C = +\infty$$

car $\lim_{+\infty} \sqrt{e^x + 1} = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, F est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car elle peut prendre des valeurs arbitrairement petites et arbitrairement grandes puisqu'elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$). D'autre part, comme F est strictement croissante (car sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$), elle est injective. F réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5.e (4+5+2) *Justifier pourquoi l'application réciproque F^{-1} est dérivable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et montrer que la fonction $y = F^{-1}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre :*

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{y(x)} + 1}}, \ x \in \mathbb{R}; \qquad (*)$$

cette équation différentielle $(*)$ est-elle une équation linéaire du premier ordre ?

L'application F est dérivable, strictement monotone, et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, l'application réciproque F^{-1} est dérivable et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{e^{F^{-1}(x)} + 1}},$$

ce qui montre que $y = F^{-1}$ est bien solution de l'équation différentielle $(*)$. Cette équation est bien du premier ordre (elle ne fait apparaître que la première dérivée), mais elle n'est pas linéaire (car le second membre n'est pas de la forme $a(x)y(x) + b(x)$).

5.f (6) *Trouver l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{y(x)}{4}\Big), \ x \in \mathbb{R}, \qquad (**)$$

qui vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 0$ [1].

L'équation (**) est une équation linéaire du premier ordre, de la forme $y' = a(x)y + b(x)$. La solution générale de l'équation homogène

$$y'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}y(x)$$

est

$$y(x) = C\exp(-\frac{1}{4\sqrt{2}}x)\,,$$

où C est une constante arbitraire. En faisant varier cette constante pour chercher une solution particulière sous la forme

$$y(x) = C(x)\exp\Big(-\frac{1}{4\sqrt{2}}x\Big)\,,$$

on trouve que y sera solution de l'équation $(**)$ dès que

$$C'(x)\exp(-\frac{1}{4\sqrt{2}}x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

On trouve que le choix de

$$C(x) = 4\exp\Big(\frac{x}{4\sqrt{2}}\Big)$$

convient, donc que $y(x) \equiv 4$ est une solution particulière de $(**)$. La solution générale de $(**)$ est donc

$$y(x) = C\exp\Big(-\frac{1}{4\sqrt{2}}x\Big) + 4$$

et, pour que la fonction y soit nulle en 0, il faut choisir la constante $C = -4$. La solution y cherchée est donc

$$y(x) = 4\Big(1 - \exp\Big(-\frac{x}{4\sqrt{2}}\Big)\Big)\,.$$

1. Cette dernière question peut être traitée tout-à-fait indépendamment des précédentes ; pour information, l'équation différentielle $(**)$ réalise une version « approchée »de l'équation différentielle $(*)$.

Exercice 6.

6.a (5+5+5) *Soient A et B deux paramètres réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle homogène du second ordre :*

$$A\,y''(t) + B\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,. \tag{$\dagger$}$$

Quelle inégalité doivent vérifier les paramètres réels strictement positifs A et B pour que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle ($\dagger$) soient toutes de la forme $t \longmapsto e^{-\lambda t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))$, où λ et ω sont des constantes strictement positives, C_1, C_2 des constantes réelles ; donner dans ce cas en fonction de A et B les valeurs des constantes λ et ω. Que se passe-t-il lorsque l'inégalité en question n'est plus satisfaite ?

La condition pour que les solutions de ($\dagger$) soient de la forme

$$y(t) = e^{-\lambda t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))\,,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes, est que l'équation caractéristique

$$AX^2 + BX + 1 = 0$$

ait deux racines complexes conjuguées distinctes, ce qui est réalisé si et seulement si

$$\Delta = B^2 - 4A < 0\,.$$

Dans ce cas, les solutions sont de la forme voulue si l'on pose

$$\lambda = \frac{B}{2A}\,,\ \ \omega = \frac{\sqrt{4A - B^2}}{2A}\,.$$

Si l'on a $\Delta > 0$, les solutions sont de la forme

$$y(t) = C_1\exp(r_1 t) + C_2\exp(r_2 t)\,,$$

où r_1 et r_2 sont les racines réelles (et toutes les deux strictement négatives) de $AX^2 + BX + 1 = 0$; lorsque t tend vers $+\infty$, il y a extinction (sans oscillations) de toutes les solutions. Si $\Delta = 0$, le même phénomène se produit car les solutions sont dans ce cas de la forme

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-Bt/2A}$$

et s'évanouissent lorsque t tend vers l'infini sans osciller.

6.b (5) *On fixe maintenant $A = 10$ et $B = 2$. Déterminer toutes les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène du second ordre*

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

On applique ce qui précède et l'on trouve $\Delta = -36$, donc

$$\lambda = \frac{1}{10}\,,\ \omega = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}\,.$$

Les solutions de l'équation sans second membre sont

$$y(t) = e^{-t/10}(C_1\cos(3t/10) + C_2\sin(3t/10))\,,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires.

6.c (5) *Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle du second ordre*

$$10\,y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = \cos(2t)\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

qui vérifie de plus les deux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Si D désigne l'opérateur de dérivation, on a

$$[10D^2 + 2D + \mathrm{Id}](e^{2it}) = (-40 + 4i + 1)e^{2it}.$$

Une solution particulière de l'équation (avec second membre cette fois) est donc

$$y_0(t) = \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{2it}}{4i - 39}\Big) = \frac{1}{1537}(-39\cos(2t) + 4\sin(2t))\,.$$

La solution générale de l'équation avec second membre est

$$y(t) = e^{-t/10}(C_1\cos(3t/10) + C_2\sin(3t/10)) + \frac{4\sin(2t) - 39\cos(2t)}{1537}\,.$$

On doit ajuster les constantes C_1 C_2 pour que

$$C_1 - \frac{39}{1537} = y(0) = 0$$

et

$$-C_1/10 + 3C_2/10 + \frac{8}{1537} = y'(0) = 1\,,$$

ce qui donne des valeurs numériques explicites pour les constantes C_1 et C_2.