université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2017-2018** Code UE : 4TMQ502U Epreuve : Intégration Date : 7/11/2017 Heure : 16h15 Durée : 1h30 Aucun document autorisé Epreuve de M Rafik Imekraz	**COLLEGE SCIENCES ET TECH.**

Exercice 1(2+2=4 points)

A) Énoncer le théorème de la convergence monotone.

B) Rappeler la définition d'une tribu de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2

(1+1+1+2=5 points)

On rappelle que la tribu borélienne est la plus petite tribu de $\mathbb{R}^d$ qui contient les ouverts de $\mathbb{R}^d$. De plus, un élément de la tribu borélienne est appelé un borélien. Montrer que les parties suivantes sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$:

C) Une droite de $\mathbb{R}^2$.

D) L'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad x^2+y^4\geq 2\}$.

E) $\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}[r-\frac{1}{n^2}, r+\frac{1}{n^2}]\right)\times\{0\}$.

F) Pouvez-vous déterminer précisément l'ensemble de la question E ?

Exercice 3

(2+2+1+2=7 points)

Pour tout $x\in]0,2[$ et $n\in\mathbb{N}$ on note $f_n(x)=\frac{x^{2n}(2-x)}{2^{2n+1}}$.

G) Expliquer pourquoi les deux quantités $\int_0^2\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^2 f_n(x)dx$ définissent bien deux valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et expliquer pourquoi ces deux valeurs sont sont égales :

$$\int_0^2\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^2 f_n(x)dx$$

H) Déterminer la valeur exacte de $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$ (on justifiera aussi pourquoi la série converge).

I) Pour tout $N\in\mathbb{N}^\star$, on note $S_N=\sum_{k=1}^N\frac{(-1)^k}{k}$. Prouver que $(S_N)_{N\geq 1}$ est une suite convergente

J) Calculer la limite $\lim_{N\to+\infty} S_N$ à l'aide des deux dernières questions.

Parmi les outils vus en cours/TD pour inverser des limites $\lim \int = \int \lim$, on se permet de rappeler l'énoncé du théorème de la convergence dominée :

Théorème 1. *Considérons une suite de fonctions mesurables $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui convergent presque partout vers une fonction mesurable f :*

$$p.p.\ x \in \mathbb{R}^d \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

On suppose qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui domine toutes les fonctions f_n :

$$p.p.\ x \in \mathbb{R}^d \quad |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x)$.

Exercice 4

(1+1+1+1=4 points)

Pour chacune des intégrales suivantes, montrer que les fonctions considérées sont intégrables (si n est assez grand) et calculer les limites lorsque $n \to +\infty$

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) dx$

2) $\int_{-1}^{1} \frac{1-(1-x^2)^n}{\sqrt{|x|}} dx$

3) $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+\sin(x/n)} dx$

4) $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-1}{n}x^2+x} dx$