## Le lemme de Fatou

**Exercice 1** Soit $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$. Calculer $\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n$ et $\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n$. (Se rappeler ces fonctions en cas de doute sur le sens de l'inégalité...)

**Exercice 2** Soit $A, B$ mesurables, de mesure positive. Pour $n \geq 0$ on pose $f_{2n} = \mathbb{1}_A$ et $f_{2n+1} = \mathbb{1}_B$. Calculer $\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n$ et $\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n$.

**Exercice 3** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge ponctuellement $\mu$presque partout vers $f$. Soient $G, (g_n)$ des fonctions positives et $\mu$-intégrables. On suppose $|f_n| \leq G + g_n$ et $\lim \int_\Omega g_n d\mu = 0$.

a) Montrer que $f$ est $\mu$-intégrable en utilisant le lemme de Fatou.

b) Montrer que $\liminf g_n = 0$ en utilisant le lemme de Fatou.

c) Considérer les fonctions $G + \liminf g_n \pm f$. Utiliser le lemme de Fatou pour montrer que

$$\limsup \int_\Omega f_n d\mu \quad \leq \quad \int f \quad \leq \quad \liminf \int_\Omega f_n d\mu$$

et déduire $\lim \int_\Omega f_n d\mu$.

## Convergence monotone

**Exercice 4** $f_n = \mathbb{1}_{[n,2n]}$. Les fonctions sont positives, mesurables (sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu Borelienne). Calculer $\lim \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim f_n$. Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique?

**Exercice 5** Soit $g_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,\infty)}$. Les fonctions sont positives, mesurables (sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu Borelienne), et la suite est monotone. Calculer $\lim \int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} \lim g_n$. Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique?

**Exercice 6** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions positives.

a) Montrer que $\sum \int f_n = \int \sum f_n$.

b) Appliquer à $f_n = x^{s-1}e^{-nx}\mathbb{1}_{[0,\infty)}$ pour montrer $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1-e^x}\, dx = \Gamma(s)\zeta(s)$.

**Exercice 7** Soit $p > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p|\ln(x)|}{1-x}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}$.

**Exercice 8** Soit $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$.

a) Soit $\exp(g_n) = f_n$. Montrer que $(g_n)$ est croissante ssi $(f_n)$ est croissante.

b) Montrer $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour tout $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Montrer que $f_{n+1}(x)/f_n(x) \geq 1$.

d) Calculer $\lim_n \int_{[0,\infty)} e^{-x^2-x} f_n(x)\, dx$.

## Convergence dominé

**Exercice 9** Soit $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Existe-t-il une majoration intégrable pour les fonctions suivantes? Si oui trouver la limites des intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$.

$$f_n = \sqrt{n}\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}, \quad g_n = \frac{n}{\log n}\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{n}]}, \quad h_n(x) = \frac{n^2 x\, e^{-nx^2}}{1+x^2}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \qquad n \geq 1$$

$$k_n(x) = \frac{nx\sin x}{1+|nx|^\alpha}, \quad l_n = k_n \mathbb{1}_{(0,1)}, \qquad \alpha \geq 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

**Exercice 10** Calculer

$$\begin{array}{ll}
\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} \arctan(1+x^2/n)\frac{dx}{1+x^2} & \lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx \\
\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} (1+\frac{x}{n})^{-n}\sin(x/n)dx & \lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,n/2]} x^k(1-\frac{x}{n})^{-n}dx \text{ pour } k \in \mathbb{N} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} \frac{n}{(1+n^2x^2)}\,dx \text{ pour } a > 0. & \lim\limits_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} ne^{-nx}\sin(1/x)dx \\
\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} n\sin(x/n)[x(1+x^2)]^{-1}dx & \lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}
\end{array}$$

**Exercice 11** Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-n\sin^2 x}dx$.

**Exercice 12** Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{[-n,n]} f(x)\,dx = 0$.

**Exercice 13** Soit $\lambda(X) < \infty$, et $(f_n)$ une suite de fonctions intégrables sur $X$ qui converge uniformement vers $f$. Montrer que $f$ est intégrable et que $\int_X f(x)\,dx = \lim \int_X f_n(x)\,dx$.

## Applications.

**Exercice 14** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\sum_n \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx < \infty.$$

Déduire que $g(x) := \sum_n |f_n(x)|$ est intégrable. Déduire que la série $\sum_n f_n(x)$ converge presque partout absolument. Montrer que $g$ est un majorant pour la suite de fonctions

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$$

et déduire finalement

$$\sum_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_n f_n(x)\Big)\,dx$$

**Exercice 15** Soit $0 < a < b$ et $f_n(x) = a\,e^{-nax} - b\,e^{-nbx}$. Montrer que

$$A := \int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\Big)\,dx \quad \text{et} \quad B := \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_0^\infty f_n(x)\,dx\Big)$$

sont bien définis; a-t-on égalité?

**Exercice 16** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, dérivable sur $[a,b]$ tel que la dérivée $f'(x)$ est bornée sur $[a,b]$. Montrer que $f'$ est intégrable sur $[a,b]$ et que

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

Indication: considérer $g_n(x) = \mathbb{1}_{[a,b-\frac{1}{n}]}(x) \cdot n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$.

**Exercice 17** Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Montrer que $F$ est continue.

**Exercice 18** Montrer que $F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \arctan(tx)\,dt$ est continue.

**Exercice 19** Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$. Montrer que $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\,dt$ est continue.

**Exercice 20** Soit $F(x) = \int_{[0,\infty)} tx^2\,e^{-tx}\,dt$.

a) Calculer $F(0)$ et $\lim_{x\to 0+} F(x)$.
b) Pourtant $x \mapsto tx^2e^{-tx}$ est continue et $f(\cdot, x)$ est intégrable pour tout $x \geq 0$. Contradiction avec le théorème sur la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre?

**Exercice 21** On pose $F(x) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1-\exp(-xt^2)}{t^2\exp(t^2)}\,dt$.

a) Vérifier que $F$ est bien définie sur $(-1,+\infty)$.
b) Montrer que $F$ est dérivable sur $(-1,+\infty)$ et calculer $F'(x)$.
c) En déduire une expression plus explicite de $F(x)$.

**Exercice 22** On note $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\frac{dt}{t}$. Montrer que la fonction $\Gamma$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(0,+\infty)$ (on fixera $0 < a < b < +\infty$ et on montrera par récurrence que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $(a,b)$ pour tout $n$).

**Exercice 23 (Examen 2014 et 2016)**

a) Pour tout $t > 0$, démontrer que l'on a $|\sin(t)| \leq t$.
b) Pour tout $x > 0$, montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}dt.$$

Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $(0,+\infty)$ (on pourra commencer par le montrer sur $[a,+\infty)$ avec $a > 0$).
d) Prouver que l'on a $F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.
e) En déduire qu'il existe une constante $C$ telle que $\forall x > 0 \quad F(x) = C - \arctan(x)$.
f) Prouver que $C = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 24 (examen 2014)** On rappelle que pour toute fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la transformée de Fourier

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

On suppose que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists C_n > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^n f(x)| \leq C_n.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$

b) Rappeler les hypothèses pour pouvoir dériver $\widehat{f}$ et démontrer la formule qui donne $\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$.

c) Montrer que $\widehat{f}$ est dans $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée $n$-ième.

**Exercice 25** Soit $f(x) = \left(\int_0^x \exp(-t^2)\,dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,dt$. Montrer que $f, g \in C^1([0,\infty))$, puis simplifier $f + g$ et déduire la valeur numérique de $\int_0^\infty \exp(-t^2)\,dt$.

**Exercice 26** Soit $F(x) = \int_0^\infty \cos(tx)e^{-t^2/2}\,dt$. Montrer que $F \in C^1(\mathbb{R})$, calculer $F'(x)$ et exprimer $F'$ avec $F$. Déduire une formule close pour $F(x)$.

**Exercice 27** Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln(t)}\,dt$. Déterminer le domaine (maximale) de définition de $F$, montrer que $F \in C^1((0,\infty))$, calculer $F'$ et déduire une expression simple pour $F(x)$.

**Exercice 28** Effectuer un changement de variables $x = e^{-y}$ dans l'exercice précédent pour déduire pour tout $0 < a < b$ la valeur numérique de

$$\int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})\,\frac{dx}{x}.$$

**Exercice 29** Que peut on dire de $\int_2^\infty \frac{dt}{t\ln(t)}$ ? Soit $F(x) = \int_2^\infty \frac{dt}{t^x \ln(t)}$ pour $x > 1$. Montrer que $F$ est dérivable sur $(1,\infty)$, calculer $F'(x)$ pour $x > 1$.
Écrire $F(x) = F(2) - \int_x^2 F'(t)\,dt$ pour calculer un équivalent de $F(x)$ quand $x \to 1+$.

**Exercice 30** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose

i) Pour tout $t$, $f(t,\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

ii) Pour tout $x$, $f(\cdot,x)$ est intégrable.

iii) il existe $g \in L_1(\mathbb{R})$ tel que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq g(t)$ uniformément en $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que $F(x) := \int_{[0,u(x)]} f(t,x)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$F'(x) = u'(x)f(t,x) + \int_{[0,u(x)]} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$$

Indication: introduire la fonction $G(x,y) := \int_0^y f(t,x)\,dt$.