Corrigé de l'examen du 3 septembre 2004

Exercice 1.
$\Delta = -3+4i$. Cherchons $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On a $(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$, donc

$$\begin{cases} x^2-y^2 & = & \Re(\Delta) & = & -3 \\ 2xy & = & \Im(\Delta) & = & 4 \\ x^2+y^2 & = & |\Delta| & = & 5 \end{cases}$$

Des lignes 1 et 3 on tire $x^2 = 1$ et $y^2 = 4$, donc $x = \pm 1$ et $y = \pm 2$. Grâce à la ligne 2 on voit que x et y sont de même signe, donc les racines carrées de Δ sont $1+2i$ et $-1-2i$.
Prenons $\delta = 1+2i$. Les solutions de l'équation $z^2+z+1-i$ sont de la forme $\frac{-1\pm\delta}{2}$, donc $S = \{i, -1-i\}$.

Exercice 2. Dans cet exercice, $\varepsilon_i(x)$ $(i = 1, 2, ...)$ est une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$.

1) $\sin(t) = t + t\varepsilon_1(t)$ (DL à l'ordre 1) donc $\sin(2x) = 2x + x\varepsilon_2(x)$.
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)$ (DL à l'ordre 2). Donc

$$\frac{x\sin(2x)}{1-\cos(x)} = \frac{2x^2 + x^2\varepsilon_2(x)}{\frac{x^2}{2} - x^2\varepsilon_3(x)} = \frac{2+\varepsilon_2(x)}{\frac{1}{2} - \varepsilon_3(x)}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(2x)}{1-\cos(x)} = 4$.

2) La fonction $\ln(\cos x)$ est définie si $\cos x > 0$, en particulier elle est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ a un sens.
$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_4(t)$ (DL à l'ordre 2).
On écrit $\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$, on a $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$ on peut composer les DL : on remplace t par $-\frac{x^2}{2}$ dans le DL de $\ln(1+t)$, on garde les termes de degré ≤ 2 et on obtient le DL à l'ordre 2 suivant : $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x)$.
On en déduit que $\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + \varepsilon_5(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3. Dans cet exercice, $\varepsilon_i(x)$ $(i = 1, 2, ...)$ est une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$.
1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ comme produit et quotient de fonctions continues dérivables.
Faisons un développement limité à l'ordre 3 de $e^{-x}\sin(x)$ en 0 :
$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon_1(t)$ donc $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)$.
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}\varepsilon_3(x)$.
On multiplie les parties polynomiales des deux DL et on garde les termes de degré ≤ 3, on obtient :
$e^{-x}\sin x = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_4(x)$. Donc

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon_4(x).$$

Ceci est un DL à l'ordre 2 de f en 0.

Comme f admet un DL d'ordre 1 en 0, on peut prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0) = 1$ (terme constant du DL de f) et la fonction obtenue est dérivable en 0 avec $f'(0) = -1$ (coefficient de x dans le DL de f). Conclusion : f se prolonge en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Les deux premiers termes du DL de f en 0 donnent l'équation de la tangente et le terme non nul suivant donne la position de la tangente. Ainsi l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 est $y = 1 - x$ et la tangente est localement au dessus du graphe car $\frac{x^2}{3} > 0$ si $x \neq 0$.

Exercice 4.

1. La fonction f est C^∞ comme produit de fonctions C^∞.
$f'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$ et $f''(x) = -2\sin(x) - x\cos(x)$.

Si $x \in]0, \pi/2[$ alors $\sin(x) > 0$, $\cos(x) > 0$ et $x > 0$ donc $f''(x) < 0$. De plus $f''(0) = 0$ et $f''(\pi/2) = -2 < 0$. On en déduit que f' est strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$. De plus $f'(0) = 1 > 0$ et $f'(\pi/2) = -\pi/2 < 0$. On déduit du tableau de variation de f' (ci-dessous à gauche) qu'il existe un unique point $x_0 \in]0, \pi/2[$ tel que $f'(x_0) = 0$. On en déduit alors le signe de f', d'où le tableau de variation de f (ci-dessous à droite) : f est strictement croissante sur $[0, x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0, \pi/2]$, donc f a un unique maximum entre 0 et $\pi/2$, situé au point d'abscisse x_0.

	0		$\pi/2$
f''	0	$-$	
f'	1	$\searrow$	$-\pi/2$

	0		x_0		$\pi/2$
f'		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$		$\searrow$	1

2. a) Soit $x \in [0, 1]$. Comme $1 \leq \pi/2$, on a $f''(x) \leq 0$ par la question 1. De plus, $\sin(x) \leq 1$, $\cos(x) \leq 1$ et $x \leq 1$ donc $2\sin(x) + x\cos(x) \leq 3$ et $f''(x) \geq -3$. Conclusion : $-3 \leq f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

b) Théorème de Taylor : f est 2 fois dérivable sur $[0, 1]$ donc pour tout $x \in [0, 1]$ il existe c compris entre 0 et x tel que $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(c)$. On a $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et par la question 2.a) $-3 \leq f''(c) \leq 0$. Comme $\frac{x^2}{2} \geq 0$ on en déduit que $1 + x - \frac{3x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3. a) $f(\pi/2) = 1 > 0$, $f(\pi) = -\pi + 1 < 0$ et $f(2\pi) = 2\pi + 1 > 0$.
Théorème des valeurs intermédiaires : si g est une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$ et $g(a)g(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(\pi/2)f(\pi) < 0$ et $f(\pi)f(2\pi) < 0$ donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f sur les intervalles $[\pi/2, \pi]$ et $[\pi, 2\pi]$: il existe $y_0 \in]\pi/2, \pi[$ et $y_1 \in]\pi, 2\pi[$ tels que $f(y_0) = f(y_1) = 0$.

b) Théorème de Rolle : $f(y_0) = f(y_1)$ (avec $y_0 < y_1$ car $y_0 < \pi < y_1$), f est continue sur $[y_0, y_1]$ et dérivable sur $]y_0, y_1[$ donc il existe un point $z \in]y_0, y_1[$ tel que $f'(z) = 0$. Comme $\pi/2 < y_0 < y_1 < 2\pi$, on en déduit que $z \in]\pi/2, 2\pi[$.

Exercice 5.

1. $\frac{2x}{1-x^2}$ est défini si $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$. La fonction $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. $\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$ et $(\mathrm{Arctan}(t))' = \frac{1}{1+t^2}$ donc

$$f'(x) = \frac{2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2 + 4x^2}.$$

On a $(1 - X)^2 + 4X = 1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2$. Si on prend $X = x^2$ on voit que $(1 - x^2)^2 + 4x^2 = (1 + x^2)^2$ donc l'expression de f' se simplifie par $(1 + x^2)$ et $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.
La dérivée de $f'(x) - 2\,\mathrm{Arctan}(x)$ vaut donc 0.

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{1}{x} - x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} \mathrm{Arctan}(t) = \mathrm{Arctan}(0) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
De même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. Soit $g(x) = f(x) - 2\,\mathrm{Arctan}(x)$. $g'(x) = 0$ par la question 2, donc g est constante sur chacun des intervalles de son domaine de définition. Le domaine de définition de g est le même que celui de f :
$D_g =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

Il existe C_1 tel que $g(x) = C_1$ pour tout $x \in]1, +\infty[$, ce qui implique que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = C_1$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (question 3) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\pi$. On a donc $C_1 = -\pi$, par conséquent $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(x) - \pi$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.
De même, il existe C_2 tel que $g(x) = C_2$ pour tout $x \in]-\infty, -1[$, ce qui implique que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = C_2$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (question 3) et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pi$. On a donc $C_2 = \pi$, par conséquent $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(x) + \pi$ pour tout $x \in]-\infty, -1[$.
Il existe C_3 tel que $g(x) = C_3$ pour tout $x \in]-1, 1[$, donc $g(0) = C_3$. De plus $f(0) = \mathrm{Arctan}(0) = 0$ donc $g(0) = 0$. Par conséquent $C_3 = 0$ et $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.