Devoir Surveillé : Calcul Diff. et Eq. Diff
Durée : 1h30

Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.

Question 1 On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{ty(t)}{t^2+1} + \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \qquad y(0) = 1 \tag{1}$$

(a) Justifier existence et unicité d'une solution à (1) sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$.
(b) Calculer la solution y_h du problème homogène $y' = \frac{ty}{t^2+1}$ associé à (1).
(c) Déterminer la solution de (1).

Question 2 On considère $y' = -ty$ avec $y(0) = 1$. Calculer 3 itérations de Picard à partir de $y_0(t) = 1$.

Question 3 On suppose que f, g sont continues sur $\mathbb{R}$ et que g est strictement positive. Soit $y' = f(t)g(y)$ avec $y(a) = y_0$.

(a) Montrer qu'une solution y sur $[a, b]$ doit nécessairement satisfaire

$$G(y(t)) = F(t) + G(y_0) - F(a) \qquad t \in [a, b]$$

où G est une primitive de $1/g$ et F une primitive de f.

(b) Supposons en plus des hypothèses ci-dessus que $f(t) \geq \delta > 0$, et que $1/g$ est intégrable sur $[0, \infty)$ (au sens impropre de Riemann). Montrer qu'alors la solution y explose en temps fini.
(c) Illustrer le résultat en comparant les intervalles d'existence de la solution maximale des deux équations $y' = (1 + y^\alpha)$, $y(0) = 0$ pour les valeurs $\alpha = 1, 2$.

Question 4 On considère le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} x' = & -x + 3y + e^t \\ y' = & -2x + 4y \end{cases} \tag{2}$$

(a) Ecrire sous la forme $z' = Az + b$ où A est une matrice 2×2, et $b, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
(b) Résoudre le système homogène $z' = Az$.
(c) Trouver l'unique solution de (2) qui satisfait $x(0) = y(0) = 1$.

— FIN —