Université de Bordeaux,
L1 de Mathématiques,
Année 2022-2023

Analyse S2 — Feuille 3

Exercice 1 Soit $q > 0$. Déterminer le comportement de la suite de terme général $a_n := \sqrt{q^n + n} - \sqrt{n}$ en fonction de q.

Exercice 2 Soit (b_n) la suite de terme général

$$b_n := \frac{2}{n+1} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right) - \sqrt{n^2 - 1}.$$

Étudier si la suite (b_n) converge (on pourra commencer à simplifier le produit).

Exercice 3 Soit (a_n) une suite décroissante à termes généraux positifs. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 4 Soit (a_n) une suite de Cauchy et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissant. Supposons que

$$\lim_{k\to\infty} a_{\varphi(k)} =: \ell$$

existe. Montrer que (a_n) converge vers ℓ.

Exercice 5 Soit (s_n) donnée par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 11^{-k}$$

où $a_{2k-1} = 7$ et $a_{2k} = 3$. Calculer la limite $\lim s_n$, si elle existe.

Exercice 6 Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge si, et seulement si les suites

$$(a_{2k})_{k\geq 0}, \quad (a_{2k+1})_{k\geq 0}, \quad (a_{3k})_{k\geq 0}$$

convergent tous les trois. Est-ce que l'implication "$\Leftarrow$" reste vraie, si on supprime une des 3 conditions?

Exercice 7 Soit (a_n) une suite avec $\lim_n a_{2n} = a$ et $\lim a_{2n+1} = b$ et $a \neq b$. Trouver tous les valeurs d'adhérence de la suite (a_n).

Exercice 8 Soit $x \geq 0$ fixé, et $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$.

a) Développer a_n en somme binomiale, et justifier que

$$a_n \leq b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

b) Justifier que la suite (b_n) est bornée. Indication: observer que le terme de sommation dans b_n, à savoir $c_k := \frac{x^k}{k!}$ satisfait $\frac{c_{k+1}}{c_k} \leq q = \frac{1}{2}$ pour $n \geq 2x$.

c) En déduire que (b_n) converge, appelons

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un $N \geq 1$ avec $b_N > b - \varepsilon$. Soit $n \geq N$. Justifier

$$a_n \geq c_n := \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

Justifier que $\lim_n c_n = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$. En déduire qu'il existe $M \geq 1$ avec

$$c_n \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} - \varepsilon$$

pour tout $n \geq M$.

d) Conclure pour $n \geq \max(N, M)$ que

$$b - 2\varepsilon \leq a_n \leq b,$$

et donc, que $a_n \to b$ lorsque $n \to \infty$.

e) Soit $x < 0$. Justifier $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq 1$ et, pour $n > |x|$, que

$$\left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$$

Déduire la limite de la suite $a_n := (1 + \frac{x}{n})^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (fixé).

Info: la somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} =: \exp(x)$$

définit proprement la fonction exponentielle.