Rappels sur les e.d.o

Exercice 1 Équations différentielles séparables Résoudre les équations suivantes (déterminer les solutions maximales définies en $t = 0$) :

$$y' = \frac{\pi}{4}\cos(t)(1+y^2); \qquad y' = (1-y)y; \qquad y' = t\sqrt{1-y^2};$$
$$y'y^2 = t. \qquad y'(x) = xy(x); \qquad y'(x) = \frac{1}{x}y(x);$$

Exercice 2 (Variation de la constante) Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants:

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) \qquad y'(x) + \cos(x)y(x) = 0 \qquad xy' + 3y = 0$$

Déterminer maintenant les solutions aux problèmes in-homogènes associés aux problèmes ci-dessus.

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x)+(x+1)^2\cos(x) \qquad y'(x)+\cos(x)y(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad xy'+3y = x^2$$

Exercice 3 Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

$y'' + 2y' - 3y = -t + 1$
$y'' + 2y' - 3y = e^t$
$y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^t + \cos(t)$
$y'' - 6y' + 9y = 3 + e^{3t}$
$y'' - 3y' = 3 + t^2$
$y'' + y = t + \sin(t)$

Exercice 4 (Systèmes diagonalisables) Résoudre $y' = Ay$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication: toute sol. est de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$, v_i vect. propre, λ_i val. propre.

Exercice 5 (Systèmes non-diagonalisables) Résoudre $y' = Ay$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication. Calculer une base $v_1, ..v_k$ de $\ker(A-\lambda)$, puis résoudre $(A-\lambda)w_k = v_k$. Ainsi on trouve une base $v_1, .., v_m$ de l'espace propre généralisé $\ker(A-\lambda)^m$. Alors

$$y_j(t) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{\lambda t}(A-\lambda)^j v_j$$

donne un système de m solutions indépendantes. Cette procédure est fait pour chaque valeur propre. On trouve ainsi toutes les solutions comme combinaisons linéaires.
Astuce: La solution de $y' = Ay$ est aussi exprimé par $y(t) = \exp(tA)y_0$ si $y(0) = y_0$. Ici, $\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k/k!$. Dans le cas où $A = D + N$ avec D diagonale et N nilpotent, cette série n'a que peux de termes en puissances de N et se calcule très vite. Voir la partie "quali-linéaire" en bas.

La méthode des caractéristiques, dans le cas linéaire

$$a(x,y)\cdot u_x(x,y) + b(x,y)\cdot u_y(x,y) \;=\; c(x,y)$$

et supposons une solution u. Soit $S = \{(x,y,u(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ son graphe.

a) Calculer des vecteurs directeurs du plan tangent en un point $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, puis calculer un vecteur normal.

b) Déduire que $(a(x,y), b(x,y), c(x,y))$ doit être dans le plan tangent de S en tout point $(x, y, u(x,y))$. Mais on ne connaît pas S. Pour le trouver (et donc u), nous cherchons des *courbes* $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ qui lui appartiennent. Le plus simple serait que $(x'(s), y'(s), z'(s)) = (a, b, c)$. Ceci donne un système d'edo.

c) Une *valeur initiale* est une donné de la forme $u(\gamma(r)) = f(r)$, où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétré. Souvent $\gamma(r) = (0, r)$ si x a le rôle de temps et y le rôle d'espace. Mais on peut prescrire une valeur plus générale sur une courbe γ. Pour satisfaire la condition initiale, il faut que $(\gamma(r), u(\gamma(r))) = (\gamma(r), f(r)) \in S$. Concrètement ceci produit les valeurs initiales des 3 e.d.o's: il faut résoudre le système

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{ds}x(r,s) &= a(x(r,s), y(r,s)) \qquad & x(r,0) &= \gamma_1(r)\\
\tfrac{d}{ds}y(r,s) &= b(x(r,s), y(r,s)) \qquad & y(r,0) &= \gamma_2(r)\\
\tfrac{d}{ds}z(r,s) &= c(x(r,s), y(r,s)) \qquad & z(r,0) &= f(r)
\end{aligned}$$

Ceci décrit la solution u sous la forme implicite de $z(r,s)$: il faut l'exprimer via les variables (x,y) !

d) Exemple: $u_x + bu_y = 0$ avec $u(0,r) = g(r)$. Alors

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{ds}x(r,s) &= 1 \qquad & x(r,0) &= 0\\
\tfrac{d}{ds}y(r,s) &= b \qquad & y(r,0) &= r\\
\tfrac{d}{ds}z(r,s) &= 0 \qquad & z(r,0) &= g(r)
\end{aligned}$$

Donc $x(r,s) = s$, $y(r,s) = sb+r$ et $z(r,s) = g(r)$. Or $x = s$, $y = sb+r$, $r = y-bx$, et donc $u(x,y) = z(r(x,y), s(x,y)) = g(y-bx)$. Nous savons déjà que ceci est la bonne solution.

Exercice 6 Traiter $u_x + bu_y = f(x,y)$ avec $u(0,r) = g(r)$ de la même manière.

Exercice 7 Résoudre $u_x + 3y^{2/3}u_y = 2$ avec $u(r,1) = 1 + r$.

Exercice 8 Résoudre $xu_x - 2yu_y = 1$ avec $u(r,r) = r^3$.

Exercice 9 Résoudre $(x-y)u_x + u_y = x$ avec $u(r,0) = f(r)$.

Le problème semi-linéaire:

$$a(x,y)\cdot u_x(x,y)+b(x,y)\cdot u_y(x,y) \;=\; c(x,y,u)$$

avec $u(\gamma_1(r),\gamma_2(r))=g(r)$ Comme avant, on considère S. Le vecteur $(a(x,y),b(x,y),c(x,y,u(x,y)))$ doit apparaître à S, ainsi que la courbe $(\gamma_1(r),\gamma_2(r),g(r))$.

$$\begin{array}{ll}
\frac{d}{ds}x(r,s)=a(x(r,s),y(r,s)) & x(r,0)=\gamma_1(r)\\
\frac{d}{ds}y(r,s)=b(x(r,s),y(r,s)) & y(r,0)=\gamma_2(r)\\
\frac{d}{ds}z(r,s)=c(x(r,s),y(r,s),z(r,s)) & z(r,0)=g(r)
\end{array}$$

Qu'il faudra résoudre. Ceci décrit la solution u sous la forme implicite de $z(r,s)$: il faut l'exprimer via les variables (x,y) !
Exemple:

$$u_t+au_x=1+u^2 \qquad u(0,r)=\cos(r)$$

On a donc

$$\begin{array}{ll}
\frac{d}{ds}t(r,s)=1 & t(r,0)=0\\
\frac{d}{ds}x(r,s)=a & x(r,0)=r\\
\frac{d}{ds}z(r,s)=1+z(r,s)^2 & z(r,0)=\cos(r)
\end{array}$$

Ainsi, $t(r,s)=s$, $x(r,s)=as+r$ et $z(r,s)=\tan(s+\arctan(\cos(r)))$. On résout $s=t$, $r=x-at$ et donc $u(t,x)=z(t(r,s),x(r,s))=\tan(t+\arctan(\cos(x-at)))$. Vérification:

$$\begin{array}{rl}
u_t= & (1+u^2)(1 \;\; +\frac{a\sin(x-at)}{1+\cos^2(x-at)})\\
u_x= & (1+u^2)(0 \;\; -\frac{\sin(x-at)}{1+\cos^2(x-at)}).
\end{array}$$

Exercice 10 Résoudre $u_x+u_y+u=1$ avec $u(r,r+r^2)=\sin(r)$.

Exercice 11 Résoudre $-yu_x+xu_y=u$ avec $u(r,0)=\psi(r)$.

Exercice 12 Résoudre $yu_x-xu_y=e^u$ avec $u(0,r)=r^2-1$.

Exercice 13 Résoudre $(x^2+1)\,u_x+\frac{2xy}{x^2+1}\,u_y=2xyu$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, surjet à la condition initiale $u(0,r)=\ln(r)$.

Exercice 14 Résoudre $(2x+4y)u_x+(x+2y)u_y=u$ sur $\{(x,y):x\geq 2y\geq 0\}$ avec la condition initiale $u(4r,0)=r^2$. Indication: la matrice 3×3 du système d'edo's est diagonalisable.

Le problème quasi-linéaire:

On essaye de traiter de la même façon le problème suivant:

$$a(x,y,u)\cdot u_x(x,y)+b(x,y,u)\cdot u_y(x,y) \;=\; c(x,y,u)$$

Le problème est le couplage des e.d.o's qui apparaît: Exemple: $(x+u)u_x + yu_y = u - y$ avec $u(r,1) = 1+r$.

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{ds}x(r,s) = x(r,s) + z(r,s) & x(r,0) = r \\ \frac{d}{ds}y(r,s) = y(r,s) & y(r,0) = 1 \\ \frac{d}{ds}z(r,s) = z(r,s) - y(r,s) & z(r,0) = 1+r \end{array}$$

Cela donne $y(r,s) = e^s$ directement. Les edo's de x, z sont couplés: Posons $w = (x,z)^t$. Alors $\frac{d}{ds}w = A.w + b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^s \end{pmatrix}$$

Puisque $A = I + N$ avec $N^2 = 0$, $A^k = I + kN$ et donc

$$\exp(sA) = \begin{pmatrix} e^s & se^s \\ 0 & e^s \end{pmatrix}$$

ce qui donne un système fondamental du problème homogène. On cherche une solution particulière par variation de la constante: soit $w(s) = \exp(sA)c(s)$: ce qui donne aisément

$$c'(s) = \exp(sA)^{-1}b(s) = \begin{pmatrix} e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -e^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Par intégration,

$$c(s) = \begin{pmatrix} s^2/2 \\ -s \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad w(s) = e^{+s} \begin{pmatrix} -s^2/2 \\ -s \end{pmatrix}$$

Ainsi, en considérant les valeurs initiales, la solution unique est

$$x(r,s) = \left(-\frac{s^2}{2} + (1+r)s + r\right)e^s \qquad \text{et} \qquad z(r,s) = (1+r-s)e^s.$$

Il suit $x = -\frac{y}{2}\ln(y)^2 + ry(1+\ln(y)) + y\ln(y)$ donc $ry = \frac{x + \frac{y}{2}\ln(y)^2 - y\ln(y)}{1+\ln(y)}$
Finalement,

$$\begin{aligned} u(x,y) =& z(r(x,y), s(x,y)) \\ =& y + ry - y\ln(y) = y + \frac{x + \frac{y}{2}\ln(y)^2 - y\ln(y)}{1+\ln(y)} - y\ln(y) \\ =& \frac{2x + 2y - y\ln(y)^2 - 2y\ln(y)}{2 + 2\ln(y)}. \qquad \text{Ouff!} \end{aligned}$$

Exercice 15 Résoudre sur $[1,\infty) \times \mathbb{R}^2$ l'équation

$$2u_t + (u_x + u_y)\tan(u) = 0$$

avec la condition initiale $u(1,p,q) = \arctan(p+q)$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 16 Résoudre $xu_x + yuu_y + xy = 0$ avec $u(r, 1/r) = 5$ $(r > 0)$. Indication: le système d'edo est non-linéaire. Considérer $\frac{d}{ds}(x(r,s)y(r,s))$ pour s'en sortir ...