université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017 / 2018
DEVOIR SURVEILLÉ

Licence 3, Examen Topologie
Durée : 3h00
Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.

Collège Sciences et technologies

Pensez bien justifier vos réponses.
Toute affirmation non justifiée sera considéré fausse.

Question 1 *(Barème indicatif: 1+1.5+1 = 3.5 points)* Soit $X = \mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite par la norme Euclidienne $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Soit $N(\cdot)$ une autre norme sur $\mathbb{R}^2$. Pour chacune des parties suivantes expliquer avec preuve détaillée, si elles sont ouvertes ou non (on pourra faire une esquisse rapide dans le plan $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y): \quad \|(x,y)\|_2 < 42\Big\} \\ B &= \{(x,y): \quad N((x,y)) < 42\Big\} \\ C &= \Big\{(x,y): \quad \exists p \in \mathbb{N} : y = px\Big\}. \end{aligned}$$

Question 2 *(Barème indicatif: 1+1=2 points)* Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad y^2 < x^2\}.$$

(a) Faire un dessin de D dans le plan $\mathbb{R}^2$.
(b) Justifier rigoureusement si, oui ou non, D est une partie connexe dans $\mathbb{R}^2$ (muni de la topologie habituelle).

Question 3 *(Barème indicatif: 1 + 2 = 3 points)* Rappelons que $\mathscr{B}$ est une base d'une topologie sur X si
(i) $\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B = X$
(ii) Pour tout $A, B \in \mathscr{B}$ il existe une partie $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ tel que $A \cap B = \bigcup_{C\in\mathscr{C}} C$.

Sur $X = \mathbb{R}$, soit $\mathscr{B} = \{\pi\} \cup \{\{\pi, x\} : x \neq \pi\}$.

(a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base d'une topologie sur $\mathbb{R}$, appelée la topologie VIP (un sigle pour "Very Important π").
(b) Soit

$$E = [-2,2] \quad \text{et} \quad F = [-4,4]$$

Les parties E et F, sont-elles ouvertes dans la topologie VIP de $\mathbb{R}$? Détailler vos réponses.

Question 4 *(Barème indicatif: 1+0.5+1+0.5=3 points)* Soit $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tel que } f \text{ bornée }\}$ et $Y = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tel que } f \text{ continue}\}$. Il est admis que X, Y sont des espaces vectoriels pour l'addition usuelle de fonctions et leur multiples scalaires.
(a) Montrer que $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \quad x \in [0,1]\}$ est une norme sur X.
(b) Montrer que $Y \subset X$. Dorénavant, Y sera muni de la topologie induite par X.
(c) Montrer que aucun voisinage de la fonction $f = 0$ est inclus dans Y.
(d) Est-ce que $A = \{f \in Y : \|f\| < 1\}$ est un ouvert de X? Preuve ou contre-exemple détaillé.

Question 5 *(Barème indicatif: 2 points)* Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie quelconque. On pose $\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : \ a \in A\}$ et $A_\varepsilon = \{x \in X : \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. Montrer que

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Question 6 *(Barème indicatif: 1.5 + 2.5 = 4 points)*

(a) Soit (X, d) un espace métrique compact et (x_n) une suite de X qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence. Est-ce que (x_n) converge? Preuve ou contre-exemple.

(b) Soit f une application de X dans Y, espaces métriques, et $G = \{(x, f(x)) : \ x \in X\} \subset X \times Y$ le graphe de f. Montrer que G est fermé dans $X \times Y$ si f est continue. Montrer que la réciproque est vraie lorsque Y est compact.

Question 7 *(Barème indicatif: 1.5 + 2 = 3.5 points)* Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie discrète et $Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie habituelle.

(a) Parmi les ensembles

$$G = (-1, 1) \times (-1, 1) \qquad H = [-1, 1] \times (-1, 1) \qquad \text{et} \qquad J = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

identifier les parties ouvertes pour la topologie produit sur $X \times Y$. Preuve ou contre-exemple détaillé pour chaque ensemble.

(b) Caractériser les parties compactes K de $X \times Y$ qui sont de la forme $K = K_1 \times K_2$.

— FIN —