Corrigé du devoir n° 5

Exercice 1.
Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f étant définie par morceaux sur $]-\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (de plus f est continue à droite en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ elle a une dérivée n-ième à droite en 0).

Continuité en 0. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^0 = 1$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = c = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0 si et seulement si $c = 1$.

Dérivabilité en 0. Si f n'est pas continue alors elle n'est pas dérivable. On étudie donc la dérivabilité en 0 uniquement quand $c = 1$.
• $\forall x \geq 0, f(x) = ax^2 + bx + 1$. Cette formule est valable à droite de 0, **y compris en 0**, donc en la dérivant selon les règles usuelles on peut calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et $f'_d(0)$ (dérivée à droite). On obtient : $\forall x > 0$, $f'(x) = 2ax + b$, $f'_d(0) = b$ et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'_d(0)$.
• $\forall x \leq 0, f(x) = e^x$ (cette formule est aussi valable en $x = 0$ car $f(0) = c = 1 = e^0$). En dérivant cette formule, on peut donc calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et $f'_g(0)$. On obtient : $\forall x < 0$, $f'(x) = e^x$, $f'_g(0) = e^0 = 1$ et $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'_g(0)$.
On en déduit que f est dérivable en 0 si et seulement si $f'_g(0) = f'_d(0)$, c'est-à-dire $b = 1$. Dans ce cas $f'(0) = 1$ et f' est continue en 0, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Dérivée seconde en 0. On procède comme pour f'. Si f n'est pas $\mathcal{C}^1$ alors f' n'est pas dérivable, on se place donc dans le cas $b = c = 1$.
• $\forall x \geq 0, f'(x) = 2ax+1$ (cette formule est valable en 0 car on a calculé ci-dessus que $f'(0) = 1$) donc $\forall x > 0$, $f''(x) = 2a$, $f''_d(0) = 2a$ et $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = f''_d(0)$.
• $\forall x \leq 0, f'(x) = e^x$ (formule valable en 0 car $f'(0) = 1 = e^0$) donc $\forall x < 0$, $f''(x) = e^x$, $f''_g(0) = e^0 = 1$ et $\lim_{x\to 0^-} f''(x) = f''_g(0)$.
On en déduit que f' est dérivable en 0 si et seulement si $f''_g(0) = f''_d(0)$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$. Dans ce cas $f''(0) = 1$ et f'' est continue en 0, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Dérivée troisième en 0. On étudie l'existence de $f^{(3)}(0)$ pour $a = \frac{1}{2}$, $b = c = 1$. Par la même méthode que précédemment on trouve $f_g^{(3)}(0) = e^0 = 1$ et $f_d^{(3)}(0) = 0$. Les dérivées à gauche et à droite sont différentes donc $f^{(3)}$ n'est pas définie en 0.

Conclusion. f est $\mathcal{C}^2$ si et seulement si $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$ et f n'est jamais $\mathcal{C}^3$.

Autre méthode. On peut étudier la dérivabilité en 0 en utilisant les taux d'accroissement. Nous montrons ici comment calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$, les dérivées supérieures se traitant de la même manière. Si $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = ax + b$ donc $f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = b$. Dans le cas $c = 1$ la dérivée à gauche (si elle existe) est donnée par la limite en 0^- de $\frac{e^x-1}{x}$; or par définition $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est égale à la dérivée en 0 de $g(x) = e^x$. Comme $g'(x) = e^x$, on obtient que $f'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{x} = g'(0) = 1$.

Exercice 2.
$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composition de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité en 0. $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\cos\frac{1}{x}$. Comme $|\cos\frac{1}{x}| \leq 1$ on a $|x\cos\frac{1}{x}| \leq |x|$ d'où $-|x| \leq x\cos\frac{1}{x} \leq |x|$. On a $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\cos\dfrac{1}{x}$ existe et vaut 0.

Conclusion. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$. Cette fonction n'a pas de limite en 0 (cf feuille 4, ex. 6, $f(x)$), donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3.
a) Soit $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$. f est dérivable et $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$. On applique le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$ ($x > 0$) : il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$. Comme $0 < x < c < x+1$ on a $0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ donc $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

b) On applique la question a) pour $x = 1, 2, \ldots, k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et on somme les inégalités obtenues. Comme

$$\ln(k+1) - \ln(k) + \ln(k) - \ln(k-1) + \cdots + \ln(2) - \ln(1) = \ln(k+1) - \ln(1),$$

on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(1) < 1 + \frac{1}{2} + + \cdots + \frac{1}{k},$$

autrement dit $S_{k+1} - 1 < \ln(k+1) < S_k$. En prenant $k = n-1$ ($n \geq 2$ donc $k \geq 1$) la 1ère inégalité donne $S_n < 1 + \ln(n)$ et en prenant $k = n$ la 2ème inégalité donne $\ln(n+1) < S_n$. Donc $\forall n \geq 2$, $\ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et par la question b) $S_n > \ln(n+1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 4.
Soit $f(x) = \sqrt{1+2x}$. La fonction f est définie sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$. On a $f(0) = 1$, $f'(x) = (1+2x)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -(1+2x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 3(1+2x)^{-\frac{5}{2}}$. On applique la formule de Taylor au point 0 à l'ordre 2 :

$$\forall x > 0,\ \exists c \in]0, x[,\ f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}(1+2c)^{-\frac{5}{2}}.$$

$c > 0$ donc $1 + 2c > 1$, $(1+2c)^{\frac{5}{2}} > 1 > 0$ et $0 < (1+2c)^{-\frac{5}{2}} < 1$. Comme $x > 0$ on a $0 < \frac{x^3}{2}(1+2c)^{-\frac{5}{2}} < \frac{x^3}{2}$, donc $1 + x - \frac{x^2}{2} < f(x) < 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}$ pour tout $x > 0$. On remarque que $f(0) = 1$ donc

$$\forall x \geq 0,\ 1 + x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}.$$

Exercice 5.

a) **Étude de f.**

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

$(x^2+1)^2$ est toujours strictement positif donc le signe de f' est donné par celui de $1-x^2$. Tableau de variation de f :

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$$

On déduit du tableau de variation que f a un unique minimum local en -1 qui est aussi un minimum global, et f a un unique maximum local en 1, qui est aussi un maximum global.

Étude de g.

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ donc $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{g'} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $\forall x \neq 1$, $g'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.

Comme $(x-1)^2>0$, le signe de g' est donné par celui de x^2-2x-2. $\Delta = 12$, $x_1 = 1-\sqrt{3} < 1$, $x_2 = 1+\sqrt{3} > 1$.

	$-\infty$		x_1			1			x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x\to1^-} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty$

$g(x) = \frac{x+1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ d'où

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

On déduit du tableau de variation que g a un unique minimum local en x_2 et un unique maximum local en x_1. La fonction g n'a pas d'extremum global.

b) D'après le tableau de variation de f, f a une asymptote horizontale $y=0$ en $-\infty$ et $+\infty$.

D'après le tableau de variation de g, g a une asymptote verticale en $x=1$. Étudions les asymptotes en $\pm\infty$. On fait la division euclidienne (avec reste) de x^2+x-1 par $x-1$ et on trouve $x^2+x-1 = (x-1)(x+2)+1$. Donc $g(x) = x+2+\frac{1}{x-1}$. On a donc $\lim_{x\to+\infty} g(x)-(x+2) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)-(x+2)=0$. Par conséquent, g admet la droite $y=x+2$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

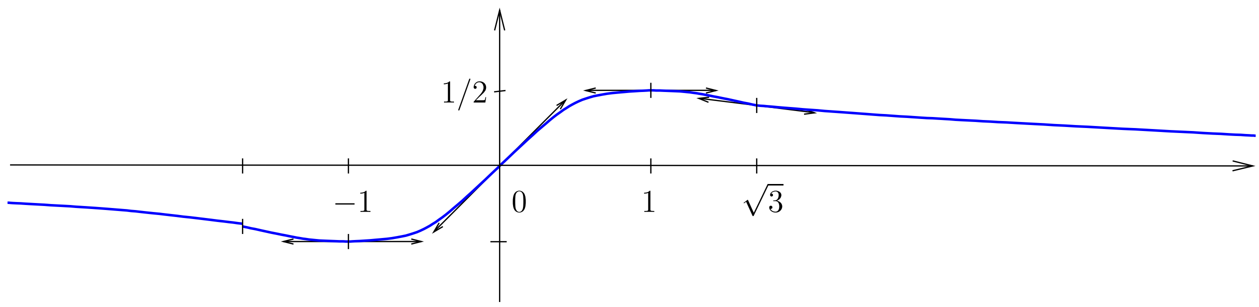
c) $f''(x) = \dfrac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$. Comme $(x^2+1)>0$, le signe de f'' est donné par le numérateur :

	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$3-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit du tableau de signe de f'' que f est concave sur $]-\infty,-\sqrt{3}]$ et $[0,\sqrt{3}]$ et que f est convexe sur $[-\sqrt{3},0]$ et $[\sqrt{3},+\infty[$. De plus, f a 3 points d'inflexion, en $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.

$g''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3}$ donc g'' ne s'annule jamais et g'' est du signe de $x-1$, c'est-à-dire $g''(x)<0 \Leftrightarrow x<1$ et $g''(x)>0 \Leftrightarrow x>1$. On en déduit que g est concave sur $]-\infty,1[$ et convexe sur $]1,+\infty[$. La fonction g n'a pas de point d'inflexion.

d) **Graphe de f.**
Remarque : on montre facilement que f est impaire, donc le graphe de f est symétrique par rapport au point $(0, 0)$.



Graphe de g.
Remarque : pour tout $h \geq 0$, $\frac{g(1+h)+g(1-h)}{2} = 3$ donc le graphe de g est symétrique par rapport au point $(1, 3)$.