université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020 / 2021
LICENCE 2

Examen: Fonctions de plusieurs variables
Durée : 3h00

Collège Sciences et technologies

Ni documents, ni équipements électroniques ne sont autorisés.

Veuillez preter une attention particulière à bien justifier vos réponses.

Écrire lisiblement votre numéro d'anonymat (à défaut: numéro étudiant) sur toutes les feuilles et intercalaires.

Question 1 **(Question de cours)** Soit $n, m > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction.

(a) Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le domaine de définition Ω de f est ouvert pour le reste de l'exercice.

(b) Donner la définition **et** une caractérisation équivalente d'un compact de $\mathbb{R}^n$.

(c) Donner la définition (ou une caractérisation équivalente) de la continuité de f.

(d) Soit K un compact inclus dans Ω et f continue. Montrer que $f(K)$ est compact.

(e) Expliquer la différence entre "f est différentiable" et "f est de classe $\mathcal{C}^1$": une explication rigoureuse est demandée, mais ni preuves, ni contre-exemples ne sont exigés.

Question 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) La fonction f, est elle continue? différentiable? de classe C^1?

(b) Est-ce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

existe? Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

(c) Calculer la matrice Hessienne de f en $(0,0)$.

Question 3 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(tx) = t^p f(x)$$

Montrer que $D_f(x)(x) = \mathcal{J}_f(x).x = pf(x)$. *Indication: fixer $x \in \mathbb{R}^n$ et calculer $h'(1)$ pour $h(t) = f(tx)$.*

TOURNER LA PAGE, S.V.P.

Question 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sont continues sur $\mathbb{R}^3$. On suppose que f a 3 points critiques, que l'on note a, b, c. On note les matrices Hessiennes respectives de f au point a par A, celle au point b par B et celle au point c par C. Les voici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Est-ce que f admet des extréma locaux? Si oui, en quels points?

Question 5 Soit $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$. Calculer le polynôme de Taylor ordre 2 de f autour du point $(1, -2) \in \mathbb{R}^2$. Que peut-on dire du reste?

Question 6 On considère le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 3y + z^3 - z & = & 7 \\ 2x + 2y + \cos(xz) & = & 7 \end{cases}$$

(a) Montrer que $(1, 2, 0)$ en est une solution.
(b) Parmi les couples de variables (x, y), (x, z) et (y, z), quels sont ceux qu'on peut localement (autour de $(1, 2, 0)$) écrire comme fonction de classe C^1 de la troisième variable?

Question 7 On considère la fonction

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \text{définie par} \qquad F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ xy^2 \\ x^3 y^3 \end{pmatrix}.$$

et les deux projections

$$\pi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & z \end{cases}$$

(a) Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U, V de $(1, 1)$ telles que $h = \pi_1 \circ F : U \to V$ est bijective, et que h^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.
(b) Soit $g := \pi_2 \circ F \circ h^{-1}$. Montrer que l'image de U par F est le graphe de g sur V.
Remarque: il n'est pas demandé d'expliciter g !

— Fin —