Université Bordeaux 1 **PIN 401**
Mathématiques Année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES n° 1

Exercice 1 – Parmi les ensembles suivants, munis de l'addition et de la multiplication scalaire naturelles, lesquels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Dans l'affirmative, en trouver une base.

(1) L'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
(2) L'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
(3) L'ensemble des polynômes à une indéterminée $\mathbb{R}[X]$.
(4) L'ensemble des polynômes $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ quadratiques tels que $P(0) = P(1)$.

Exercice 2 – Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) Montrer que les fonctions continues $C \subset E$ forment un sous-espace de E.
(2) Même question pour les fonctions dérivables $D \subset E$, puis les fonctions 1-périodiques.
(3) Montrer que $f \mapsto f'$ est une application linéaire de $D \to E$.
(4) Montrer que $f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ est une application linéaire de $C \to \mathbb{R}$.

Exercice 3 – On considère le plan complexe $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $(1, i)$, où $i^2 = -1$. Soit une application $\mathbb{R}$-linéaire donnée par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. À quelle condition la transformation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associée est elle $\mathbb{C}$-linéaire ?

Exercice 4 – On considère le plan $x + y + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. En donner une base (i, j), et trouver un vecteur supplémentaire k tel que (i, j, k) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 – On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille des $(e^{nx} : n \in \mathbb{N})$ est libre. Est-elle génératrice ?

Exercice 6 – Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère l'application linéaire de matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(1) Trouver deux vecteurs i et j tels que $Mi = i$ et $Mj = 2j$, respectivement.
(2) Montrer que (i, j) est une base de $\mathbb{R}^2$.
(3) Écrire la matrice de l'application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée à M dans la base (i, j).
(4) En déduire qu'en itérant la transformation $x_{n+1} := Mx_n$, à partir de $x_0 \neq 0$ arbitraire, on obtient des vecteurs x_n arbitrairement longs, « presque parallèles à j » (donner un sens précis à cette dernière assertion).
(5) Généraliser : si $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, montrer qu'il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $Mx = \lambda x$ si et seulement si $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$. On suppose que cette équation en λ a deux racines réelles distinctes. Que peut t'on en conclure ?