université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019 / 2020
LICENCE 3

Devoir Surveillé : Calcul Diff. et Eq. Diff
Durée : 1h30

Collège Sciences et technologies

Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.

Question 1 On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{ty(t)}{t^2+1} + \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \qquad y(0) = 1 \tag{1}$$

(a) *Justifier existence et unicité d'une solution à (1) sur $[0,T]$ pour tout $T > 0$.* L'équation est linéaire, de la forme $y = ay + b$ avec a, b continues. Existence et unicité sont ainsi assuré sur tout compact/

(b) *Calculer la solution y_h du problème homogène $y' = \frac{ty}{t^2+1}$ associé à (1).* La primitive de $a(t) = \frac{t}{t^2+1}$ est $A(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$. Donc $y(t) = \exp(\frac{1}{2}\ln(t^2+1))y(0) = \sqrt{1+t^2}y(0)$.

(c) *Déterminer la solution de (1).* La variation de la constante donne $c'(t) = b(t)/y_h(t) = t/(1+t^2)^2$ qui est facile à intégrer: $c(t) = \frac{1}{2(1+t^2)}$. La solution particulière est donc $y_p(t) = -1/2\sqrt{1+t^2}$. Avec la sol. homogene $y_h(t) = \sqrt{(1+t^2)})$ on obtient pour le Pb de Cauchy la solution $y(t) = -1/2\sqrt{1+t^2} + 3/2\sqrt{1+t^2}$.

Question 2 *On considère $y' = -ty$ avec $y(0) = 1$. Calculer 3 itérations de Picard à partir de $y_0(t) = 1$.* $f(t,y) = -ty$ et $y_0 = 1$. Donc $y_1(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y_0(s))\,ds = 1 - t^2/2$. Et puis $y_2(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y_1(s))\,ds = 1 + \int_0^t (-s)(1 - s^2/2)\,ds = 1 - t^2/2 + t^4/8$. Finalement, $y_3(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y_2(s))\,ds = 1 - t^2/2 + t^4/8 - t^6/48$.

Solution alternative: la solution analytique est $y(t) = exp(-t^2/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n$. On observe que

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^t (-s) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{s^2}{2}\right)^k ds &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^t \frac{s^{2k+1}}{2^k}\,ds \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{2(k+1)}}{2^{k+1}(k+1)} = \quad 1 - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j(j-1)!}\frac{t^{2j}}{2^j} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{j!}\frac{t^{2j}}{2^j} \end{aligned}$$

Ainsi, vu que y_0 est la somme partielle au rang 0, nécessairement y_n est la somme partielle au rang n pour tout n.

Question 3 *On suppose que f, g sont continues sur $\mathbb{R}$ et que g est strictement positive. Soit $y' = f(t)g(y)$ avec $y(a) = y_0$.*

(a) *Montrer qu'une solution y sur $[a,b]$ doit nécessairement satisfaire*

$$G(y(t)) = F(t) + G(y_0) - F(a) \qquad t \in [a,b]$$

où G est une primitive de $1/g$ et F une primitive de f. C'est du cours (séparation de variables)

(b) *Supposons en plus des hypothèses ci-dessus que $f(t) \geq \delta > 0$, et que $1/g$ est intégrable sur $[0,\infty)$ (au sens impropre de Riemann). Montrer qu'alors la solution y explose en temps fini.* Vu que $1/g$ est intégrable, G est une fonction bornée sur $[y_0, +\infty)$. De l'autre côté, F est non-borné, (plus précisement, $F(t) \geq \delta(1 - y_0)$). Egalité est donc impossible pour tout $t > y_0$. Cecui signifie que la solution n'existe pas globalement - par le thm. du cours la seule raison est explosion en temps fini.

(c) *Illustrer le résultat en comparant les intervalles d'existence de la solution maximale des deux équations $y' = (1 + y^\alpha)$, $y(0) = 0$ pour les valeurs $\alpha = 1, 2$.* Pour $\alpha = 1$, $y(t) = t - 1 + e^t$ existe en tout temps. En me temps, $1/g$ n'est pas intégrable. Pour $\alpha = 2$, $y(t) = \tan(t)$ explose en temps fini. Le sup de G sur $[0,\infty)$ et $\pi/2$ - vu que $\delta = 1$, l'égalité de (a) cesse au plus tard si $1 \cdot (t - 0) > \pi/2$, donc en $t = \pi/2$. Bingo! C'est le point où $y(t) \to +\infty$. Le point est qu'on le "voyait" sans connaître la solution!

Question 4 *On considère le système d'équations différentielles suivant:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = & -x + 3y + e^t \\ y' = & -2x + 4y \end{array} \right. \tag{2}$$

(a) *Ecrire sous la forme $z' = Az + b$ où A est une matrice 2×2, et $b, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Résoudre le système homogène $z' = Az$. Les colonnes de $\exp(tA)$ donnent un système fondamental. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Les vecteurs propres $v_1 = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$ et $v_2 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$ Il suit

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = ...$$

(c) *Trouver l'unique solution de (2) qui satisfait $x(0) = y(0) = 1$.* Variation de la constante: on cherche une solution de la forme $z_p(t) = \exp(tA)c(t)$ ce qui donne (cours!) $c'(t) = \exp(tA)b(t) = ..$ on calcule c, puis z_p et ajuste mu_1, μ_2 pour que $z_p(t) + exp(tA)(mu_1, \mu_2)^t$ satisfait les valeurs initiales $(1, 1)$ en $t = 0$.