Université de Bordeaux,
L1 de Mathématiques,
Année 2022-2023

Analyse S2 — Feuille 1

Exercice 1 **(Moyennes arithmétiques, géomtriques et harmoniques)**

a) Soient $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ des nombres réelles. Montrer que

$$x_1 \quad \leq \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \quad \leq \quad x_n$$

Justifier qu'on a égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

b) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Montrer que

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \quad \leq \quad \left(\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^n$$

Indications:

i) Etablir les cas $n = 1, 2$ à la main.

ii) Ensuite démonter le cas $n = 2^k$ via récurrence sur k, en se ramenant pour l'hérédité au cas $n = 2$. Observer que égalité est possible à nouveau seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2^k}$.

iii) Pour le cas général, et n fixé choisir k tel que $2^k > n$, et observer que

$$X = \tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \qquad \text{satisfait} \qquad X = \tfrac{n}{2^k}X + \tfrac{2^k-n}{2^k}X = \tfrac{1}{2^k}(x_1 + \ldots + x_n + \underbrace{X + X + \ldots + X}_{2^k-n})$$

c) Soit $x_1, x_2, \ldots x_n > 0$. Montrer que

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}} \quad \leq \quad \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Exercice 2 Déterminer l'ensembles suivants de $\mathbb{R}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \quad |x+7| - 2x \leq 5\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \quad 4x \leq x^2 - 5\}.$$

Exercice 3 Soient x, y, z des réels, ets $\varepsilon > 0$. Montrer les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} 2xy &\leq \varepsilon^2 x^2 + \tfrac{1}{\varepsilon^2} y^2 \\ (x+y)^2 &\leq (1+\varepsilon^2)x^2 + (1 + \tfrac{1}{\varepsilon^2})y^2 \\ xy + yz + zx &\leq x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Exercice 4 Pour chacun des ensembles A, B, C et D suivants

$$A = \{0, 1, 3, 15, -7\}, \quad B = [-1, 3], \quad C =]2, 3], \quad D =]-2, 3] \cup [4, 5[.$$

dire

- s'ils sont majorées ou minorés,
- s'ils ont un plus grand ou un plus petit élément ; si oui le préciser,

Exercice 5 Pour chacun des ensembles suivants, montrer qu'il est borné puis déterminer la borne supérieure (préciser si c'est un maximum) et la borne inférieure (préciser si c'est un minimum).

$$A = \{\frac{4}{x} - 3 \ , \ x \in [1, 2[\} \ ; \quad B = \{-2\} \cup]0, 3] \cup \{4\} \ ; \quad A \cap B.$$

Exercice 6 Etudier l'existence des bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants. Les déterminer si elles existent et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$\begin{aligned} &A = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in]1, 3], \ y = \frac{1}{x}\}, &&B = \{(x+1)^2 \ , \ x \in]-2, 3]\}, \\ &C = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \ z = n^2 + 1\}, &&D = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \ x = 1 - \frac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Exercice 7 Pour les ensembles suivants déterminer si elles sont majorés ou minorés, puis vérifier si ils admettent un maximum ou minium.

$$\begin{aligned} &A = \{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} : \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \geq 1\} &&B = \{\frac{|x|x^2}{1+x^2} : \quad x \in \mathbb{R}\} \\ &C = \{\frac{1}{n} - \frac{1+(-1)^n}{2n} : \quad n \in \mathbb{N}^*\} &&D = \{x \in \mathbb{R} : \quad \exists y \in \mathbb{R} : \quad (x+1)^2 + y^2 \leq 2023\}. \end{aligned}$$

Exercice 8 Soit $M \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, différent de $\mathbb{R}$. Supposons que
a) $\forall x \in M : \forall y \leq x : \quad y \in M.$
b) $\forall x \in M : \exists y \in M : \quad y > x.$
Montrer que M est borné supérieurement, qui n'admet pas de maximum, et non-borné inférieuement. Déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M = (-\infty, \alpha)$.

Exercice 9 Montrer à l'aide de la définition que la suite de terme général $u_n = 3n/(4n+2)$ (pour $n \geq 0$) converge et calculer sa limite. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 10 La suite de terme général u_n (pour n suffisamment grand), dans chaque cas suivant, est-elle divergente? convergente ? Calculer sa limite le cas échéant :

a) $u_n = \frac{4n^5}{6n^7-5n^3+n^2-4}$; b) $u_n = \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$;

c) $u_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)}$; d) $u_n = \dfrac{2n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$;

e) $u_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$; f) $u_n = n^{1/n}$; g) $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$;

h) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; i) $u_n = \dfrac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$;

j) $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$; k) $u_n = \sin(n)$.

Les réponses doivent être justifiées.
Pour la dernière suite, on supposera convergence. En considérerant la suite $\sin(n+1)$, déduire que $v_n := \cos(n)$ converge alors également. En développant $\cos(n+1)$, conclure en obtenant une contradiction.

Exercice 11 Montrer qu'une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 12 On considère les suites de terme général respectivement

$$\frac{2+\cos n}{n}, \quad (2+\cos n)\,n, \quad (-1)^n\,(2+\cos n)\,n, \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \quad (-1)^n\frac{n}{n+1}$$

pour $n \geq 1$.

a) Les suites ci-dessus sont-elles bornées ?
b) Sont-elles convergentes ?

Exercice 13 Soit (a_n) une suite décroissante, à termes positives, et

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Montrer que la suite (S_N) converge si et seulement si la suite "compressée" de teme général

$$C_N := \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n}$$

converge. Appliquer aux cas

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_n = \frac{n}{1+n^2}, \qquad \frac{1}{n\ln(n)}, \qquad \frac{1}{n\ln(n)^2}$$