Outils

Exercice 1

a) Rappeler la définition de $\inf(A), \sup(A)$ pour une partie bornée $A \subset \mathbb{R}$, pour une suite (x_n).

b) Montrer qu'une suite monotone converge si et seulement si elle est bornée.

c) Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie bornée, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Exprimer avec quantificateurs les quatre expressions suivantes

$$x_0 < \inf(A), \qquad x_0 > \inf(A), \qquad x_0 < \sup(A), \qquad x_0 > \sup(A).$$

Exercice 2 Soient A, B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, et supposons $\forall_{a\in A}\forall_{b\in B} \quad a < b$.

a) Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

b) A-t-on une inégalité stricte?

Exercice 3

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+, f(x, y) = \sin^2(x + y)$. Calculer

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) \text{ et } \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y).$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ une fonction. Comparer $\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y)$ et $\inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y)$.

Sommes de Riemann

Exercice 4 Donner les sommes supérieures et inférieures de Riemann pour $\cos(x)$ sur $[0, \pi]$ qui correspond a la subdivision

$$\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}.$$

Exercice 5 Donner les sommes supérieures et inférieures de Riemann pour $f(x) = 2x + 1$ sur $[0, 1]$ qui correspond a la subdivision

$$\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ...1\}.$$

Calculer les explicitement les limites quand n tend vers infini. Même exercice avec $f(x) = x^2$.

Exercice 6 Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Intégrales de Riemann impropres

Exercice 7 Vérifier la convergence des intégrales de Riemann impropres suivants. Les calculer, le cas échéant.

$$\int_2^{+\infty} 3\,dt \quad \int_2^{+\infty} t^2\,dt \quad \int_2^{+\infty} e^{-t}\,dt \quad \int_2^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t+3}\,dt \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$$

$$\int_2^{\infty} \cos(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx; \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{3-x}} \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(3-x)^{\frac{3}{2}}} \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$$

Exercice 8 Vérifier la convergence des intégrales de Riemann impropres suivants, sans calcul de l'intégrale.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+5t}dt \qquad \int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt \qquad \int_1^{+\infty} te^{-t}dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}\ln(t)}dt$$

Exercice 9 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_\alpha = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \qquad \text{et} \qquad J_\alpha = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$$

a) Montrer que I_α et J_α convergent absolument pour $\alpha > 1$.
b) Utiliser une IPP pour montrer que I_α et J_α convergent pour $\alpha > 0$.
c) Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} x\sin(x^3)dx$.

Exercice 10 Vérifier la convergence des intégrales de Riemann impropres suivants. Les calculer, le cas échéant.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} \qquad \int_0^{1} \frac{dx}{x(x+1)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$$

Exercice 11 Vérifier la convergence des intégrales de Riemann impropres suivants, sans calcul de l'intégrale.

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,\sin(x)}{1+x^2}\,dx \qquad \int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(e^x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Exercice 12 Soit $A > 0$. Discuter l'existence des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^A \frac{1}{x^\lambda}\,dx \quad \text{et} \quad \int_A^\infty \frac{1}{x^\lambda}\,dx \qquad \text{puis} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

suivant la valeur des réels λ, α et β.

Exercice 13 Étudier l'existence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x)\,dx \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{x^k - 1}{\ln(x)}\,dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{\sinh(x)}{\sinh(\pi x)}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{x\,\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad \int_1^\infty \arctan(\tfrac{1}{x})\,dx$$

$$\int_0^1 x^{-2}\ln(1-x^2)\,dx \qquad \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_1^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx$$

Exercice 14 Étudier suivant les valeurs des réels α et β la convergence des intégrales suivantes $(0 < a < 1 < b)$

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \qquad \text{et} \qquad \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$$

Exercice 15

a) Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha}\,dx$$

est convergente.

b) En déduire que $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge. Calculer I.

Exercice 16 Étudier l'existence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{x\,\sin(x)}{1+x^2}\,dx \qquad \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_{-\infty}^\infty \sin(e^x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Exercice 17 Justifier la convergence et calculer** les intégrales suivantes

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)}\,dx$$

$$c)\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx \qquad d)\ I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$$

Indications : a) il y a une primitive à 'voir', b) changement de variable $t = \frac{1}{x}$, c) IPP, d) $I + J$ pour $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$.