Exercice 1 Donner l'epression du déterminant det A de

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en fonction de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$\det A = ad - bc$

Quelle propiété du système linéaire

$$(*) \quad \begin{cases} ax & +bx & = & 1 \\ cx & +dy & = & 0 \end{cases}$$

est caracterisée par det $A \neq 0$?

$\det A \neq 0$ ssi $(*)$ admet une sol. unique

Exercice 2 Déterminer en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$ la solution de

$$\begin{cases} tx & + & (t+1)y & = & -2 \\ (t+1)x & + & 2y & = & t-1 \end{cases}$$

Donner une interpretation géométrique de la solution.

$$\det \begin{pmatrix} t & t+1 \\ t+1 & 2 \end{pmatrix} = 2t - (t+1)^2 = -(t^2+1) \neq 0 \ \forall t.$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{il ex. sol. unique } \forall t.}$

$$\begin{array}{cc|c} t & t+1 & -2 \\ t+1 & 2 & t-1 \\ \hline t & t+1 & -2 \\ 1 & -t+1 & t+1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}-\mathrm{I}) \end{array}$$

si $t=0$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $y = -2$, $x = 3$

sinon $(*)$, $\boxed{t \neq 0}$

$$\begin{array}{cc|c} t & t+1 & -2 \\ 0 & (t+1)-t(-t+1) & -2-t(t+1) \\ \hline t & t+1 & -2 \\ 0 & 1 & \dfrac{-2-t^2-t}{1+t^2} \end{array} \quad \begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{I}-t\,\mathrm{II}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $y = \dfrac{-2-t-t^2}{1+t^2}$, $x = -\dfrac{2}{t} + \dfrac{(t+1)(t^2+t+2)}{t(t^2+1)}$

$(*)$ il faut faire attention : $(t \neq 0)$
si $t=0$, $\mathrm{I} - t\,\mathrm{II} = \mathrm{I}$ $\rightsquigarrow$ on "supprime une équation" ce qui engendre des sol. "phantomes" !

géométriquement, les droites $D_1 : \; tx + (t+1)y = -2$ et
$D_2 : \; (t+1)x + 2y = t-1$
se croisent en $\left(\underbrace{\frac{t^2+3}{t^2+1}}_{=x}, \; \underbrace{-\frac{t^2+t+2}{t^2+1}}_{=y} \right)$.
(même vrai pour $t=0$!)

Exercice 3 Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & -y & +z & = & 0 \\ -x & +5y & +2z & = & 42 \\ 4x & +y & +11z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 42 \\ 4 & 1 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 9 & 5 & 84 & \mathrm{I} + 2\cdot\mathrm{II} \\ 0 & -3 & -9 & 0 & 2\mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 9 & 5 & 84 & \\ 0 & 0 & -22 & 84 & \mathrm{II} + 3\cdot\mathrm{III} \end{array}$$

$\rightsquigarrow z = -\frac{42}{11}$

$9y + \frac{5 \cdot 42}{11} = 84$

$\rightsquigarrow y = \frac{924-210}{99} = \frac{714}{99} = \frac{238}{33}$

$2x - \frac{238}{33} - \frac{42}{11} = 0$

$\rightsquigarrow x = \frac{182}{33}$

(calcul mental, à vérifier!)

Exercice 4 Calculer A^{-1} pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

choisir une ligne

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

balayer première colonne

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{II} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2\cdot\mathrm{II} - \mathrm{I} \end{array}$$

puis 2ième colonne

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & \mathrm{I} - 2\cdot\mathrm{II} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{II} \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 & -3 & \mathrm{III} - 3\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

finalement balayer ici avec III.

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & \mathrm{I} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{II} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \mathrm{III}/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \mathrm{I} + 3\cdot\mathrm{III} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \mathrm{II} - 2\,\mathrm{III} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$